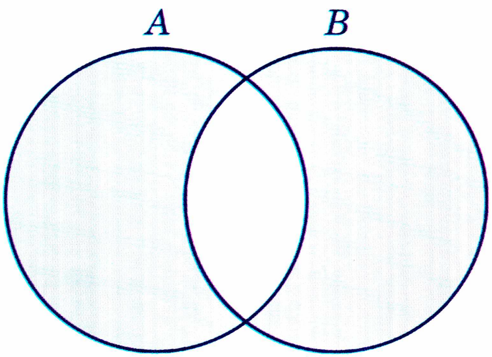
MATEMÁTICA BÁSICA



$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

- ✓ NOCIONES DE LÓGICA
- ✓ CONJUNTOS
- ✓ RELACIONES BINARIAS Y FUNCIONES
- ✓ NÚMEROS REALES
- ✓ AXIOMA DEL SUPREMO
- ✓ INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Moisés Lázaro C.

MATEMÁTICA BÁSICA

A

TOMO 1

- NOCIONES DE LÓGICA
- CONJUNTOS
- RELACIONES BINARIAS Y FUNCIONES
- NÚMEROS REALES
- AXIOMA DEL SUPREMO
- INDUCCIÓN MATEMÁTICA

MOISÉS LÁZARO CARRIÓN

Autor *: Moisés Lázaro Carrión*
Estudios *: Lic. en Matemáticas Puras, Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).*

Experiencia Docente:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Universidad Ricardo Palma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash Santiago Antúnez de Mayolo
Universidad Nacional del Callao
Universidad Particular San Martín de Porres

MATEMÁTICA BÁSICA

Autor: Moisés Lázaro Carrión

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº ..... : 2006-10881
International Standard Book Number ISBN .... : 9972-813-40-1

Primera Edición: Febrero 2007

Reimpresión: 2012

Tiraje: 500 ejemplares

Obra editada, impresa y distribuida por:
Distribuidora - Imprenta - Editorial - Librería
MOSHERA S.R.L.
RUC: 20101220584
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Lima - Perú / Telefax: 567-9299

Im[illegible] Perú - Printed in Perú

A Juana Ignacia
mi recordada y querida hermana.

PRÓLOGO

Este texto titulado MATEMÁTICA BÁSICA - A, Tomo 1 ha sido preparado para tratarse en un primer curso de Matemáticas Universitarias y que están de acuerdo al Programa Curricular de las carreras de Ciencias, Ingeniería, Administración, Economía.

El tomo 1 consta de seis capítulos: Nociones de Lógica, Conjuntos, Relaciones Binarias, Números Reales, Axioma del Supremo e Inducción Matemática.

Cada capítulo ha sido preparado en forma amena y didáctica sin dejar de ser formal y riguroso.

Cada capítulo comienza estableciendo claramente las definiciones, los axiomas y teoremas con ejemplos ilustrativos e intuitivos. Se demuestran los principales teoremas y se refuerzan con diversos problemas resueltos.

El primer capítulo: ***Nociones de Lógica***, es tratado en forma cuidadosa y ordenada, poniendo especial énfasis en la buena aplicación de las tautologías lógicas y sobre todo lo referente a la IMPLICACIÓN, a la DOBLE IMPLICACIÓN, a la condición NECESARIA - SUFICIENTE y a la INFERENCIA LÓGICA; temas muy importantes que se aplican en toda demostración formal y rigurosa.

El segundo capítulo: ***Conjuntos***, es tratado de manera formal, rigurosa y sobre todo INTUITIVA, por ello recurro constantemente a los diagramas de Venn-Euler para intuir las diversas propiedades conjuntistas.

El tercer capítulo: ***Relaciones Binarias***, trata en forma general de las nociones de Relaciones y Funciones de un conjunto A en otro conjunto B, es el inicio para ulteriores estudios tales como funciones reales de variable real. En este capítulo se estudian en forma general los temas relativos a función inyectiva, suryectiva y biyectiva.

El cuarto capítulo: ***Números Reales***, es tratado en forma axiomática, siendo reforzado con diversos y variados ejemplos. La parte aplicativa es lo referente a las ecuaciones e inecuaciones que son muy importantes para posteriores temas de estudio en el ANÁLISIS MATEMÁTICO.

El quinto capítulo: ***Axioma del Supremo***, es tratado en forma amena e intuitiva, empezando por ejemplos sencillos para después formalizar su definición y ser aplicado a diversos conjuntos. Este axioma es muy importante porque constituye la piedra angular de diversos tópicos tratados en el ANÁLISIS MATEMÁTICO.

El sexto capítulo: ***Inducción Matemática***, es tratado en forma axiomática y es reforzado con diversos ejemplos en orden de dificultad. Es un tema muy sugestivo que nos permite garantizar la validez de diversas fórmulas que se cumplen para todo número natural o entero positivo.

Cada capítulo esta acompañado de variados problemas resueltos que coadyuvan al estudiante a reforzar su aprendizaje.

Al final de cada capítulo se han agregado diversidad de problemas con el fin de que el estudiante refuerce su aprendizaje.

Moisés Lázaro Carrión

CONTENIDO

1

NOCIONES DE LÓGICA

2

CONJUNTOS

3

RELACIONES BINARIAS

4

NÚMEROS REALES

5

AXIOMA DEL SUPREMO

$\boxed{6}$

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

NOCIONES DE LÓGICA

INTRODUCCIÓN

Todos los tópicos relativos a las matemáticas se razonan desde el punto de vista lógico y por lo tanto hay que tener muy en cuenta el enunciado de las proposiciones MATEMATICAS y su consecuente validez.

NOTA: VALIDEZ significa que una proposición es verdadera o es falso, pero nunca debe ocurrir que sea verdadero y falso a la vez.
A lo largo de todos los temas que iremos desarrollando en estos apuntes, veremos cómo se usan los conectivos lógicos y cuando es VERDADERO O FALSO una disyunción, una conjunción o una condicional.

1.1 ENUNCIADO

Se llama enunciado a toda frase u oración. Algunos enunciados son mandatos o interrogaciones o son expresiones de emoción; otros en cambio son afirmaciones o negaciones que tienen las características de ser verdadero o falsa.

EJEMPLO

01. ¿Qué curso te has matriculado?
02. ¡Vaya rápido!
03. ¡Viva el Perú!
04. Prohibido hacer bulla
05. Dos más tres es igual a cinco
06. Todas las gallinas son aves
07. París es la capital de Francia
08. $5 > 8$
09. $3+5=8$
10. $x^2 < 4y$
11. $x^2+y^2 \leq 9$

OBSERVACIÓN: Los enunciados que expresan una exclamación, una interrogante, una emoción; son expresiones no proporcionales, tales como los ejemplos 1,2,3,4.

1.2 PROPOSICIÓN:

Llamamos PROPOSICIÓN a todo enunciado que tiene la cualidad de ser VERDADERA (V) o de ser FALSA (F), pero nunca puede ser V y F a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

Los ejemplos:	5,6,7,8,9	son proposiciones.
Los ejemplos:	10 *y* 11	son enunciados **abiertos**.

NOTACIÓN.- Denotaremos a las proposiciones con letras minúsculas: p, q, r, s, t. Si son muchas proposiciones, entonces usaremos subíndices, tales como:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, p_n$$
$$q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, q_n$$
$$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_n, \text{ etc.}$$

EJEMPLOS DE PROPOSICIONES:

p : "dos más tres, es igual a cinco"
q : "ocho es menor que tres"
r : "cinco es diferente que cero"
s : "cuatro multiplicado por tres, es igual a doce"
t : "cuatro y diez son múltiplos de dos"
u : "2 es menor que 3 y 3 es múltiplo de 5"

Como podemos observar:

p es V	s es V
q es F	t es V
r es V	u es F

En las matemáticas las proposiciones fundamentales son:

a) los axiomas o postulados
b) los lemas
c) los teoremas
d) los corolarios.

a) Los axiomas o postulados, son proposiciones cuya **VALIDEZ** se aceptan sin demostración.

b) Los lemas, son proposiciones previas a la demostración de algunos teoremas.

c) Los teoremas, son proposiciones que para ser **VÁLIDAS**, necesitan de su demostración. Se muestran usando los axiomas y algunas tautologías lógicas.

d) Los corolarios, son proposiciones que son consecuencias de algunos teoremas.

1.3 ENUNCIADOS ABIERTOS

Son expresiones que contienen **variables** y que no tiene la propiedad de ser verdadero o falso.

EJEMPLO 1 $P[x]$: "$x < 5$" es un enunciado abierto porque no podemos afirmar que es V o es F. Sólo cuando la variable "x" toma un valor numérico se hace V o F.

Así tendremos: $p[3]$: $3 < 5$ es V
$p[9]$: $9 < 5$ es F

EJEMPLO 2 $A[x,y] : x^2 + y^2 = 25$ también es un enunciado abierto.

VARIABLE.- Es una cantidad susceptible de variar en cierto campo o recorrido.
Las variables se representan por las letras minúsculas: x, y, z, t, u, v. Estas letras reciben el nombre de VARIABLES INDETERMINADAS.

EJEMPLO 1 $y = \sqrt{x-2}$ es un número real, si el número real $x-2$ es positivo o cero.

Es decir, el recorrido de x es $x \geq 2$

EJEMPLO 2 En la ecuación: $x^2 + y^2 = 25$.

- El recorrido de x es : $-5 \leq x \leq 5$
- El recorrido de y es : $-5 \leq y \leq 5$

Con mayor detalle se estudia en el capítulo relativo a relaciones de $I\!R$ en $I\!R$.

1.4 LAS PROPOSICIONES: SIMPLES Y COMPUESTAS

1.4.1 PROPOSICIÓN SIMPLE

PROPOSICIÓN SIMPLE (atómica o elemental): Son los enunciados que tienen un solo sujeto y un solo predicado. No llevan ningún conectivo lógico.

EJEMPLOS

p_1 :	"9 es múltiplo de 3"	p_1 es V	
p_2 :	"3 es mayor que 2"	p_2 es V	
p_3 :	"$2 \times 5 = 12$	p_3 es F	
p_4 :	"2 es mayor que 0"	p_4 es V	
p_5 :	"3 es mayor que 8"	p_5 es F	

1.4.2 PROPOSICIÓN COMPUESTA (molecular o coligativa):

Son aquellas proposiciones que se obtienen de la combinación de dos o más proposiciones simples, las cuales son enlazadas por los símbolos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, llamadas conectivas lógicas.

Donde: "*y*" se representa por "$\wedge$"
"*o*" se representa por "$\vee$"
"si … entonces … " se representa por "$p \rightarrow q$"
"si … y solo si … " por "$p \leftrightarrow q$"

EJEMPLOS

1) $\underbrace{\text{9 es mayor que 3}}_{p_1}$ y $\underbrace{\text{"3 es mayor que 2"}}_{p_2}$

Se denota por: $p_1 \wedge p_2$

2) A: "José llegó tarde, sin embargo dió examen"
José llego tarde $= P_3$
José dio examen $= P_4$
$A \equiv P_3 \wedge P_4$

NOTA: " $\equiv$ " se lee "equivalente"
sin embargo es $=$ "*y*"

3) B: "Maradona jugó, aunque estuvo lesionado"

Maradona jugó $= P_5$

Maradona estuvo lesionado $= P_6$

$$B \equiv P_5 \wedge P_6$$

NOTA: aunque es "*y*"

4) C: "$\underbrace{\text{si 9 es múltiplo de 3}}_{P_7}$ y $\underbrace{\text{12 es múltiplo de 3}}_{P_8}$, entonces $\underbrace{9 + 12 \text{ es múltiplo de 3}}_{P_9}$"

$$C \equiv (p_7 \wedge p_8) \rightarrow p_9$$

5) D: "No es el caso que Pedro baile y no cante"

Pedro baila $= p$

Pedro cante $= q$

$D \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

1.5 CONECTIVOS LÓGICOS

Los conectivos lógicos son símbolos que enlazan proposiciones atómicas, sin formar parte de ellas. Dichos símbolos también toman el nombre de operadores.

Los conectivos lógicos que usaremos en matemáticas son:

La conjunción	:	$\wedge$
La disyunción	:	$\vee$
La condicional	:	$\rightarrow$
La bicondicional	:	$\leftrightarrow$
La negación	:	$\sim$

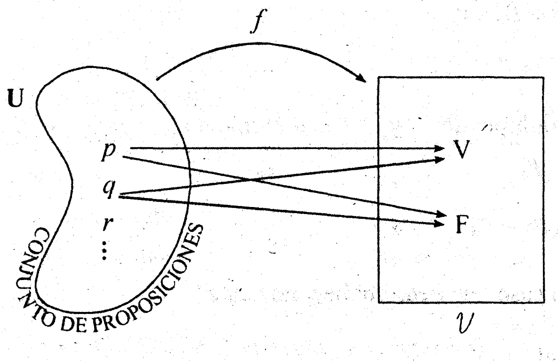
1.6 TABLAS DE VERDAD

La **VERDAD** o **FALSEDAD** de una proposición se denomina su **VALIDEZ** (o su valor de verdad). La validez de la conjunción, de la disyunción, de la condicional, de la bicondicional y de la negación pueden representarse en **TABLAS**.

En consecuencia, dadas dos o más proposiciones simples cuyos valores de **VERDAD** son conocidas, el **VALOR DE VERDAD** de una **PROPOSICIÓN COMPUESTA** depende de la verdad de cada uno de las proposiciones componentes y se determina mediante **TABLAS DE VERDAD**.

1.7 VALIDEZ DE UNA PROPOSICIÓN

Existe una correspondencia entre una proposición y su valor de verdad, así tenemos:



Si $U = \{ p, q, r, \ldots \}$ es el conjunto de proposiciones y $\mathcal{V} = \{V, F\}$ es el conjunto de valores de verdad, entonces la correspondencia establecida entre los elementos de U y de los elementos de $\mathcal{V}$ es:

$$f(p) = \begin{cases} V \text{ , si } p \text{ es verdadera} \\ F \text{ , si } p \text{ es falso} \end{cases}$$

"A cada proposición p le corresponde sólo un valor, que puede ser V (verdadero) ó F (falsa)".

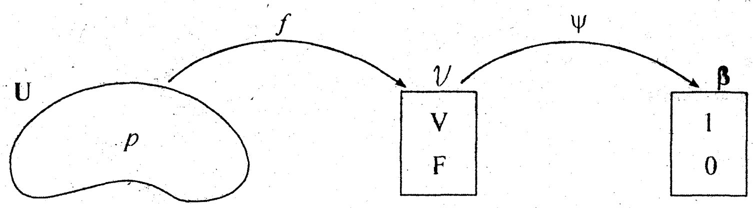
1.8 CIRCUITO CONMUTADORES

Un circuito conmutador es un circuito eléctrico que tiene interruptores que permiten el paso de la corriente o la interrupción de la corriente.

En este caso, para diseñar los circuitos eléctricos, se usa la siguiente notación:

"El "1" indica "PASA CORRIENTE"
"El "0" indica "NO PASA CORRIENTE"

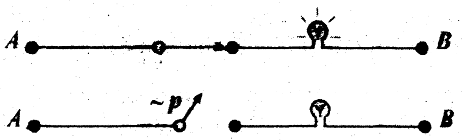
De manera que en circuitos eléctricos se usa como notación:
El "1" en lugar de "V "
El "0" en lugar de "F "
Así quedaría establecida una correspondencia unívoca entre los conjuntos $\mathcal{V} = \{V, F\}$ y $\beta = \{1, 0\}$



$$\psi(p) = \begin{cases} 1 & \text{, si } p \text{ es verdadero} \\ 0 & \text{, si } p \text{ es falso} \end{cases}$$

1.8.1 DISEÑOS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

a) Para una proposición p

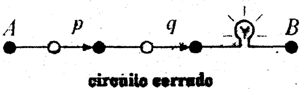


$\psi(p) = 1$ "pasa corriente"

$\psi(\sim p) = 0$ "no pasa corriente"

b) Para dos proposiciones p y q

CIRCUITO EN SERIE

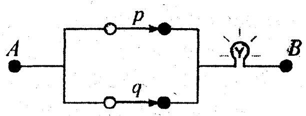


$\psi(p)=1$

$\psi(q)=1$

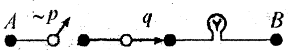
$\psi(p \wedge q)=1$

CIRCUITO EN PARALELO



$\psi(p \vee q)=1$

CIRCUITO EN SERIE

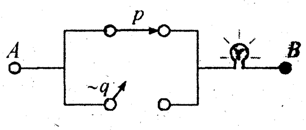


$\psi(\sim p)=0$

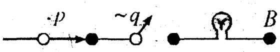
$\psi(q)=1$

$\psi(\sim p \wedge q)=0$

CIRCUITO EN PARALELO



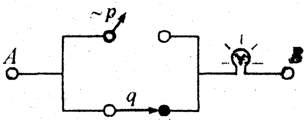
$\psi(p \vee \sim q)=1$



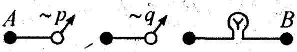
$\psi(p)=1$

$\psi(\sim q)=0$

$\psi(p \wedge \sim q)=0$



$\psi(\sim p \vee q)=1$

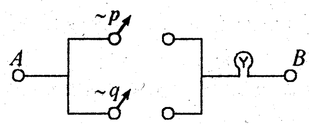


circuito abierto

$\psi(\sim p)=0$

$\psi(\sim q)=0$

$\psi(\sim p \wedge \sim q)=0$



$\psi(\sim p \vee \sim q)=0$

1.8.2 COMBINACIÓN DE DOS O MÁS PROPOSICIONES

1) Para una proposición p le corresponde $2^1=2$ posibles valores: $p \begin{smallmatrix}\nearrow V \\ \searrow F\end{smallmatrix}$

2) Para dos proposiciones p y q le corresponde $2^2=4$ combinaciones de valores.

p	V	V	F	F
q	V	F	V	F

3) Para tres proposiciones p , q y r le corresponde $2^3=8$ combinaciones

p	V	V	V	V	F	F	F	F
q	V	V	F	F	V	V	F	F
r	V	F	V	F	V	F	V	F

⋮

n) Para "n" proposiciones $p_1 , p_2 , \ldots\ldots\ldots , p_n$ habrán 2^n combinaciones de valores.

Las tablas de verdad de la conjunción, disyunción, condicional, bicondicional y negación se explica a continuación.

1.9 LA CONJUNCIÓN.

Dadas dos proposiciones p y q, la conjunción es el resultado de reunir estas proposiciones con el conectivo "$\wedge$".

TABLA DE VERDAD

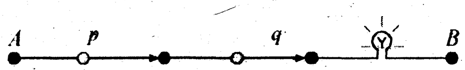
p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \cdot q$
V	V	V	1	1	1
V	F	F	1	0	0
F	V	F	0	1	0
F	F	F	0	0	0

NOTACIÓN.- La conjunción se denota de dos formas:

$p \wedge q$ se lee "p y q"

$p \bullet q$ se lee "p y q"

En circuitos eléctricos la conjunción "$p \wedge q$" viene a ser un circuito en **SERIE**.



que corresponde a "$p \wedge q$" cuando p es V y q es V.

Para efectos prácticos, el circuito en SERIE $p \wedge q$ se representan por:

$A \bullet\!\!-\!\!-\!\!-\, p \,-\!\!-\!\!-\, q \,-\!\!-\!\!-\!\!\bullet B$

si miramos el "CIRCUITO EN SERIE" nos daremos cuenta que la bomba eléctrica prende, sólo cuando "$p \wedge q$" están cerradas a la vez.
Estas ideas nos conlleva a enunciar el siguiente principio lógico o REGLA de la CONJUNCIÓN $p \wedge q$ que afirma:

> La conjunción "$p \wedge q$" es V sólo cuando "p es V y "q es V". Si uno de ellos es F, el resultado es F.

En general, una conjunción es V, cuando todos sus componentes son V.

$$\begin{array}{lllll} A \equiv P_1 & \wedge\ P_2 & \wedge\ P_3 & \ldots\ldots & \wedge\ P_n \\ V \equiv V & \quad V & \quad V & & \quad V \end{array}$$

NOTA: En todo párrafo, las palabras: "pero", "sin embargo", "además", "no obstante", "aunque", "a la vez", etc. equivalen al conectivo "$\wedge$".

EJEMPLOS

(1) La bandera peruana es blanca y roja.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{La bandera peruana es blanca} & = p \\ \text{La bandera peruana es roja} & = q\end{array}\right\} \text{“}p \wedge q\text{” o “}p \cdot q\text{”}$$

(2) Manuel es juez pero honesto

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Manuel es juez} & = p \\ \text{Manuel es honesto} & = q\end{array}\right\} \text{“}p \wedge q\text{”}$$

(3) Las computadoras son caras, sin embargo son muy útiles.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Las computadoras son caras} & = p \\ \text{Las computadoras son muy útiles} & = q\end{array}\right\} \text{“}p \wedge q\text{”}$$

(4) 3 es menor que 5, pero mayor que 1

$$\left.\begin{array}{l}\text{3 es menor que 5} = p \\ \text{3 es mayor que 1} = q\end{array}\right\} \text{“}p \wedge q\text{”}$$

1.10 LA DISYUNCIÓN.

La disyunción de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta que resulta de unir p y q por el conectivo "o".

Como el sentido del conectivo "o" es excluyente, se puede interpretar de dos maneras: débil o inclusiva y fuerte o exclusiva.

1.10.1 LA DISYUNCIÓN INCLUSIVA O DÉBIL

La disyunción inclusiva o débil de p y q se denota por "$p \vee q$" y se lee "p o q".

TABLA DE VERDAD

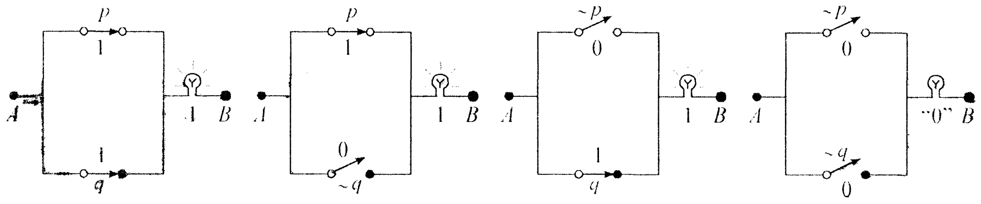
p q	$p \vee q$
V V	V
V F	V
F V	V
F F	F

p q	$p \vee q$
1 1	1
1 0	1
0 1	1
0 0	0

El principio lógico de la Disyunción lógica es: La disyunción inclusiva "$p \vee q$" es V , cuando por lo menos una de las proposiciones componentes es V. Es falso sólo cuando los dos son falsas.

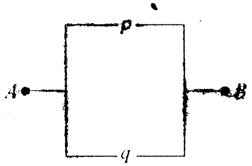
En general, $A \equiv p_1 \vee p_2 \vee \ldots\ldots\ldots \vee p_n$ es verdadera cuando por lo menos algún p_i es verdadera. A será FALSA cuando todas las p_i son FALSAS.

En circuitos lógicos, la DISYUNCIÓN "$p \vee q$" es un circuito en PARALELO.



En estos circuitos en paralelo, observamos que: bastará cerrar un interruptor para que prenda la bomba y permanecerá apagada sólo cuando ambos interruptores están abiertas.

Para efectos prácticos, el circuito en paralelo que corresponde a la disyunción "$p \vee q$" bastará representar por el siguiente diagrama:



EJEMPLOS En matemáticas es frecuente el uso de los enunciados abiertos:

1) $\underbrace{\text{“}x \text{ es menor o igual que } 3\text{”}}_{x \leq 3} \equiv \underbrace{x < 3}_{p} \vee \underbrace{x = 3}_{q}$

$\equiv p \vee q$

2) $\underbrace{\text{“} \quad (x-1)^2 \leq 0 \quad \text{”}}$ $\equiv \underbrace{(x-1)^2 < 0}_{p} \vee \underbrace{(x-1)^2 = 0}_{q}$

x menos uno al cuadrado
es menor o igual que cero

$\equiv p \vee q$

Donde: p es F para toda x
q es V sólo para $x = 1$

Luego: $p \vee q$ es V para $x = 1$

3) De dos idiomas: Inglés y francés, Juan habla por lo menos un idioma $\equiv$

$$\equiv \underbrace{\text{Juan habla inglés}}_{p} \quad \underset{\vee}{\text{o}} \quad \underbrace{\text{Juan habla francés}}_{q}$$

$$\equiv p \vee q$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$$

NOTA: $p \vee q$ es disyunción inclusiva porque incluye a $p \wedge q$: Juan habla ambos idiomas.

1.10.2 LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O FUERTE DE LAS PROPOSICIONES *p y q*

Se denota por "$p \,\Delta\, q$" o por "$p \not\equiv q$" y se lee de dos maneras:

$$p \,\Delta\, q \begin{cases} \text{"o } p\text{, o } q\text{"} \\ \text{"}p \text{ o } q\text{, pero no ambos"} \end{cases}$$

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \Delta q$		p	q	$p \Delta q$
V	V	F		1	1	0
V	F	V		1	0	1
F	V	V		0	1	1
F	F	F		0	0	0

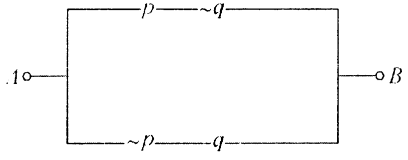
El principio lógico de la DISYUNCIÓN EXCLUSIVA es:
La DISYUNCIÓN EXCLUSIVA $p \,\Delta\, q$ es verdadera **sólo** cuando una de sus componentes es verdadera.

La DISYUNCIÓN EXCLUSIVA, tiene varias equivalencias lógicas, que nos permiten operar de la mejor forma:

$$p \,\Delta\, q \equiv \sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

"$\equiv$" se lee "equivalente"

La forma: $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ nos permite representar el siguiente circuito paralelo:



es el circuito que corresponde a $p \,\Delta\, q$

EJEMPLOS

1) **De dos idiomas**: ingles y francés

Juan habla sólo un idioma $\equiv \underbrace{\text{Juan habla inglés}}_{p}\ \underbrace{\text{pero}}_{\wedge}\ \underbrace{\text{no francés}}_{\sim q}\ \underbrace{\text{o}}_{\vee}\ \underbrace{\text{Juan habla francés}}_{q}\ \underbrace{\text{pero}}_{\wedge}\ \underbrace{\text{no inglés}}_{\sim p}$

$$\equiv \quad (p \quad \wedge \quad \sim q) \quad \vee \quad (q \quad \wedge \quad \sim p)$$

$$\equiv \quad \underbrace{(p \wedge \sim q) \quad \vee \quad (q \wedge \sim p)}_{}$$

$$\equiv \quad p \,\Delta\, q$$

2) $\underbrace{\text{El profesor ordenó hacer la tarea } A \text{ o } B}_{p \vee q}\quad \underbrace{\text{pero}}_{\wedge}\quad \underbrace{\text{no ambos}}_{\sim(p \wedge q)}$

$$\equiv \ (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$

$$\equiv \quad p \,\Delta\, q$$

Donde: p = **El profesor ordenó hacer la tarea** A

q = **El profesor ordenó hacer la tarea** B

1.11 LA CONDICIONAL

Es la combinación de dos proposiciones por el conectivo "**si** $\underbrace{\ldots\ldots}_{p}$, **entonces** $\underbrace{\ldots\ldots}_{q}$"

TABLA DE VERDAD

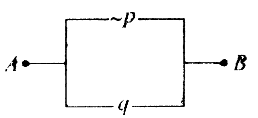
p	q	$p \to q \equiv \sim p \vee q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

El conectivo "si ... , **entonces** ... " **se denota por el símbolo** "$\to$" o por "$\supset$".

La notación "$p \to q$" se lee "**si** p, entonces q", donde:

Como $p \to q$, es equivalente a "$\sim p \vee q$", su circuito es **en paralelo**:



La proposición p se llama ANTECEDENTE (HIPÓTESIS)

La proposición q se llama CONSECUENTE (**TESIS** o CONCLUSIÓN).

$$\underset{\text{antecedente}}{p} \to \underset{\text{consecuente}}{q}$$

El principio lógico o regla de la condicional es:
La condicional es FALSA, sólo si el antecedente es V y el consecuente es F , siendo verdadera en todos los demás casos.

La condicional $p \to q$ se lee de tres maneras: $\begin{cases} \text{"si } p \text{ entonces } q\text{"} \\ \text{"}p\text{, sólo sí } q\text{"} \\ \text{"}q\text{ , si } p\text{"} \end{cases}$

Para construir una condicional $p \to q$, se pone especial cuidado que el **antecedente "p" sea verdadero** porque se supone que sólo a partir de antecedentes verdaderos se deduce que el consecuente q sea verdadero.

Cuando la VERDAD del antecedente (p) lleva necesariamente a la verdad del consecuente (q) , diremos que "p **implica** q" y denotaremos por "$p \Rightarrow q$"

EJEMPLOS: 1) si el pejerrey es un pez, entonces tiene respiración branquial
2) si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces es isósceles.
3) si $A \cap B = B$ entonces $B \subset A$

En (1) se tiene que "$p \Rightarrow q$", porque la verdad de p nos conduce necesariamente a la verdad de q.

p : el pejerrey es un pez ; q : el pejerrey tiene respiración branquial.

Resaltamos la siguiente relación : cuando un condicional es verdadero, diremos que su antecedente implica su consecuencia.

NOTA: Cuando en un párrafo se encuentran los términos: "porque, puesto que, ya que, siempre que, cuando, sí, cada vez que, dado que"; estos términos, también, son conectivos condicionales. Se caracterizan porque después de cada uno de estos términos está el ANTECEDENTE.

EJEMPLO 1 El profesor no controló la asistencia **puesto que** la oficina de la dirección del colegio estaba cerrada y no estaba el portero.

Tenemos: El profesor controló la asistencia $= p$
La oficina de la dirección del colegio estaba cerrada $= q$
El portero estaba $= r$

$$(q \wedge \sim r) \to p$$

EJEMPLO 2 Pedro compra un libro sólo cuando tiene dinero

Tenemos: Pedro compra un libro $= p$, Pedro tiene dinero $= q$ $\Big\}\ p \to q \quad \longleftarrow \quad p$, sólo si q

EJEMPLO 3 Doy examen sólo cuando estudio

Tenemos: Doy examen $= p$, estudio $= q$ $\Big\}\ p \to q$

EJEMPLO 4 Iré de viaje y me divertiré, si me saco la lotería.

Tenemos: Iré de viaje $= q$, me divertiré $= r$, me saco la lotería $= p$ $\Big\}\ p \to q \wedge r$

EJEMPLO 5 Se apagaron las luces porque se interrumpió el fluido eléctrico.

Tenemos: se interrumpió el fluido eléctrico $= p$, se apagaron las luces $= q$ $\Big\}\ p \to q$

EJEMPLO 6 Roberto aprobará el curso puesto que dio buen examen.

Tenemos: Roberto aprobará el curso $= q$, Roberto dio buen examen $= p$ $\Big\}\ p \to q$

EJEMPLO 7 El número entero b es primo, si b es divisible por 1 y por sí mismo.

Tenemos: El número entero b es primo $= p$, b es divisible por 1 $= q$, b es divisible por sí mismo $= r$ $\Big\}\ q \wedge r \to q$

En matemáticas, es corriente aplicar la condicional lógica cada vez que se desea deducir nuevas proposiciones verdaderas. Por ejemplo cuando se quiere demostrar un teorema.

Igualmente, en toda investigación de diversas disciplinas tales como en estadística y ciencias sociales (economía, psicología, sociología, etc.) se hacen inferencias a partir de algunas premisas verdaderas para llegar a una conclusión verdadera.

La proposición condicional está asociada a otras tres proposiciones importantes, estas son : la recíproca, la inversa y la contrarecíproca.

1.11.1 PROPOSICIÓN RECÍPROCA

La proposición recíproca que corresponde a la condicional $p \to q$ es $q \to p$

EJEMPLOS

1) $\underbrace{\text{Si hoy es sábado}}_{p}$, $\underbrace{\text{mañana es domingo}}_{q}$ $\equiv p \to q$

$p \to q$

$\underbrace{\text{Si mañana es domingo}}_{q}$, $\underbrace{\text{hoy es sábado}}_{p}$ $\equiv q \to p$ es el recíproco.

$q \to p$

1.11.2 PROPOSICIÓN INVERSA O CONTRARIO

La proposición inversa que corresponde a la condicional $p \to q$ es $\sim p \to \sim q$.

EJEMPLOS

1) Si hoy es sábado, mañana es domingo $\equiv p \to q$

Si hoy no es sábado, mañana no es domingo $\equiv \sim p \to \sim q$

2) $\underbrace{a \text{ es positivo}}_{q}$, si $\underbrace{a \text{ es mayor que cero}}_{p}$ $\equiv p \to q$

a no es positivo , si a no es mayor que cero $\equiv \sim p \to \sim q$

1.11.3 PROPOSICIÓN CONTRARECÍPROCA

La proposición contrarecíproca que corresponde a la condicional.

$p \to q$ es $\sim q \to \sim p$

EJEMPLOS

1) $\underbrace{a \text{ es positivo}}_{q}$, si $\underbrace{a \text{ es mayor que cero}}_{p} \equiv p \rightarrow q$

Si a no es positivo, entonces a no es mayor que cero $\equiv \sim q \rightarrow \sim p$

2) Pedro comerá, puesto que tiene hambre ≡ Si $\overbrace{\text{Pedro tiene hambre}}^{p}$, entonces $\overbrace{\text{comerá}}^{q}$ $\equiv p \rightarrow q$

Su contrarecíproca es: $\underbrace{\text{Pedro no comerá}}_{\sim q}$ entonces $\underbrace{\text{no tiene hambre}}_{\sim p}$.

1.12 LA BICONDICIONAL

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \leftrightarrow q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	1	1	1
V	F	F	1	0	0
F	V	F	0	1	0
F	F	V	0	0	1

La conjunción de los condicionales "$p \rightarrow q$" y "$q \rightarrow p$", denotada por $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, se denomina el bicondicional de p y q.

El bicondicional de las proposiciones p y q se simboliza por $p \leftrightarrow q$, que se lee "p si , y solamente si q".

> El principio lógico o regla de la BICONDICIONAL es:
>
> Una PROPOSICIÓN BICONDICIONAL es V si ambas componentes son V o son F, en otro caso es F.

EJEMPLOS

1) $(\underbrace{a^2 = 4}_{p}$ sí , solo si $\underbrace{a = 2 \vee a = -2}_{q}) \equiv p \leftrightarrow q$

2) $\underbrace{x^2 < 4}_{p}$ sí , sólo si $\underbrace{-2 < x < 2}_{q} \equiv p \leftrightarrow q$

3) $\underbrace{(\overbrace{-3<x<0}^{p_1}) \vee (\overbrace{0<x<3}^{p_2})}_{p}$ si, y sólo si $\underbrace{0<x^2<9}_{q} \equiv p \leftrightarrow q$

4) $0<x<3$ si, y sólo si $0<x^2<9 \equiv p \leftrightarrow q$

Las bicondicionales 1, 2 y 3 son verdaderas.

La bicondicional 4 es FALSO, porque $p \rightarrow q$ es **V**

y $q \rightarrow p$ es **F**

1.13 LA NEGACIÓN

TABLA DE VERDAD

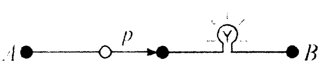
p	$\sim p$
V	F
F	V

p	$\sim p$
1	0
0	1

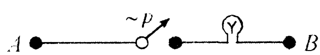
Dada una proposición "p", la negación de p es otra proposición que se denota por "$\sim p$" y se lee "no p" o "no es cierto que p".
La negación "no", cumple la función de negar una afirmación y de afirmar una negación.

La verdad o falsedad de una NEGACIÓN queda bien determinada por la tabla de verdad.

En circuitos eléctricos se tiene:



"1": "pasa corriente"
si se sierra el interruptor p.



"O": "NO pasa corriente"
si se abre el interruptor p.

NOTA: Cuando en un párrafo se escribe los términos:

a) $\underbrace{\text{“no es el caso”}}_{\sim}$ $\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{A}$

b) $\underbrace{\text{“es falso que”}}_{\sim}$ $\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{A}$, etc. en estos casos

los indicados términos niegan toda la proposición compuesta A.

Es decir: $\sim\underbrace{(\ldots\ldots\ldots)}_{A}$

EJEMPLO 1 "no es el caso que Newton fue **matemático** y filósofo"
Tenemos:

Newton fue matemático = p
Newton fue filósofo = q

$$\sim (p \wedge q)$$

EJEMPLO 2 "es falso que pelé jugó en Asia y **no estudió** en África"

Pelé jugó en Asia $= p$
Pelé estudió en África $= q$

$$\sim (p \wedge \sim q)$$

EJEMPLO 3 $\underbrace{\text{"es falso}}_{\sim}$ **que una buena bicicleta** no es barato" $\equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$

Una buena bicicleta no es barato $\equiv$ $\underbrace{\text{si una bicicleta es buena}}_{p}$, **entonces** $\rightarrow$ $\underbrace{\text{no es barato}}_{\sim q}$.

EJEMPLO 4 $\underbrace{\text{no es el caso}}_{\sim}$ **que un libro** caro es **bueno** $\equiv \sim(p \rightarrow q)$

Se tiene: un libro caro **es bueno** $\equiv$ si $\underbrace{\text{un libro es caro}}_{p}$, entonces $\rightarrow$ $\underbrace{\text{es bueno}}_{q}$

La negación, se aplica a la conjunción y la disyunción con excepcionales resultados. Así **obtenemos**: la negación conjuntiva, la negación alternativa y las leyes de De Morgan.

1.13.1 LA NEGACIÓN CONJUNTIVA

Dados dos proposiciones p y q, definimos la negación conjuntiva de p y q, a la proposición compuesta "$p \downarrow q$" que se lee "ni p ni q" ; y es **verdadera sólo cuando sus dos componentes son falsos**, siendo falsa en los otros casos.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \downarrow q$	$p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	F

Si comparamos la tabla de verdad de $p \downarrow q$ con $p \vee q$, notaremos que $p \downarrow q$ es la negación de $p \vee q$.

Es decir: $\boxed{p \downarrow q \leftrightarrow \sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q}$

se lee "ni p ni q"
"no $p \wedge$ no q"

EJEMPLO: Ni $\underbrace{\text{Ricardo Palma fue escritor}}_{p}$ ni $\underbrace{\text{Mariátegui fue poeta}}_{q}$

Se simboliza por : $\sim p \wedge \sim q$ o por $p \downarrow q$

1.13.2 LA NEGACIÓN ALTERNATIVA

Dadas dos proposiciones p y q, definimos la negación alternativa de p y q, a la **proposición** compuesta " $p \mid q$" que se lee "no p o no q" ; y es verdadero cuando por lo menos uno de sus componentes es falso, es FALSO sólo cuando los dos componentes son VERDADEROS.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \mid q$	$p \wedge q$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Si comparamos la tabla de verdad de $p \mid q$ con $p \wedge q$ notaremos que $p \mid q$ es la negación de $p \wedge q$.

Es decir; $p \mid q \leftrightarrow \sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

se lee "no p o no q"

EJEMPLO

"6 no es divisor de 20 o no es número primo"

p : 6 es divisor de 20
q : 6 es número primo

$\sim p \vee \sim q \leftrightarrow p \mid q$

1.14 USO DE LOS SIGNOS DE AGRUPACIÓN.

En un párrafo que se presentan proposiciones simples, conectivos lógicos, comas y puntos se requiere, para su representación simbólica, el buen uso de los signos de agrupación (paréntesis, corchetes, llaves).

Los signos de agrupación se usan para indicar la jerarquía de los conectivos lógicos y así evitar las ambigüedades en las FÓRMULAS.

Cuando no se usan correctamente los signos de agrupación las fórmulas carecen de sentido.

EJEMPLOS

(1) Si me aumentan el sueldo y ahorro, viajaré al Cuzco.

La simbolización es:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Me aumentan el sueldo } = p \\ \text{ahorro } = q \\ \text{viajaré al Cuzco } = r \end{array}\right\} (p \wedge q) \rightarrow r$$

En este caso: "$\rightarrow$" tiene mayor jerarquía.

(2) O Cubillas juega si le contrata el Alianza Lima, o habrá protesta si no juega.

La simbolización es:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Cubillas juega} & = p \\ \text{le contrata el Alianza Lima} & = q \\ \text{habrá protesta} & = r \end{array}\right\} (q \rightarrow p) \vee (\sim p \rightarrow r)$$

(3) Las personas nadarán en el mar si la municipalidad da el permiso, sí y sólo sí el clima no está frío.

La simbolización es:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Las personas nadarán en el mar} & = p \\ \text{La municipalidad da el permiso} & = q \\ \text{El clima está frío} & = r \end{array}\right\} (q \rightarrow p) \leftrightarrow \sim r$$

1.15 LA EVALUACIÓN DE ESQUEMAS MOLECULARES POR LA TABLA DE VALORES.

Son esquemas moleculares:

a) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow p$

b) $[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow [r \wedge \sim(p \vee \sim q)]$

c) $(q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)$

La evaluación de esquemas moleculares consiste en hallar los valores del **operador principal** a partir de la validez de cada una de las proposiciones simples (variables proposicionales).

El número de valores que se asigna a cada variable proposicional depende de la formula 2^n, donde n indica el número de proposiciones simples que existe en el esquema molecular y 2 es una constante que índica los dos valores (V) ó (F) que tiene una proposición simple.

Luego, en una tabla rectangular que la llamaremos TABLA DE VERDAD, se escriben horizontalmente todas las variables proposicionales y el esquema molecular; debajo de las variables proposicionales se escriben, en columna, todas las combinaciones posibles de verdad y falsedad. A continuación se aplica la regla a cada uno de los operadores (conectivos), empezando por el de menor alcance y terminando con el de mayor jerarquía.

1.15.1 TAUTOLOGIA, CONTRADICCION Y CONSISTENCIA

Tautología:

Denominamos tautología a toda proposición compuesta que es siempre verdadera, cualquiera sean los valores de verdad de las proposiciones componentes (esquema a).

Las siguientes proposiciones son tautologías:

a) $p \rightarrow p$, b) $p \vee \sim p$, c) $\sim(p \wedge \sim p)$

Contradicción:

Diremos que una proposición compuesta es una ***contradicción***, si es siempre falsa, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones componentes.

Un esquema molecular es ***contingente*** cuando en su resultado hay por lo menos una verdad y una falsedad (esquema c).

a)

p	q	$[p$	$\wedge$	$(p \rightarrow q)]$	$\rightarrow$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F

b)

p	q	r	$[(\sim p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$\sim r]$	$\leftrightarrow$	$[r$	$\wedge$	$\sim$	$(p$	$\vee$	$\sim q)]$
V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F
V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	F	F	V	V

c)

p	q	r	$(q \rightarrow r)$	$\vee$	$(\sim p$	$\rightarrow$	$r)$
V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F

1.16 LA EQUIVALENCIA Y LA IMPLICACIÓN.

Sean los esquemas moleculares o fórmulas proposicionales (o simplemente proposiciones compuestas):

$A \; = \sim p \,\Delta \sim r$

$B \; = \sim (p \wedge q) \vee \sim r$

$C \; = \sim (p \wedge q \wedge r)$

Debemos distinguir los conceptos de equivalencia e implicación de los conceptos bicondicional y condicional respectivamente.

La equivalencia y la implicación son relaciones entre **fórmulas proposicionales**, mientras que la bicondicional y la condicional son relaciones entre **proposiciones**.

Así tendremos las siguientes definiciones:

1.16.1 LA EQUIVALENCIA

Dos fórmulas B y C son **equivalentes** cuando unidos por el bicondicional "$\leftrightarrow$" el resultado **es una** TAUTOLOGÍA.

1.16.2 LA IMPLICACIÓN

Una fórmula A **implica** a B, **cuando unidos** por el condicional "$\rightarrow$", siendo A antecedente y B **consecuente, el** resultado es una TAUTOLOGÍA.

Desarrollando las tablas de verdad correspondiente, tenemos:

			B		C
p	q	r	$[\sim(p \wedge q) \vee \sim r]$	$\leftrightarrow$	$\sim(p \wedge q \wedge r)$
V	V	V	F	V	F V
V	V	F	V	V	V F
V	F	V	V	V	V F
V	F	F	V	V	V F
F	V	V	V	V	V F
F	V	F	V	V	V F
F	F	V	V	V	V F
F	F	F	V	V	V F

Como vemos: B es equivalente a C

y A implica a B

			A			$\Rightarrow$	B			
p	q	r	$[\sim p$	Δ	$\sim r]$	$\rightarrow$	$[\sim(p \wedge q)$		$\vee$	$\sim r]$
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V

NOTA: Cuando B **no** es equivalente a C, denotamos por $B \not\Leftrightarrow C$

Cuando A **no** implica a B, denotamos por $A \not\Rightarrow B$

1.17 LA INFERENCIA LÓGICA

La inferencia es el proceso de pasar de un conjunto de **premisas** a una CONCLUSIÓN.

La inferencia es una **condicional** de la forma:

$$\boxed{(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \rightarrow q} \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

A esta condicional, se le **llama** también, argumento lógico; donde p_1, p_2, ..., p_n son llamadas premisas y **originan** como consecuencia otra proposición "q" **llamada** CONCLUSIÓN.

El **resultado** de la **condicional (I)** **puede** ser una **tautología**, **una contingencia o una** contradicción y podemos **resumir del siguiente** modo:

1) Si la condicional (I) es **una tautología, entonces se tiene una inferencia válida** (o argumento válido).
2) Si la condicional (I) es FALSO **entonces** se **tiene la llamada falacia**.

TEOREMA **Si la condicional (I) es VÁLIDO y las premisas p_1, p_2, ... p_n son verdaderas, entonces la conclusión "q" es correcta (V).**

EJEMPLO 1 **Si Maradona es argentino entonces es aficionado al fútbol. Pero, Maradona no es aficionado al fútbol. Por lo tanto, no es argentino.**

Simbolizando:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maradona es argentino} & = p \\ \text{Maradona es aficionado al fútbol} & = q \end{array}\right\} \; [(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow \sim q$$

La tabla de verdad es:

p	q	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(\sim q)]$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Son premisas : $(p \rightarrow q)$, $\sim q$

La conclusión es : $\sim p$

Como resultado es una TAUTOLOGÍA, la conjunción de premisas implica a la conclusión, por lo tanto la inferencia es válida.

EJEMPLO 2 Como es hora de clases, se concluye que en el aula hay profesores y alumnos, dado que, si es hora de clases, en el aula hay profesores, y hay alumnos si en el aula hay profesores.

Simbolización:
Tener en cuenta que después del término "dado que" viene el ANTECEDENTE de la condicional que se formará.

Sean las proposiciones simples:
Es hora de clases $= p$
En el aula hay profesores $= q$
En el aula hay alumnos $= r$

1) El ANTECEDENTE está formado por la conjunción de las siguientes proposiciones:
$$(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$$
2) El consecuente o conclusión es: $q \wedge r$
3) La inferencia será: $[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p] \to [q \wedge r]$
4) Al desarrollar en una TABLA DE VERDAD resultará una TAUTOLOGÍA, lo cual indicará que la inferencia es válida.

EJEMPLO 3 "Si Juan participa en un comité electoral de la universidad entonces los estudiantes se enojarán de él, y si no participa en un comité electoral de la universidad entonces las autoridades universitarias se enojaran con él. Pero, Juan participará en un comité electoral de la universidad o no participará. Por lo tanto, los estudiantes o las autoridades universitarias se enojarán con él".

Simbolización:

1) Sean las proposiciones simples:
Juan participará en un comité electoral $= p$
Los estudiantes se enojaran con él $= q$
Las autoridades universitarias se enojarán con Juan $= r$

2) Formalizando el enunciado teneos:
a) Las premisas son: $(p \to q) \wedge (\sim p \to r) \wedge (p \vee \sim p)$
b) La conclusión es: $q \vee r$

3) La inferencia será: $[(p \to q) \wedge (\sim p \to r) \wedge (p \vee \sim p)] \to [q \vee r]$

Al desarrollarse en una TABLA DE VERDAD, obtendremos una TAUTOLOGÍA, lo cual indica que la inferencia es válida.

EJEMPLO 4 "Si Anito decía la verdad, entonces Sócrates corrompía a la juventud y si el tribunal lo condenó equivocadamente, entonces Anito no es el culpable. Pero, Sócrates no corrompía a la juventud o Anito es el culpable. Por lo tanto Anito no decía la verdad o el tribunal no condenó a Sócrates equivocadamente".

Simbolización:

1) Sean las proposiciones simples:

p = Anito decía la verdad.
q = Sócrates corrompía a la juventud.
r = El tribunal condenó equivocadamente a Sócrates.
s = Anito es el culpable.

2) La formalización del esquema molecular será:

$$[(p \to q) \wedge (r \to \sim s) \wedge (\sim q \vee s)] \to [\sim p \vee \sim r]$$

1.17.1 EL METODO ABREVIADO

El desarrollo de la tabla de valores de la inferencia $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$ resulta muy laborioso cuando se desea saber su validez. Para evitar este engorroso y laborioso trabajo se utiliza un MÉTODO ABREVIADO de fácil manejo y de gran precisión.

El MÉTODO ABREVIADO, consiste en analizar la única posibilidad de ser FALSO la condicional: $p \to q$

$$\begin{array}{ccc} p & \to & q \\ V & & F \\ & F & \end{array}$$

Como podemos apreciar, la condicional es F sólo cuando el antecedente es V y el consecuente es F.

La validez de la condicional: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$

Se analiza siguiendo los siguientes pasos:

1° Asignar el valor de V (verdadero) a cada una de las premisas p_i y de F (falso) a la conclusión.
Como el antecedente es una conjunción de n premisas y es V, entonces cada premisa p_i necesariamente será verdadero.

Así tendremos:

$$\underbrace{(\underset{V}{p_1} \wedge \underset{V}{p_2} \wedge \underset{V}{p_3} \wedge \ldots\ldots \wedge \underset{V}{p_n})}_{V} \overset{F}{\rightarrow} \underset{F}{q}$$

2° Deducir el valor de cada una de las variables proposicionales, teniendo en cuenta las reglas para $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, Δ, $\sim$ que se pueden presentar en cada premisa.

LA DECISIÓN

3° Si cada una de las variables proposicionales tiene UN SOLO VALOR, entonces la inferencia no es válida. Es decir no hay implicación puesto que la conjunción de premisas es V y la conclusión es F.

4° Si una variable proposicional llega a tener DOS VALORES A LA VEZ (V y F), entonces quedará demostrado que no es posible que la conjunción de premisas sea V, y la conclusión F. Por lo tanto, hay implicación y la inferencia es válida.

EJEMPLO 5

1) Analizar la inferencia del EJEMPLO 4

$$[\underbrace{(\overset{V}{p} \rightarrow \overset{V}{q})}_{V} \wedge \underbrace{(\overset{V}{r} \rightarrow \overset{V}{\sim s})}_{V} \wedge \overset{V}{\underbrace{(\overset{F}{\sim q} \vee \overset{F}{s})}_{V}}] \rightarrow [\overset{V}{\underbrace{\overset{F}{\sim p} \vee \overset{F}{\sim r}}_{F}}]$$

Analicemos:

1° Asignar F a la conclusión $\underbrace{\overset{F}{\sim p} \vee \overset{F}{\sim r}}_{F}$ y V a cada premisa.

2° Deducir el valor de p , q , r , s a partir de los valores, que ya se tiene en la conclusión $\sim p \vee \sim q$ y en la premisa $p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim s$, $\sim q \vee s$.

Se empieza, por la conclusión $\sim p \vee \sim r$.

Si $\sim p \vee \sim r$ es F, entonces $\sim p$ es F y $\sim r$ es F. Ahora, si $\sim p$ es F entonces $\boxed{p \text{ es } V}$; de manera similar, si $\sim r$ es F entonces $\boxed{r \text{ es } V}$.

Con los valores de p y r , se analiza la validez de cada premisa.

p_1 $\quad p \rightarrow q$

$\quad$ V $\quad$ V

$\quad$ V

• Ya tenemos que p es V . Como $p \rightarrow q$ es V, entonces $\boxed{q \text{ es V}}$

p_2 $\quad r \rightarrow \sim s$

$\quad$ V $\quad$ V

$\quad$ V

• Ya tenemos que r es V. Como $r \rightarrow \sim s$ es V, entonces $\sim s$ es V y en consecuencia. $\boxed{s \text{ es } F}$.

p_3 $\quad \sim q \vee s$

$\quad$ F $\quad$ F

$\quad$ V

• En p_1 hemos obtenido: $\boxed{q \text{ es V}}$ y en p_2 se obtuvo que $\boxed{s \text{ es V}}$. Como "$\sim q \vee s$" es V y $\sim q$ es F , entonces $\boxed{s \text{ es V}}$

3° $\boxed{p \text{ es V}}$, $\boxed{q \text{ es V}}$, $\boxed{s \text{ es F y V}}$

$\uparrow$

contradicción

4° Hemos hallado una contradicción: $\boxed{s \text{ es F}}$ y $\boxed{s \text{ es V}}$. Esta contradicción nos indica que la condicional

$$\underbrace{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim s) \wedge (\sim q \wedge s)]}_{m} \xrightarrow{F} \underbrace{[\sim p \vee \sim r]}_{n}$$

no es FALSO, sino verdadero.

Esto es "m implica n". Dicho de otra manera: de las premisas $p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim s$ y $\sim q \wedge s$ se ha inferido $\sim p \vee \sim r$.

EJEMPLO 6 Analizar la inferencia de EJEMPLO 3

$$[(p \to q) \wedge (\sim p \to r) \wedge (p \vee \sim p)] \to (p \vee r)$$

Solución:

1° Asignar F a la conclusión $p \vee r$ y V a cada premisa $p \to q$, $\sim p \to r$, $p \vee \sim p$.

$$\underset{V}{[(p \to q)} \wedge \underset{V}{(\sim p \to r)} \wedge \underset{V}{(p \vee \sim p)]} \to \underset{F}{(p \vee r)}$$

2° Hallar los valores de p , r , q , teniendo en cuenta los valores de la conclusión y de las premisas.

Veamos:

Si la conclusión " $\underset{F}{p} \underset{F}{\vee} \underset{F}{r}$ " es F entonces

$\boxed{p \text{ es F}}$ y $\boxed{r \text{ es F}}$, porque tenemos una disyunción.

Ahora analicemos cada premisa.

En p_1 : $\underset{F}{p} \underset{V}{\to} q$ • Si p es F y $p \to q$ es V, entonces q puede ser $\boxed{\text{V o F}}$

En p_2 : $\underset{V}{\sim p} \underset{V}{\to} \underset{V}{r}$ • Como p es F , entonces $\sim p$ es V . Ahora, si $\sim p$ es V y $\sim p \to r$ es V, entonces $\boxed{r \text{ es V}}$

En p_3 : $\underset{F}{p} \underset{V}{\vee} \underset{V}{\sim p}$ • Si p es F y $p \vee \sim p$ es V, entonces $\sim p$ es V. Aquí, hay compatibilidad.

3° $\boxed{p \text{ es } F}$, $\boxed{r \text{ es } F}$, $\boxed{q \text{ es V o F}}$

4° En p_1 , existe contradicción. Por lo tanto, la inferencia dada es válida.

EJEMPLO 7 Analizar la validez de la siguiente inferencia.

$$[(\sim p \leftrightarrow (\sim p \vee r)) \;\wedge\; (r \rightarrow s)] \;\rightarrow\; [s \rightarrow \sim p]$$

Solución:

1º Asignar F a la conclusión: $s \rightarrow \sim p$ y V a cada premisa $(\sim p \leftrightarrow (\sim p \vee r)$, $r \rightarrow s$.

$$\left[\underset{V}{(\sim p \leftrightarrow (\sim p \vee r))} \;\wedge\; \underset{V}{(r \rightarrow s)}\right] \;\rightarrow\; \underset{F}{\left[s \rightarrow \sim p\right]}$$

2º Hallar los valores de s , p , r .

Empezamos por la conclusión:

Si $\underset{F}{s \rightarrow \sim p}$ es F , entonces $\boxed{s \text{ es V}}$ y $\sim p$ es F .

Luego , $\boxed{p \text{ es V}}$

Ahora, analicemos cada premisa:

$p_1)$ $\underset{F}{\sim p} \;\underset{V}{\leftrightarrow}\; \underset{F}{(\underset{F}{\sim q} \vee \underset{F}{r})}$

- Tenemos p es V , entonces $\sim p$ es F.
  Si $\sim p$ es F y la bicondicional es V, entonces $(\sim p \vee r)$ es F.

Ahora, si $\sim p \vee r$ es F entonces $\boxed{\sim p \text{ es } F}$ y $\boxed{r \text{ es } F}$.

Aquí, hay compatibilidad.

$p_2)$ $\underset{F}{r} \;\underset{V}{\rightarrow}\; \underset{V}{s}$

- Hasta ahora, tenemos s es V y r es F.
  Si s es V y $r \rightarrow s$ es V , entonces r es V o F . Por p_1 se obtuvo que r es F ; por lo tanto, el único valor de $\boxed{r \text{ es F}}$.

3º $\boxed{s \text{ es V}}$, $\boxed{p \text{ es V}}$, $\boxed{r \text{ es } F}$

4º Porque los valores de cada variable son únicos, afirmamos que la **inferencia no es válida.**

1.17.2 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

En la demostración de muchos teoremas y otras proposiciones que se presentan en el álgebra y en el ANÁLISIS (análisis real, topología, geometría, etc.) se aplican ordenadamente los pasos lógicos agotando todas las premisas (antecedentes o hipótesis) para verificar la conclusión (consecuente o tesis).

1.18 Hay dos métodos para demostrar una PROPOSICIÓN

(1) MÉTODO DIRECTO DE DEMOSTRACIÓN

Consiste en utilizar la validez de la inferencia de la forma:

$$\boxed{\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \cdots \wedge p_n}_{\text{premisas}} \rightarrow \underbrace{q}_{\text{conclusión}}} \quad \text{—— (I)}$$

En esta forma de demostración, se utilizan todas las premisas p_i, paso a paso, hasta verificar la conclusión q.

(2) MÉTODO POR REDUCCIÓN AL ABSURDO (O MÉTODO INDIRECTO)

Este método consiste en negar la conclusión q y considerarla como premisa, luego se trata de inferir válidamente la NEGACIÓN de alguna de las premisas p_i del conjunto $\{p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n\}$.

Es decir, se construye y se verifica la validez de la siguiente inferencia:

$$\text{(II) ——} \quad \Big[\overbrace{(\sim q) \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n}^{\text{premisas}}\Big] \rightarrow \overbrace{\sim p_i}^{\text{conclusión}}$$

--- Negación de la conclusión (es decir, negación de la tesis)

---Negación de una de las premisas

Para ambos métodos, si la conclusión se deduce correctamente del conjunto de premisas, la inferencia es válida (o también se dice que el conjunto de premisas implica a la conclusión, o la conclusión es consecuencia lógica del conjunto de premisas).

Pero, si la conclusión no se deduce correctamente del conjunto de premisas, entonces la inferencia no es válida.

Observación: El esquema lógico (II) es equivalente al esquema lógico (I)

Probemos: $[(\sim q) \wedge p_1 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n] \rightarrow \sim p_2$

$\equiv \sim\left[(\sim q) \wedge p_1 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n\right] \vee \sim p_2$ (se ha aplicado: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$)

$\equiv \left[q \vee \sim(p_1 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots p_n)\right] \vee \sim p_2$ (por ley de Morgan)

$\equiv q \vee \left[\sim(p_1 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \vee \sim p_2\right]$ (Propiedad asociativa)

$\equiv q \vee \left[\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \wedge p_n)\right]$ (por ley de Morgan)

$\equiv \left[p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n\right] \rightarrow q$

EJEMPLO 1 Por los dos métodos: Directo e indirecto comprobar la validez de la siguiente inferencia lógica o argumento lógico.

$$\left[\sim p \wedge (p \vee q)\right] \rightarrow q$$

a) MÉTODO DIRECTO

$\left[\sim p \wedge (p \wedge q)\right] \rightarrow q$

$\equiv \sim\left[\sim p \wedge (p \wedge q)\right] \vee q$

$\equiv \left[p \vee \sim(p \wedge q)\right] \vee q$

$\equiv p \vee \left[q \vee \sim(p \wedge q)\right]$

$\equiv \underbrace{(p \vee q) \vee \sim(p \wedge q)}$

$\equiv$ V

$\equiv$ TAUTOLOGIA

b) MÉTODO INDIRECTO.

Negar la conclusión y considerarlo como premisa.

Negar la premisa "$\sim p$" y considerarlo como conclusión.

$\left[\sim q \wedge (p \wedge q)\right] \rightarrow p$

$\equiv \sim\left[\sim q \wedge (p \wedge q)\right] \vee p$

$\equiv \left[q \vee \sim(p \wedge q)\right] \vee p$

$\equiv q \vee \left[p \vee \sim(p \wedge q)\right]$

$\equiv (q \vee p) \vee \sim(p \wedge q)$

$\equiv \underbrace{(p \vee q) \vee \sim(p \wedge q)}$

$\equiv$ V

$\equiv$ TAUTOLOGÍA

EJEMPLO 2 Probar que el número $\sqrt{2}$ no es racional.

La prueba es por el MÉTODO POR REDUCCIÓN AL ABSURDO.

1) Suponer que $\sqrt{2}$ es racional.
2) Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces **existen dos números enteros *m* y *n* primos entre sí**, tal que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
3) Si $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$ .... (3*)
4) Como $m^2 = 2n^2$, con n entero; entonces m^2 es par, también m será par.
5) Como m es par $\Rightarrow$ m es de la forma $\boxed{m = 2K}$ para algún entero K.
6) Remplazar el valor $m = 2K$ en (3*): $(2K)^2 = 2n^2 \Rightarrow 2n^2 = 4K^2$
   $\Rightarrow n^2 = 2K^2$
7) Como $n^2 = 2K^2 \Rightarrow n^2$ es par, también n será par.
8) Como n es par $\Rightarrow$ n es de la forma $\boxed{n = 2\ell}$ para algún entero ℓ.
9) Por 5) y 8) tenemos: $m = 2K$ y $n = 2\,\ell$, lo cual indica que ***m* y *n* tienen como factor común al número 2**. Esto contradice a la hipótesis auxiliar del paso 2) donde dijimos que ***m* y *n* eran enteros primos entre sí**.

   NOTA: Si m y n son primos entre sí significa que no tienen factores comunes, excepto la unidad.
10) La contradicción se presenta porque en el paso 1) hemos supuesto que $\sqrt{2}$ es racional.
11) **CONCLUSIÓN:** Por tanto $\sqrt{2}$ no es racional.

1.19 PRINCIPALES LEYES LÓGICAS O TAUTOLOGÍAS

En la lógica existen los llamados "PRINCIPIOS LÓGICOS" o "LEYES LÓGICAS" que vienen a ser FORMAS PROPOSICIONALES TAUTOLÓGICAS de carácter general. A partir de las "leyes lógicas" se pueden generar otras tautologías y a la vez cualquier tautología se puede reducir a una de las "leyes lógicas".

Las principales leyes lógicas las podemos clasificar en tres grupos:

Grupos $\begin{cases} \text{Leyes lógicas clásicas.} \\ \text{Equivalencias notables.} \\ \text{Implicaciones notables.} \end{cases}$

(I) LOS TRES PRINCIPIOS LÓGICOS CLÁSICOS

C.1 : LEY DE IDENTIDAD **(REFLEXIVIDAD)**

$$\boxed{\begin{array}{c} p \to p \\ p \leftrightarrow p \end{array}}$$

"Una proposición solo es idéntica a sí mismo"

C.2 : LEY DE NO CONTRADICCIÓN

$$\boxed{\sim (p \wedge \sim p)}$$

"Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez"

C.3 : LEY DE TERCIO EXCLUIDO

$$\boxed{p \vee \sim p}$$

"Una proposición o es verdadera o es falsa, no hay una tercera posibilidad"

(II) EQUIVALENCIAS NOTABLES

E_1 : LEY DE LA DOBLE NEGACIÓN (INVOLUCIÓN)

$$\boxed{\sim (\sim p) \equiv p}$$

"La negación de la negación es una afirmación"

E_2 : LA IDEMPOTENCIA

a) $p \wedge p \equiv p$

b) $p \vee p \equiv p$

En general: $p \wedge p \wedge p \wedge \ldots \wedge p \equiv p$

$p \vee p \vee p \vee \ldots \vee p \equiv p$

Las variables redundantes en una cadena de conjunciones o en una cadena de disyunciones, se eliminan.

E_3 : LEYES CONMUTATIVAS

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
b) $p \vee q \equiv q \vee p$
c) $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

"La conjunción, la disyunción y la bicondicional de dos proposiciones son conmutativas"

E_4 : LEYES ASOCIATIVAS

a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
b) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
c) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

E_5 : LEYES DISTRIBUTIVAS

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
c) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
d) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

E_6 : LEYES DE De MORGAN

a) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
b) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

E_7 : LAS LEYES DEL CONDICIONAL

a) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
b) $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

E_8 : LAS LEYES DEL BICONDICIONAL

a) $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
b) $(p \leftrightarrow q) \equiv \sim[(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)]$
$\equiv \sim(p \,\Delta\, q)$

Donde: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$

$\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}] \vee [\underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \vee (q \wedge p)]$

$\equiv [\sim(p \vee q)] \vee [p \wedge q)] \quad \equiv \sim[(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)]$

$\equiv \sim(p \,\Delta\, q)$

E_9 : LEYES DE LA ABSORCIÓN

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
b) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$
c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
d) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

E_{10} : **LEYES DE TRANSPOSICIÓN**

a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$
b) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim q \leftrightarrow \sim p)$

E_{11} : LEYES DE EXPORTACIÓN

a) $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
b) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \rightarrow r \equiv [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_{n-1})] \rightarrow (p_n \rightarrow r)$

E_{12} : ELEMENTOS NEUTROS PARA LA CONJUNCIÓN Y DISYUNCIÓN

Si V = VERDADERO (tautología) y F = FALSO (contradicción)

a) $p \wedge \mathrm{V} \equiv p$	"V" es el neutro de la conjunción
b) $p \vee \mathrm{F} \equiv p$	"F" es el neutro de la disyunción

(III) IMPLICACIONES NOTABLES

Las implicaciones notables se pueden escribir de dos formas: en forma horizontal y en forma vertical.

a) FORMA HORIZONTAL.- Cuando la conjunción de premisas que implican a la conclusión $\boxed{p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q}$ se escriben horizontalmente en forma explícita usando los conectivos: $\wedge , \rightarrow$

b) FORMA VERTICAL (FORMA CLÁSICA).- En este caso no se escriben, en forma explícita los conectivos: $\wedge$, $\rightarrow$. La conjunción de premisas se escriben verticalmente uno después de otra y al término de la última premisa se escribe una raya horizontal y tres puntos para luego escribir la conclusión. El razonamiento es "si ocurren $p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n$; por tanto ocurre q".

$$\boxed{\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}}$$

I_1 : LEY DE MODUS PONENS

$$\boxed{[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q}$$

Forma clásica: $\boxed{\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore \ q \end{array}}$

Esta ley indica:
Si se afirma el antecedente de una premisa condicional, se concluye en la afirmación del consecuente.
Son premisas: $p \rightarrow q$, p
la conclusión : p

Ejemplo:

"Si 2 es divisor de 4 , entonces 2 es divisor de 4^3
"2 es divisor de 4"

Por tanto: "2 es divisor de 4^3

I_2 : LEY DEL MODUS TOLLENS

$$\boxed{[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p}$$

Forma clásica: $\boxed{\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \ \sim q \end{array}}$

Esta ley indica:
Si se niega el consecuente de una premisa condicional, se concluye en la negación del antecedente".

Ejemplo:

"Si Jorge estudió entonces aprobó Matemáticas"
Jorge no aprobó Matemáticas

Luego: "Jorge no estudió"

I_3: **LEY DEL SILOGISMO DISYUNTIVO**

$$\boxed{[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q}$$

o $\boxed{[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p}$

Forma clásica:
$$\boxed{\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ \therefore\ q \end{array}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore\ p \end{array}}$$

Está ley afirma: **"Si se niega uno de los miembros de una premisa disyuntiva, se concluye en la afirmación del otro miembro"**

Ejemplo:

"*x* es número par o múltiplo de 5"
"*x* no es par"

∴ "*x* es múltiplo de 5"
↑
Se lee "por lo tanto"
"luego"

I_4: **LEY DE LA INFERENCIA EQUIVALENTE**

$$\boxed{[(p \leftrightarrow q) \wedge p] \rightarrow q}$$

Forma clásica:
$$\boxed{\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ \underline{p \quad\quad} \\ \therefore\ \ q \end{array}}$$

Esta ley indica: "Si uno de los miembros de la premisa bicondicional es verdadero, entonces el otro miembro es verdadero"

Ejemplo:

"*a* es u número primo, si y sólo si es múltiplo de 1 y de *a*"
"es múltiplo de *a* y de 1"

∴ "*a* es número primo"

I_5 : LEY DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO

$$\boxed{[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)}$$

Forma clásica:

$$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Esta ley indica que el condicional es transitivo.

Ejemplo:

" si 3 es menor que 5 "
" 5 es menor que 8 "

Luego: "3 es menor que 8".

I_6 : LEY DE LA TRANSITIVIDAD SIMÉTRICA

$$\boxed{[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \to (p \leftrightarrow r)}$$

Forma clásica:

$$\begin{array}{r} p \leftrightarrow q \\ q \leftrightarrow r \\ \hline \therefore p \leftrightarrow r \end{array}$$

Esta ley indica que la bicondicional es transitivo.

Ejemplo:

" 2 divide a x , si y sólo si x es par"
" x es par, si y sólo si es múltiplo de 2"

$\therefore$ "2 divide a x , si y sólo si x es múltiplo de 2"

I_7 : LEY DE LA SIMPLIFICACIÓN

De una premisa conjuntiva se puede concluir en cualquiera de sus miembros.

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \wedge q) \to p \\ \text{o} \quad (p \wedge q) \to q \end{array}}$$

Forma clásica:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Ejemplo:

"Juan y Manuel son menores de edad", por lo tanto, "Juan es menor de edad".

I_8 : LEY DE ADICIÓN

Una disyunción está implicada por cualquiera de sus miembros.

$$\boxed{\begin{array}{c} p \to (p \vee q) \\ \text{o} \quad q \to (p \vee q) \end{array}} \qquad \text{Forma clásica: } \boxed{\dfrac{p}{\therefore p \vee q}} \text{ ó } \boxed{\dfrac{q}{\therefore p \vee q}}$$

Ejemplo:

"Ricardo Palma escribió Tradiciones Peruanas", por lo tanto, "escribió Tradiciones Peruanas" o "fue un gran poeta".

I_9 : LEY DEL ABSURDO

a) $[p \to (q \wedge \sim q)] \to \sim p$

b) $[\sim p \to (q \wedge \sim q)] \to p$

RESUMEN

Para efectuar una buena simplificación en el álgebra proposicional, tener en cuenta las siguientes leyes lógicas:

N_1) $\sim V \equiv F$

N_2) $\sim F \equiv V$

N_3) $\sim(\sim p) \equiv p$

C_1) $p \wedge p \equiv p$

C_2) $p \wedge F \equiv F$

C_3) $p \wedge V \equiv p$

C_4) $p \wedge (\sim p) \equiv F$

C_5) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

C_6) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

C_7) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

D_1) $p \vee p \equiv p$

D_2) $p \vee F \equiv p$

D_3) $p \vee V \equiv V$

D_4) $p \vee \sim p \equiv V$

D_5) $p \vee q \equiv q \vee p$

D_6) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

D_7) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

I_1) $p \to q \equiv \sim p \vee q$

I_2) $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

I_3) $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

B_1) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$p \leftrightarrow q \equiv \sim (p \,\Delta\, q)$

B_2) $p \,\Delta\, q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

$\equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

$\equiv \sim (p \leftrightarrow q)$

A_1) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

A_2) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

A_3) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

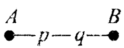
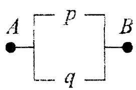
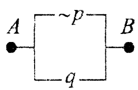
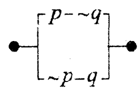
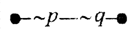
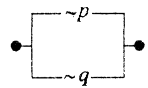
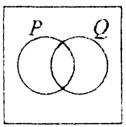
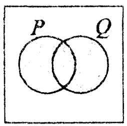
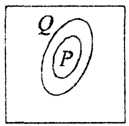
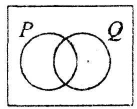
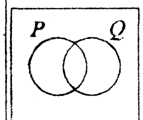
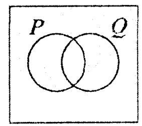
A_4) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

M_1) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

M_2) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

1.20 RESUMEN (lógica – circuitos lógicos – conjuntos)

TABLA DE VERDAD

	CONJUNCIÓN	DISYUNCIÓN INCLUSIVA	CONDICIONAL	BICONDICIONAL	DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O FUERTE	NEGACIÓN CONJUNTIVA	INCOMPATIBILIDAD DE DOS PROPOSICIONES. "NEGACIÓN ALTERNATIVA"
Se lee :	"p y q"	"p o q"	"p sólo si q" "si p entonces q" "q, si p"	"p si y sólo si q"	"p o q, pero no ambos" "o p ; o q"	"ni p , ni q "no p y no q"	"no p" o "no q"
$p \quad q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$ $\equiv \sim p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$p \,\Delta\, q$ $\equiv\sim(p\leftrightarrow q)$ $\equiv(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$ $\equiv(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)$	$p \downarrow q$ $\equiv\sim(p\vee q)$ $\equiv\sim p\wedge\sim q$	$p \mid q$ $\equiv\sim(p\wedge q)$ $\equiv\sim p\vee\sim q$
V V V F F V F F	V F F F	V V V F	V F V V	V F F V	F V V F	F F F V	F V V V
CIRCUITOS LÓGICOS	 EN SERIE	 EN PARALELO					
OPERACIONES CON CONJUNTOS · INTERSECCIÓN · UNIÓN · INCLUSIÓN · DIFERENCIA SIMÉTRICA	 $P \cap Q$ INTERSECCIÓN	 $P \cup Q$ UNIÓN	 $P \subset Q$ INCLUSIÓN	$P = Q$ $\leftrightarrow P\subset Q \wedge Q \subset P$ IGUALDAD	 $P \,\Delta\, Q$ $(P-Q)\cup(Q-P)$ $(P\cup Q)-(P\cap Q)$ $(P\cap Q')\cup(Q\cap P')$ DIFERENCIA SIMÉTRICA	 $(P\cup Q)'$ $P'\cap Q'$ COMPLEMENTO DE LA UNIÓN	 $(P\cap Q)'$ $P'\cup Q'$ COMPLEMENTO DE LA INTERSECCIÓN

1.20.1 CONDICIÓN NECESARIA Y CONDICION SUFICIENTE

Para formalizar la demostración de muchas proposiciones, en matemáticas, a menudo se presentan formas condicionales de:

$p \rightarrow q$ se lee "si p, entonces q"

ó $q \rightarrow p$ se lee "si q, entonces p"

El proceso de demostración consiste en probar si $p \rightarrow q$ es verdadera o $q \rightarrow p$ es verdadera, o que ambas condicionales son verdaderas.

Para ello, si tenemos dos proposiciones p y q, se fija una de ellas, digamos $\boxed{p}$; luego se prueba la validez de las proposiciones condicionales: $\boxed{p} \rightarrow q$ y $q \rightarrow \boxed{p}$.

De esta prueba, se pueden obtener alguno de los siguientes resultados:

1) Si: $\boxed{p} \rightarrow q$ es **VERDADERO**, diremos que $\boxed{p}$ es **CONDICIÓN SUFICIENTE** para q.

2) Si $q \rightarrow \boxed{p}$ es **VERDADERO**, diremos que $\boxed{p}$ es **CONDICIÓN NECESARIA** para q.

3) Si $\boxed{p} \rightarrow q$ es VERDADERA $\wedge$ $q \rightarrow \boxed{p}$ es VERDADERA; entonces decimos que $\boxed{p}$ es CONDICIÓN NECESARIA y SUFICIENTE para q.

Es el 3^{er} caso, donde se usa la notación: $p \leftrightarrow q$ para indicar que p es C N. y C S. para q o también se dice "p si y sólo si q".

PROBLEMAS:

(1) Indicar en cuáles de los siguientes casos es p condición suficiente para q; en cuáles es p condición necesaria y suficiente para q.

a) p : a es múltiplo de 4
q : a es número par

b) p : a y b son números pares
q : $a + b$ es par.

PRUEBA DE a)

1. Fijemos la proposición $\boxed{p}$: "a es múltiplo de 4"
2. Luego a es la forma de $a = 4n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
3. Pero $a = 4n = 2\underbrace{(2n)}$

   $q:\ a = 2K$ ← indica que a es par.

4. Es decir, la condicional $\boxed{p} \longrightarrow q$ es VERDADERO. Por lo tanto, afirmamos que p es CONDICIÓN SUFICIENTE para q.
5. ¿Será verdadero $q \longrightarrow \boxed{p}$?

   Es decir si a es par ¿implica que "a" es múltiplo de 4?

   Veamos:

6. Si a es par, entonces tiene la forma $a = 2n \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
7. Como n es un entero cualquiera, puede ser par $(n = 2K)$, pero también puede ser impar $(n = 2K + 1)$.
8. Cuando $p : a = 2\,(2K) = 4K$, no hay ningún problema, pero si

   $p : a = 2\,(2K + 1) = 4K + 1 = 4\,K + 2$ no es múltiplo de 4.

9. Luego, la condicional $q \longrightarrow \boxed{p}$ será falso.

   $$\underbrace{\overset{V}{q} \longrightarrow \overset{F}{\boxed{p}}}_{F}$$

10. Por tanto, $\boxed{p}$ no es condición necesaria para q.

PRUEBA DE b)

1. Fijemos $\boxed{p}$: a y b son pares
2. Luego: $a = 2n \quad \wedge \quad b = 2n$.
3. La suma $q : a + b = 2\,(n + m)$ es par.
4. **Por tanto,** $\boxed{p} \longrightarrow q$ es verdadero.
5. En consecuencia $\boxed{p}$ es C.S. para q.
6. ¿Será verdadero la condicional $q \longrightarrow \boxed{p}$?

Veamos:

7. $q: a+b=2n$ es par $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

8. Que la suma $a+b$ sea número par indica que a y b sean pares, pero también pueden ser impares, digamos:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2K+1 \\ b &= 2m+1 \end{aligned}\right\} a+b = 2\,(K+m+1)$$

Un ejemplo particular: si $a+b=\mathbf{8}$, pueden ser $a=5$, $b=3$

9. Por tanto, $\underbrace{\underset{V}{q} \longrightarrow \underset{F}{\boxed{p}}}_{F}$ es F.

10. **En** consecuencia, $\boxed{p}$ **no es C.N. para** q.

(2) Dado el conectivo lógico * definido por la siguiente tabla de **verdad:**

pq	$p*q$
VV	V
VF	F
FV	V
FF	F

Analizar la verdad o falsedad de las **siguientes proposiciones**:

(a) $q \equiv V$ es **condición necesaria** o suficiente **para que** $(p*q) \equiv V$

(b) $\sim p*\left[(p \wedge q)*(r \wedge s)\right] \equiv r \wedge s$

(c) Es falso que $(p \to q) \equiv F$ sea condición **necesaria y suficiente para** $p*q \equiv F$.

(3) "**Para** que una matriz **tenga inversa es necesario** que su determinante **sea diferente de** cero".
¿**Cuáles** de las siguientes **proposiciones** se deduce de ésta? Justifique **lógicamente**. (no se requiere saber de matrices).

a_1) Para que una matriz **tenga inversa** es suficiente que su determinante **sea cero**".

a_2) Para que su determinante sea diferente de cero es suficiente **que la matriz tenga** inversa.

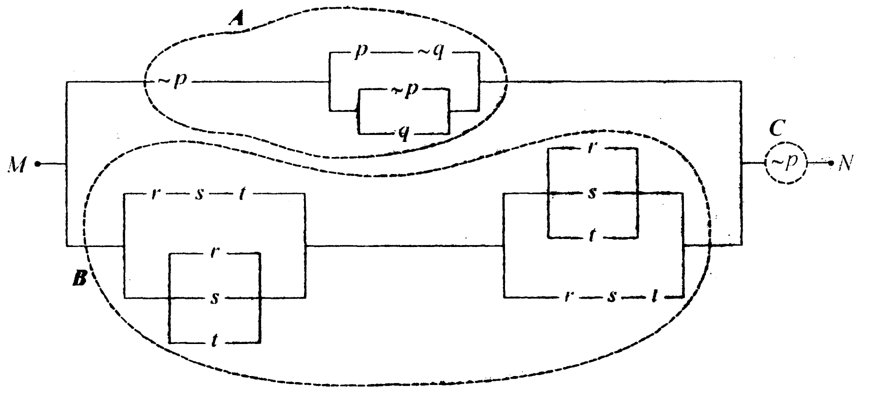
a_3) Para que su determinante sea cero es necesario que la matriz **no tenga inversa.**

a_4) Una matriz tiene inversa sólo si su determinante no es cero.

1.21 PROBLEMAS RESUELTOS

GRUPO I : CIRCUITOS LÓGICOS

(1) Construir el circuito lógico más simple equivalente a:



Solución:

Podemos resolver por bloques:

i) $(A \vee B) \wedge C$

ii) Donde:

A : $\sim p \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)]$

B : $\left[(r \wedge s \wedge t) \vee (r \vee s \vee t)\right] \wedge \left[(r \vee s \vee t) \vee (r \wedge s \wedge t)\right]$

C : $\sim p$

iii) Aplicar propiedades en cada bloque:

A: $\sim p \wedge \left[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)\right] \equiv$

$\equiv \sim p \wedge \left[\underbrace{(p \wedge \sim q) \vee \sim (p \wedge \sim q)}_{T}\right]$

$\equiv \sim p \wedge T \equiv \sim p$

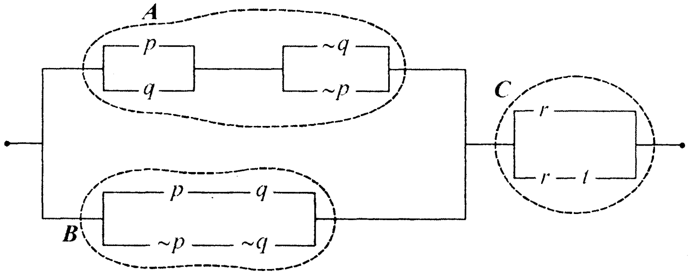
B: $\equiv \left[\underbrace{(r \wedge s \wedge t) \vee (r \vee s \vee t)}\right] \wedge \left[\underbrace{(r \vee s \vee t) \vee (r \wedge s \wedge t)}\right] \equiv$

$\equiv \quad [r \vee s \vee t] \quad \wedge \quad [r \vee s \vee t] \equiv [r \vee s \vee t]$

iv) Remplazar en *i*)

$$(A\vee B)\wedge C\equiv[\sim p\vee(r\vee s\vee t)]\wedge\sim p\ \equiv\sim p \qquad M\bullet\!\!-\!\!-\sim p\,-\!\!-\!\!\bullet N$$

2 Hallar la proposición equivalente más simplificada del siguiente circuito lógico.



Solución:
Resolviendo por bloques

i) $(A\ \vee\ B)\ \wedge\ C$

ii) Donde :

A: $[(p\vee q)\ \wedge\ (\sim q\ \vee\ \sim p)]\equiv[(p\vee q)\ \wedge\ \sim(p\wedge q)]\equiv p\,\Delta\,q$

B: $[(p\wedge q)\ \vee\ (\sim p\ \wedge\ \sim q)]\equiv[(p\wedge q)\ \vee\ \sim(p\vee q)]\equiv\sim[\sim(p\wedge q)\ \wedge\ (p\vee q)]$

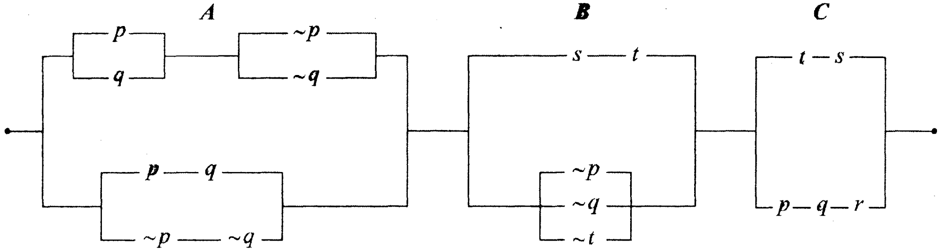
$\equiv\sim(p\,\Delta\,q)$

C: $[\ r\ \vee(r\wedge t)]\equiv r$

iii) **Remplazar** en *i*)

$$(A\vee B)\wedge C\equiv[\underbrace{(p\,\Delta\,q)\vee\sim(p\,\Delta\,q)}_{T}]\wedge r\equiv T\wedge r\equiv r$$

3 Diseñar el circuito lógico más simple equivalente al circuito:



***Solución*:**

Resolver por bloques

i) $A \wedge B \wedge C$

ii) Donde

$$A:\ [(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)]\vee[(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)]$$

$$\equiv [\underbrace{(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)}_{p\,\Delta\, q}]\vee[\underbrace{(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)}]$$

$$\equiv \qquad [p\,\Delta\, q] \qquad \vee\sim[\underbrace{(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)}_{p\,\Delta\, q}]$$

$$\equiv (p\,\Delta\, q)\vee\sim(p\,\Delta\, q)\equiv T$$

$$B:\ (s\wedge t)\ \vee\ (\sim p\vee\sim q\vee\sim t)\equiv(s\wedge t)\vee\sim(p\wedge q\wedge t)$$

$$C:\ (t\wedge s)\ \vee\ (p\wedge q\wedge r)$$

iii) Remplazar en *i*)

$$A\wedge B\wedge C = A\wedge(B\wedge C)\equiv T\wedge(B\wedge C)\equiv B\wedge C$$

Donde:

$$\mathrm{B}\wedge\mathrm{C}\equiv\left[\underline{\underline{(s\wedge t)}}\vee\sim(p\wedge q\wedge t)\right]\wedge\left[\underline{\underline{(s\wedge t)}}\vee(p\wedge q\wedge t)\right]$$

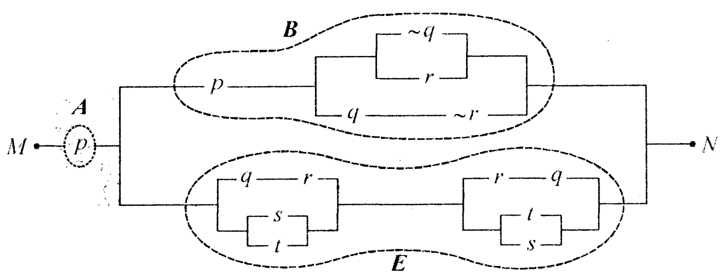
$$\equiv(s\wedge t)\vee[\underbrace{\sim(p\wedge q\wedge t)\wedge(p\wedge q\wedge t)}_{C}]$$

$$\equiv$$

$$\equiv(s\wedge t)\vee C\equiv s\wedge t$$

•— s — t —•

(4) Construir el circuito lógico más simple equivalente a:



***Solución*:**

Resolviendo por bloques:

i) $A \wedge (B \vee E)$

ii) Donde:

A: p

B: $p \wedge [(\sim q \vee r) \vee (q \wedge \sim r)] \equiv p \wedge [\underbrace{(\sim q \vee r) \vee \sim(\sim q \vee r)}_{T}]$

$$\equiv p \wedge T$$

$$\equiv p$$

E: $[(q \wedge r) \vee (s \vee t)] \wedge [(r \wedge q) \vee (t \vee s)] \equiv$

$\equiv [(q \wedge r) \vee (s \vee t)] \wedge [(q \wedge r) \vee (s \vee t)] \equiv [\underbrace{(q \wedge r) \vee (s \vee t)}_{E}]$

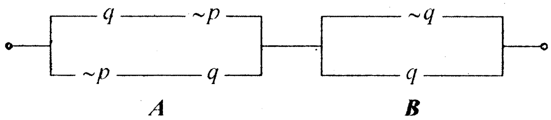
$\equiv$

iii) Reemplazar en *i*)

$A \wedge (B \vee C) \equiv p \wedge [p \vee \mathrm{E}]$

$\equiv p$ $\qquad M \bullet\!\!-\!\!-\!\!-\; p \;-\!\!-\!\!-\!\!\bullet N$

5 **Hallar el circuito más simple equivalente *a*:**



***Solución*:**

Por bloques

i) $A \wedge B$

ii) Donde: $A: (q \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \equiv q \wedge \sim p$

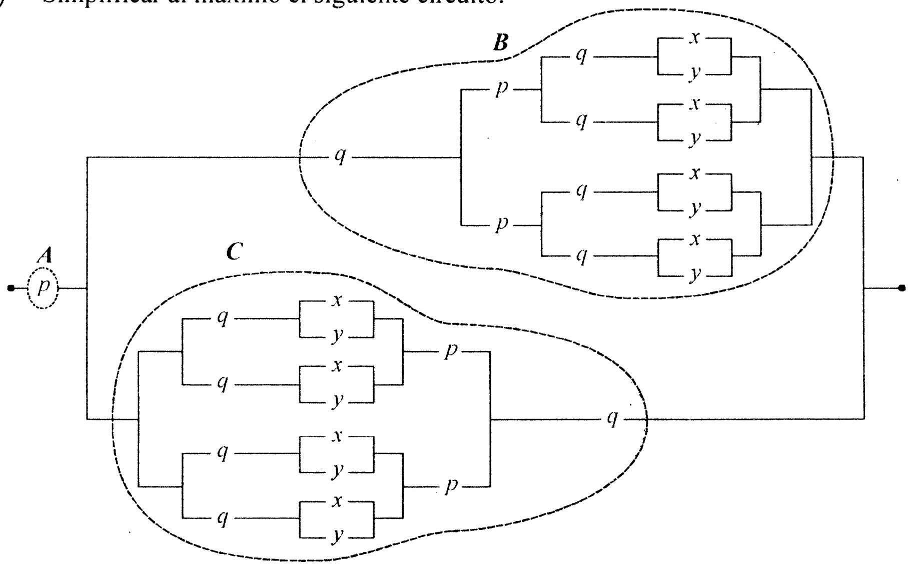
$B: \sim q \vee q \equiv T$

iii) **Remplazar** en *i*)

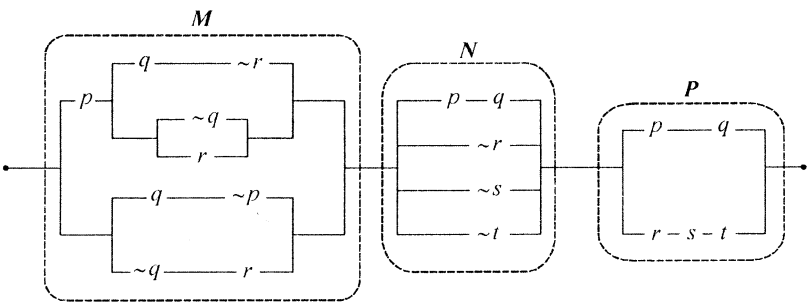
$$A \wedge B \equiv (q \wedge \sim p) \wedge T \equiv q \wedge \sim p$$

$\bullet\!\!-\!\!-\; q \;-\!\!-\; \sim p \;-\!\!-\!\!\bullet$

(6) Simplificar al máximo el siguiente circuito:



Sabiendo que la proposición $(x \vee y)$ es equivalente al circuito:



***Solución*:**

1) Resolver y simplificar el primer circuito por bloques:

i) $A \wedge (B \vee C)$

ii) Donde:

A: p

B: $q \wedge \left\{\left\{ \overbrace{p \wedge \left[\left(q \wedge (x \vee y)\right) \vee \left(q \wedge (x \vee y)\right) \right.}^{\mu} \right] \right\} \vee \left\{ \overbrace{p \wedge \left[\left(q \wedge (x \vee y)\right) \vee \left(q \wedge (x \vee y)\right) \right]}^{\mu} \right\}\right\} \equiv$

$$\equiv q \wedge \left\{ p \wedge \left[\overbrace{\overbrace{\left(q \wedge (x \vee y)\right)}^{z} \vee \overbrace{\left(q \wedge (x \vee y)\right)}^{z}}^{\mu} \right] \right\}$$

$$\equiv q \wedge \left\{ p \wedge \left[\overbrace{\left(q \wedge (x \vee y)\right)}^{z} \right] \right\} \equiv (p \wedge q) \wedge (x \vee y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1*)$$

C: es igual a $\boldsymbol{B}$.

2) Al reemplazar en $i)$ $A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge (B \vee B) \equiv A \wedge B \equiv p \wedge [\,(p \wedge q) \wedge (x \vee y)\,]$

$$\equiv (p \wedge q) \wedge (x \vee y) \ldots\ldots (2*)$$

3) Resolviendo y simplificando el segundo circuito:

i) $x \vee y \equiv M \wedge N \wedge P$

ii) Donde:

M: $\{\, p \wedge [\,(q \wedge \sim r) \vee (\sim q \vee r)\,]\,\} \vee \{\,(q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge r)\,\}$

$$\equiv \{\, p \wedge [\,\underbrace{(q \wedge \sim r) \vee \sim (q \wedge \sim r)}_{T}\,]\,\} \vee \{\,(q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge r)\,\}$$

$$\equiv \underbrace{(p \wedge T)}_{} \vee [\,(q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge r)\,]$$

$$\equiv \quad p \quad \vee [\,(q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge r)\,]$$

$$\equiv [\,\underbrace{p \vee (q \wedge \sim p)}_{}\,] \vee (\sim q \wedge r)$$

$$\equiv \quad [p \vee q] \quad \vee (\sim q \wedge r) \equiv p \vee [\,q \vee (\sim q \wedge r)\,] \equiv p \vee q \vee r$$

N: $[\,(p \wedge q) \vee (\sim r \vee \sim s \vee \sim t)\,] \equiv [\,(p \wedge q) \vee \sim (r \wedge s \wedge t)\,]$

P: $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s \wedge t)$

iii) Reemplazar en *i)*

$X \vee Y \equiv M \wedge N \wedge P$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge [\,\underbrace{(p \wedge q)}_{m} \vee \sim \underbrace{(r \wedge s \wedge t)}_{u}\,] \wedge [\,\underbrace{(p \wedge q)}_{m} \wedge \underbrace{(r \wedge s \wedge t)}_{u}\,]$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (m \vee \sim u) \wedge (m \wedge u)$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \Big[\big(m \wedge (m \wedge u)\big) \vee \underbrace{\big(\sim u \wedge (m \wedge u)\big)}_{F} \Big]$$

falso, porque: $\sim \mu \wedge \mu \equiv F$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \Big[\underbrace{(m \wedge u) \vee F}_{m \wedge u} \Big]$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (m \wedge u)$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \Big[\overbrace{(p \wedge q)}^{m} \wedge \overbrace{(r \wedge s \wedge t)}^{u} \Big]$$

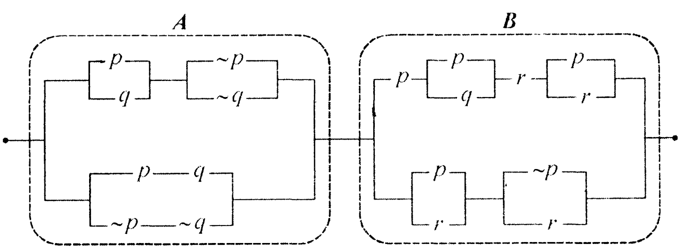
$$\equiv \Big[\underbrace{(p \vee q \vee r) \wedge (p \wedge q)} \Big] \wedge (r \wedge s \wedge t)$$

$$\equiv (p \wedge q) \wedge (r \wedge s \wedge t) \equiv p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \text{ .... } (3*)$$

4) Remplazar (3*) en (2*).

$$(p \wedge q) \wedge (x \vee y) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t)$$
$$\equiv p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$$

(7) Simplificar el siguiente circuito lógico:



***Solución*:**

1) Resolver por bloques

i) $A \wedge B$

ii) Donde:

$$A:\ [(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)]\vee[(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)]\equiv$$

$$\equiv\underbrace{[(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)]}_{p\,\Delta\, q}\vee[(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)]$$

$$\equiv\quad p\,\Delta\, q\qquad\vee\sim\underbrace{[(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)]}_{p\,\Delta\, q}$$

$$\equiv\underbrace{(p\,\Delta\, q)\vee\sim(p\,\Delta\, q)}_{T}$$

$$\boxed{A\equiv T}$$

$$B:\ [p\wedge(p\vee q)\wedge r\wedge(p\vee r)]\vee[(p\vee r)\wedge(\sim p\vee r)]$$

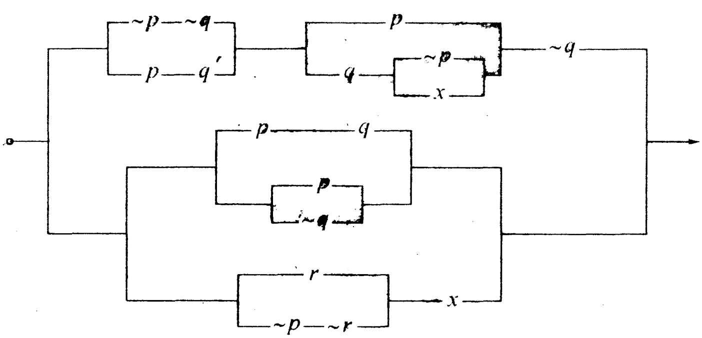
$$\equiv[\underbrace{(p\wedge(p\vee q))}_{p}\wedge\underbrace{(r\wedge(p\vee r))}_{r}]\vee\underbrace{[\underbrace{(p\wedge\sim p)}_{F}\vee r]}_{r}$$

$$\equiv[p\wedge r]\vee r$$

$$B\equiv r$$

) Sustituir en *i*) $\quad A\wedge B\equiv T\wedge r\equiv r$

(8) Hallar la proposición x de manera que sea una tautología el circuito simplificado siguiente:



GRUPO 2: SIMPLIFICACIÓN DE PROPOSICIONES COMPUESTAS

1 Aplicando equivalencias lógicas, simplificar lo más posibles las siguientes proposiciones:

a) $\{[p\to(q\wedge\sim r)]\wedge[p\wedge(q\to r)]\}\vee\{[p\wedge q\wedge(p\vee q)]\vee[r\wedge(\sim r\vee q)\wedge p]\}$

b) $\{[((\sim q\wedge p)\vee(\sim p\wedge q))\vee(p\to r)]\wedge\sim(p\leftrightarrow q)\}\,\Delta\,[q\wedge((t\wedge s)\to q)]$

Solución:

a) $$\{\underbrace{[p\to(q\wedge\sim r)]}_{\sim p\vee(q\wedge\sim r)}\wedge[p\wedge\underbrace{(q\to r)}_{\sim q\vee r}]\}\vee\{[p\wedge q\wedge(p\vee q)]\vee[r\wedge(\sim r\vee q)\wedge p]\}$$

$$\equiv\{\sim[p\wedge\sim(q\wedge\sim r)]\wedge[p\wedge(\sim q\vee r)]\}\vee\{[\underbrace{(p\wedge q)\wedge(p\vee q)}]\vee[\underbrace{(r\wedge(\sim r\vee q))}_{r\wedge q}\wedge p]\}$$

$$\equiv\underbrace{\{\sim[p\wedge\sim(q\wedge\sim r)]\wedge[p\wedge\sim(q\wedge\sim r)]\}}_{\underbrace{\sim t\wedge t}_{F}}\vee\{[\quad p\wedge q\quad]\vee[(r\wedge q)\wedge p]\}$$

$$\underbrace{[p\wedge q]}_{s}\vee[\underbrace{(p\wedge q)}_{s}\wedge r]$$

$$\underbrace{s\vee[s\wedge r]}_{s}$$

$\equiv F\vee s$

$\equiv s\ \equiv\boxed{p\wedge q}$

b) $$\{[\underbrace{((\sim q\wedge p)\vee(\sim p\wedge q))}_{p\,\Delta\,q}\vee\underbrace{(p\to r)}_{\sim p\vee r}]\wedge\underbrace{\sim(p\leftrightarrow q)}_{p\,\Delta\,q}\}\,\Delta\,[q\wedge\underbrace{((t\wedge s)\to q)]}_{\underbrace{q\wedge(\sim(t\wedge s)\vee q)}_{q}}$$

$$\equiv\{\underbrace{[(p\,\Delta\,q)\vee(\sim p\vee r)]\wedge(p\,\Delta\,q)}_{(p\,\Delta\,q)}\}\,\Delta\,q$$

$$\equiv(p\,\Delta\,q)\,\Delta\,q\equiv p\,\Delta\,\underbrace{(q\,\Delta\,q)}_{F}\equiv p\,\Delta\,F\equiv p$$

(2) Sea s una proposición que corresponde a la siguiente tabla : y r la proposición más simplificada, equivalente a $[(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$

¿Cuál es el circuito más sencillo, equivalente al que resulta de conectar en paralelo los circuitos correspondientes a "$\sim r$" y a "s"?

p q	s
V V	F
V F	V
F V	V
F F	F

Solución:

(1) La tabla de verdad a s es : $s \equiv p \,\Delta\, q$

(2)
$$
\begin{aligned}
r &\equiv [(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q \\
&\equiv [(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q \\
&\equiv \{[(\sim p \vee q) \to \sim q] \wedge [\sim q \to (\sim p \vee q)]\} \wedge \sim q \\
&\equiv \{[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim q] \wedge [q \vee (\sim p \vee q)]\} \wedge \sim q \\
&\equiv \{\underbrace{[(p \wedge \sim q) \vee \sim q]} \wedge \underbrace{[q \vee (\sim p \vee q)]}\} \wedge \sim q \\
&\equiv \qquad \sim q \qquad\qquad\qquad q \vee \sim p \\
&\equiv [\underline{\underline{\sim q}} \wedge (q \vee \sim p)] \wedge \underline{\underline{\sim q}} \\
&\equiv \underbrace{(\sim q \wedge \sim q)} \wedge (q \vee \sim p) \\
&\equiv \quad \sim q \quad \wedge (q \vee \sim p) \\
&\equiv \underbrace{(\sim q \wedge q)}_{F} \vee (\sim q \wedge \sim p) \\
&\equiv \sim q \wedge \sim p \equiv \sim (p \vee q)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{r \equiv \sim (p \vee q)}$$

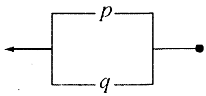
(3) Se pide el circuito más sencillo equivalente al que resulta en conectar en paralelo a "$\sim r$" y "s".

Es decir $\sim r \vee s \equiv \underbrace{\sim[\sim(p \vee q)]}_{p \vee q} \vee \underbrace{s}_{p \,\Delta\, q}$

$\equiv \quad p \vee q \qquad p \,\Delta\, q$

$$\equiv \underbrace{(p\vee q)\vee(p\,\Delta\,q)} \equiv (p\vee q)\vee\left[(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)\right]$$

$$\equiv \quad p\vee q$$



(3) a) Utilizando leyes lógicas, simplificar la siguiente proposición compuesta:

$$A\equiv\left[\sim(p\to q)\to\sim(q\to p)\right]\wedge\left[p\vee q\right]$$

b) Partiendo de la proposición compuesta:

$\left\{p\to\left[p\wedge\sim(q\vee r)\right]\right\}$, llegar a la proposición:

$\sim p\vee(\sim q\wedge\sim r)$ utilizando equivalencias lógicas.

***Solución*:**

a)

$$A\equiv\left[\underbrace{\sim(p\to q)}\to\underbrace{\sim(q\to p)}\right]\wedge\left[p\vee q\right]$$

$$A\equiv\left[(p\wedge\sim q)\to(q\wedge\sim p)\right]\wedge\left[p\vee q\right]$$

$$\equiv\left[\underbrace{\sim(p\wedge\sim q)}\vee(q\wedge\sim p)\right]\wedge\left[p\vee q\right]$$

$$\equiv\left[(\sim p\vee q)\vee(q\wedge\sim p)\right]\wedge\left[p\vee q\right]$$

$$\equiv\left[(q\vee\sim p)\vee(q\wedge\sim p)\right]\wedge\left[p\vee q\right]\equiv(\underline{q\vee}\sim p)\wedge(\underline{q\vee}p)$$

$$\equiv \underline{q\vee}\underbrace{(\sim p\wedge p)}_{F}\equiv q$$

b)

$$\left\{p\to\left[p\wedge\sim(q\vee r)\right]\right\}\equiv$$

$$\equiv\underline{\sim p}\vee\left[p\wedge\sim(q\vee r)\right]$$

$$\equiv\underbrace{(\sim p\vee p)}_{T}\wedge\left[\sim p\vee(\sim q\wedge\sim r)\right]$$

$$\equiv\sim p\vee(\sim q\wedge\sim r)$$

(4) Sea s una proposición que corresponde a la siguiente tabla: y r la proposición más sencilla equivalente a $[(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$.
¿Cuál es el circuito más sencillo, equivalente al que resulta de conectar en paralelo los circuitos correspondientes a $\sim r$ y a s?

p q	t
V V	F
V F	V
F V	V
F F	F

Solución:

1) Se pide hallar el circuito que corresponde a $(\sim r \vee s)$

2) Debo simplificar:

$$r \equiv [(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$$

$$r \equiv [(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$$

Donde:

$$\sim r \equiv \sim \{[(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q\}$$

$$\equiv \underbrace{\sim [(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q]} \vee q$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \Delta \sim q] \vee q$$

$$\equiv \{[(\sim p \vee q) \vee \sim q] \wedge \sim [(\sim p \vee q) \wedge \sim q]\} \vee q$$

$$\equiv \{[\sim p \vee \underbrace{(q \vee \sim q)}_{T}] \wedge \sim [(\sim p \wedge \sim q)]\} \vee q$$

$$\equiv \{\overbrace{\quad T \quad} \wedge \overbrace{\quad p \vee q \quad}\} \vee q$$

$$\equiv (p \vee q) \vee q$$

$$\sim r \equiv p \vee q$$

3) También se puede desarrollar del siguiente modo:

$$r \equiv [(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$$

$$\equiv \{ [\sim(\sim p \vee q) \vee \sim q] \wedge [q \vee (\sim p \vee q)] \} \wedge \sim q$$

$$\equiv \{ [(p \wedge \sim q) \quad \vee \sim q] \wedge [(\sim p \vee q)] \} \wedge \sim q$$

$$\equiv \{ [\underline{(p \wedge \sim q)} \quad \vee \sim q] \wedge \sim \underline{(p \wedge \sim q)} \} \wedge \sim q$$

$$\equiv [\underline{\sim q} \wedge \sim (p \wedge \sim q)] \wedge \underline{\underline{\sim q}}$$

$$\equiv \sim q \wedge \sim (p \wedge \sim q)$$

$$\equiv \sim [q \vee (p \wedge \sim q)]$$

$$\equiv \sim [(q \vee p) \wedge \underbrace{(q \vee \sim q)}_{T}] \equiv \sim (p \vee q)$$

Luego: $\sim r \equiv p \vee q$

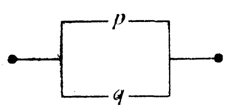
4) Según la tabla por s, corresponde la disyunción exclusiva $p \,\Delta\, q \equiv s$.

5) Reemplazar en 1)

$$\sim r \vee s \equiv (p \vee q) \vee (p \,\Delta\, q)$$

$$\equiv (p \vee q) \vee [(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)]$$

$$\equiv p \vee q$$



[illegible] **Sea la función** $f : \{ \, p / p \text{ es proposición} \} \rightarrow \{ 0 , 1 \}$ definida por:

$$f(p) = \begin{cases} 1 \ , & \text{si } p \text{ es verdadera} \\ 0 \ , & \text{si } p \text{ es falsa} \end{cases}$$

¿Es verdad que $f(p \rightarrow q) = 1 - f(q) \, f(\sim p)$?

Solución:

Hagamos una tabla:

p	q	$p \to q$	$f(p \to q)$	q	$f(q)$	$\sim p$	$f(\sim p)$	$1 - f(q)\, f(\sim p)$
V	V	V	1	V	1	F	1	$1-(1)(1)=0$
V	F	F	0	F	0	F	1	$1-(0)(1)=1$
F	V	V	1	V	1	V	0	$1-(1)(0)=1$
F	F	V	1	F	0	V	0	$1-(0)(0)=1$

No son iguales

Es falso que: $f(p \to q) = 1 - f(q)\, f(\sim p)$

6) Para una proposición cualquiera p se define:

$$\psi(p) = \begin{cases} 1 \;, & \text{si } p \text{ es verdadero} \\ 0 \;, & \text{si } p \text{ es falsa} \end{cases}$$

si $\psi(x) = 1$, $x \equiv (p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \leftrightarrow w)$

$\psi(y) = 0$, $y \equiv w \vee \sim s$

Hallar:

a) $\psi\left[\, (s \leftrightarrow \sim w) \leftrightarrow (\sim p \vee r)\, \right]$

b) $\psi\left[\, \sim(\sim r \to \sim p) \to (t \to (w \wedge \sim p))\, \right]$

Solución:

1) **Debemos hallar el valor de verdad de s, w, p, r; sabiendo dos cosas:**

i) **si $\psi(x) = 1$, entonces x es V**

ii) **si $\psi(y) = 0$, entonces y es $\boxed{F}$**

2) En $\underbrace{y \equiv \overset{F}{w} \vee \overset{F}{\sim s}}_{\boxed{F}}$, luego $\begin{cases} w \text{ es F} \\ \sim s \text{ es F, entonces es } s \text{ es V} \end{cases}$

Es decir: $\boxed{\begin{matrix} w \text{ es F} \\ s \text{ es V} \end{matrix}}$ $\sim w$ es V

3) En $x = \underbrace{(p \wedge \sim s)}_{F} \leftrightarrow \underbrace{(\overset{V}{s} \leftrightarrow \overset{F}{w})}_{F}$

Nota: en $p \leftrightarrow q$;
si q es F , también p es F.
si q es V , también p es V.

Así, hemos hallado que : $\boxed{p \wedge \sim r \text{ es F}}$

Luego : $\underbrace{\sim (p \wedge \sim r)}_{\sim p \vee r}$ será V

4) a) $\psi\, [\overbrace{\underbrace{(\overset{V}{s} \leftrightarrow \overset{V}{\sim w})}_{V} \leftrightarrow \underbrace{(\sim p \vee r)}_{V}}^{m}]$, luego $\boxed{\psi\,(m) = 1}$, porque m es V .

V

b) $\psi\, [\underbrace{\sim(\sim r \rightarrow \sim p)}_{\sim (r \vee \sim p)} \rightarrow (t \rightarrow (w \wedge \sim p))\,]$

$\psi\, [\overbrace{\underbrace{(p \wedge \sim r)}_{F} \rightarrow (t \rightarrow (\underbrace{w}_{F} \wedge \sim p))}^{n}\,]$

Si el antecedente es *F*, entonces la implicación es *V*, cualquiera que fuese el valor de verdad del consecuente, por tanto $\psi\,(n) = 1$.

Otra forma de resolver es como sigue:

) Analizar el valor de verdad:

$\underset{F}{t} \rightarrow (w \wedge \sim p)$, sabiendo que w es F, no se sabe el valor de verdad de p.

Optemos que p sea F o p sea V.

i) Si p es F, entonces: $t \rightarrow \underbrace{(\underset{F}{w} \wedge \underset{V}{\sim p})}_{F}$, $\sim p$ es V

ii) Si p es V, entonces: $t \rightarrow \underbrace{(\underset{F}{w} \wedge \underset{F}{\sim p})}_{F}$, $\sim p$ es F

Hemos obtenido que: $(w \wedge \sim p)$ es F para cualquier valor de p.

iii) Ahora, hallemos el valor de verdad de $t \rightarrow \underbrace{(w \wedge \sim p)}_{F}$

Como no se sabe el valor de verdad de t, podemos suponer de dos valores :

- si t es V, entonces: $\underbrace{\underset{V}{t} \rightarrow \underset{F}{\underbrace{(w \wedge \sim p)}}}_{F}$

- Si t es F, entonces: $\underbrace{\underset{F}{t} \rightarrow \underset{F}{(w \wedge \sim p)}}_{V}$

6) Volver a 4 b) :

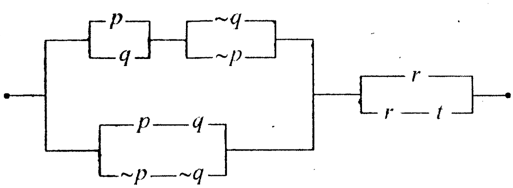
$$\psi\Big[\overbrace{\underbrace{\underbrace{(p\wedge\sim r)}_{F}\rightarrow\underbrace{(t\rightarrow(w\wedge\sim p))}_{F}}_{V}}^{n}\Big] \text{ o } \psi\Big[\overbrace{\underbrace{\underbrace{(p\wedge\sim r)}_{F}\rightarrow\underbrace{(t\rightarrow(w\wedge\sim p))}_{V}}_{V}}^{n}\Big],$$

En ambos casos: $\boxed{\psi(n)=1}$, porque n es V.

7 Sea X la proposición más simplificada de la proposición compuesta:

$[(p*p)*q] * [(p*p)*q]$, donde: $\sim[\sim p \rightarrow q]=p*q$

Sea Y la proposición equivalente más simplificadas del circuito lógico:



Sea Z la proposición más simplificada de la proposición compuesta.

$[p \wedge (q\wedge r)] \vee [(p \wedge \sim q) \wedge r] \vee [\sim q \wedge (\sim p \wedge r)]$

Hallar el circuito lógico más simple equivalente a $X \rightarrow (Y \vee Z)$.

***Solución*:**

1) Se tiene: $p*q \equiv \sim[\sim p \rightarrow q]$
$\equiv \sim[p \vee q]$

2) Luego:

a) $p*p \equiv \sim(\underbrace{p \vee p}_{p}) \equiv \sim p$

b) $(p*p)*q \equiv (\sim p)*q$
$\equiv \sim[\sim p \vee q] \equiv p \wedge \sim q$

c) Hagamos $p \wedge \sim q \equiv m$

Luego $X \equiv [\underbrace{(p*p)*q}_{m}]*[\underbrace{(p*p)*q}_{m}]$

$\equiv m*m$

$\equiv \sim(m \vee m)$

$\equiv \sim m$

$\equiv \sim(p\wedge \sim q)$

$\boxed{X \equiv \sim p \vee q}$

El circuito que corresponde a Y es:

$$Y \equiv \{[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee [\underbrace{(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)}] \} \wedge \{\underbrace{r \vee (r \wedge t)}_{r}\}$$

$$\underbrace{(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)}_{p \,\Delta\, q} \qquad (p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$$

$$\sim[\underbrace{\sim(p \wedge q) \wedge (p \vee q)}_{p \,\Delta\, q}]$$

$$\equiv [\underbrace{(p \,\Delta\, q) \vee \sim(p \,\Delta\, q)}_{T}] \wedge r \quad \equiv T \wedge r \equiv r$$

$$\boxed{Y \equiv r}$$

$$Z \equiv [p \wedge (q \wedge r)] \vee [(p \wedge \sim q) \wedge r] \vee [\sim q \wedge (\sim p \wedge r)]$$

$$\equiv [r \wedge (p \wedge q)] \vee [r \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [r \wedge \sim(p \vee q)] \quad \text{“ factorizar } r \text{ ”}$$

$$\equiv r \wedge \left\{ \left[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \right] \vee \sim(p \vee q) \right\}$$

$$\equiv r \wedge \{ \underbrace{[\, p \wedge \underbrace{(q \vee \sim q)}_{T}\,]}_{p} \vee \sim(p \vee q) \}$$

$$\equiv r \wedge \{ p \vee \sim(p \vee q) \}$$

$$\equiv r \wedge \{ p \vee (\sim p \wedge \sim q) \}$$

$$\equiv r \wedge \{ \underbrace{(p \vee \sim p)}_{T} \wedge (p \vee \sim q) \}$$

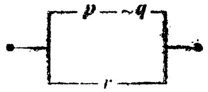
$$\boxed{Z \equiv r \wedge (p \vee \sim q)}$$

Luego: $X \to (Y \vee Z)$

$$\equiv \sim X \vee (Y \vee Z)$$

$$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee [\underbrace{r \vee (r \wedge (p \vee \sim q))}_{r}]$$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee r$



([illegible]) ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) Es suficiente que $p \Delta q$ sea falsa para que p y q sean equivalentes

b) No es necesario que p sea verdadera y q sea falsa para que $[p \vee (q \wedge \sim p)] \vee \sim q$ sea verdadero.

Solución de a) La proposición es verdadera, porque:

$$\text{si } p \Delta q \text{ es } F\text{, entonces } \left\{ \begin{array}{ll} p \;\; q & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ F \;\; F & \\ \quad o & \\ V \;\; V & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{array} \right.$$

Como vemos, en (1) y en (2) los valores de verdad de p y q son los mismos, es decir son equivalentes.

Formalizando, se tiene:

(1) $$\begin{array}{ccccccc} p & \Delta & q & \to & (p & \leftrightarrow & q) \\ V & & V & & V & & V \\ & F & & & & V & \\ & & & \boxed{V} & & & \end{array}$$

(2) $$\begin{array}{ccccccc} p & \Delta & q & \to & (p & \leftrightarrow & q) \\ F & & F & & F & & F \\ & F & & & & V & \\ & & & \boxed{V} & & & \end{array}$$

Como vemos $p \Delta q$ implica $p \leftrightarrow q$, lo que equivale a confirmar que, es suficiente que $p \Delta q$ sea F para que p y q sean equivalentes.

Solución de b)

Al simplificar: $\quad [\, p \vee (q \wedge \sim p)\,] \wedge \sim q \equiv$

$$\equiv \left[\, p \vee (\sim p \wedge q) \,\right] \vee \sim q$$

$$\equiv \left[\, \underbrace{(p \vee \sim p)}_{T} \wedge (p \vee q) \,\right] \vee \sim q$$

$$\equiv \qquad (p \vee q) \vee \sim q$$

$$\equiv p \vee \underbrace{(q \vee \sim q)}_{T}$$

$$\equiv T$$

Como es TAUTOLOGÍA (verdadero), entonces p y q pueden tener cualquier valor de verdad. Luego la proposición en b) es VERDADERO.

(9) **Sean** P_1 , P_2 , ... P_n **y** q **proposiciones simples.** Demostrar que P_1 , P_2 , ... P_n **implican** q **,** si y sólo si
$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q$, **es una contradicción.**

Solución:

Por probar que:

$$\Big[\, \overbrace{(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n) \to q}^{A} \,\Big] \leftrightarrow \Big[\, \overbrace{(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q}^{B} \,\Big] \text{ es una contradicción}$$

Se debe probar los dos sentidos: $A \Rightarrow B \;\wedge\; B \Rightarrow A$

($\Rightarrow$) Debo probar que B es F.

i) Si $\quad P_1 , P_2 , \ldots\ldots\ldots , P_n$ **implican** q , **significa que la condicional**

$$\underbrace{(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots P_n) \to q}_{A} \text{ es VERDADERA.}$$

2) La negación de A es $\sim A$, donde:

$$\sim A \equiv \sim\left[(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \rightarrow q \right]$$

$$\equiv \sim\left[\sim (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \vee q \right]$$

$$\equiv \quad (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q$$

3) Como A es V, entonces $\sim A$ es F, es decir:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q \text{ es F.}$$

($\Leftarrow$) si $\overbrace{(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q}^{B}$ es F, debo probar que $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots, P_n$ implica q.

Veamos:

4) Sea $B \equiv (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q$

5) La negación de B es:

$$\sim B \equiv \sim\left[(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q \right]$$

$$\equiv \sim (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \vee q$$

$$\sim B \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n \Rightarrow q$$

6) Como B es F, entonces $\sim B$ es V.

7) Si la condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n \Rightarrow q)$ es V, quiere decir que

$$P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots, P_n \text{ implica } q.$$

10 Sean r, t, p_i, q_i $i \equiv 1, 2, \ldots\ldots, n$ proposiciones tales que $p_i \wedge t$ es FALSA para todo $i \equiv 1, 2, \ldots\ldots, n$

$S \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \vee \ldots\ldots\ldots \vee P_n$ es verdadera

$r \equiv (P_1 \wedge t) \vee (P_2 \wedge t) \vee \ldots\ldots\ldots \vee (P_n \wedge t)$

$q_i \equiv P_i \vee t$ es FALSO para i par y VERDADERO para i impar.

Hallar el valor de verdad de:

$$\{(p_5 \vee t) \leftrightarrow (q_2 \wedge p_1)\} \; \Delta \; \{\sim(q_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge t)\}$$

Solución:

Sea.

$$A \equiv \{(\underbrace{p_5 \vee t}_{\substack{q_5 \\ V}}) \leftrightarrow (\underset{F}{q_2} \wedge \underset{V}{p_1})\} \; \Delta \; \{\sim(\underset{V}{q_1} \wedge \underset{F}{p_2}) \vee (\underset{V}{p_3} \wedge \underset{F}{t})\}$$

Por datos se tiene:

1) $q_i \equiv p_i \vee t \begin{cases} F & , \text{ si } i = \textbf{por} \\ V & , \text{ si } i = \textbf{impar} \end{cases}$

Luego: $\boxed{q_5 \equiv p_5 \vee t \;\text{ es } V}$ porque $i = 5$ es **impar**

2) q_1 es V porque $i = 1$ es **impar, a su vez** $\boxed{q_1 \equiv p_1 \vee t}$ es V.

3) q_3 es V porque $i = 3$ es **impar, a su vez** $\boxed{q_3 \equiv p_3 \vee t}$ es V.

4) q_2 es F porque $i = 2$ **es par, a su vez** $\boxed{q_2 \equiv p_2 \vee t}$ es F.

5) Luego, si $p_2 \vee t$ es F, **entonces** $\boxed{p_2 \text{ es } F}$ y $\boxed{t \text{ es } F}$ **(Por ley de la disyunción).**

6) En 2) si $p_1 \vee t$ es V, siendo t FALSO , **entonces** $\boxed{p_1 \text{ es } V}$

7) Haciendo las evaluaciones en A:

$$\underbrace{\{(\underbrace{p_5 \vee t}_{V}) \leftrightarrow (\underbrace{\underset{F}{q_2} \wedge \underset{V}{p_1}}_{F})\}}_{F} \; \Delta \; \underbrace{\{\underbrace{\sim(\underbrace{\underset{V}{q_1} \wedge \underset{F}{p_2}}_{F})}_{V} \vee (\underbrace{\underset{V}{q_3} \wedge \underset{F}{t}}_{F})\}}_{V} \;\longrightarrow\; \boxed{V}$$

8) CONCLUSIÓN: A es V.

(11) ¿Cuáles de las siguientes proposiciones compuestas son equivalentes?

A: $(\sim p \vee q) \;\vee\; (\sim r \wedge \sim p)$ B: $p \;\Delta\; (r \rightarrow q)$

C: $\sim q \rightarrow \sim p$

Solución:

1) Hagamos las combinaciones de A, B y C tomando por parejas: (A, B), (A, C) y (B, C).
2) A continuación cada pareja las unimos por el bicondicional $\leftrightarrow$.
3) Luego estudiar si las bicondicionales $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$ y $B \leftrightarrow C$ son o no TAUTOLOGÍAS.

Si $A \leftrightarrow B$ es una tautología, escribiremos $A \equiv B$ para indicar que A y B son equivalentes de lo contrario escribiremos $A \not\equiv B$ para indicar que A y B no son equivalentes.

De igual manera procedemos para $A \leftrightarrow C$ y $B \leftrightarrow C$.

Veamos:

a)

p	q	r	$[(\sim p$		$\vee$	$q)$	$\vee$	$(\sim r$	$\wedge$	$\sim p)]$	$\leftrightarrow$	$[p$	Δ	$(r \rightarrow q)]$
V	V	V	F	V	V	V	$\boxed{V}$	F	F	F	F	V	$\boxed{F}$	V
V	V	F	F	V	V	V	$\boxed{V}$	V	F	F	F	V	$\boxed{F}$	V
V	F	V	F	V	F	F	$\boxed{F}$	F	F	F	F	V	$\boxed{V}$	F
V	F	F	F	V	F	F	$\boxed{F}$	V	F	F	V	V	$\boxed{F}$	V
F	V	V	V	F	V	V	$\boxed{V}$	F	F	V	V	F	$\boxed{V}$	V
F	V	F	V	F	V	V	$\boxed{V}$	V	V	V	V	F	$\boxed{V}$	V
F	F	V	V	F	V	F	$\boxed{V}$	F	F	V	F	F	$\boxed{F}$	F
F	F	F	V	F	V	F	$\boxed{V}$	V	V	V	V	F	$\boxed{V}$	V

CONTINGENCIA

Luego $A \not\equiv B$

b)

p	q	r	$[(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)]$	$\leftrightarrow$	$[\sim q$	$\rightarrow$	$\sim p]$
			V	$\boxed{V}$	F	V	F
			V	$\boxed{V}$	F	V	F
			F	$\boxed{V}$	V	F	F
			F	$\boxed{V}$	V	F	F
			V	$\boxed{V}$	F	V	V
			V	$\boxed{V}$	F	V	V
			V	$\boxed{V}$	V	V	V
			V	$\boxed{V}$	V	V	V

Como es una tautología, entonces escribimos: $A \equiv C$

c)

p	q	r	$[\,p\ \Delta\ (r \to q)\,]$	$\leftrightarrow$	$[\sim q \to \sim p]$
			F	F	V
			F	F	V
			V	F	F
			F	V	F
			V	V	V
			V	V	V
			F	F	V
			V	V	V

CONTINGENCIA

Luego: $B \not\equiv C$.

Al simplificar:

$$
\begin{aligned}
A &\equiv (\sim p \vee q) \ \vee\ (\sim r \wedge \sim p)\\
&\equiv [(\sim p \vee q) \vee \sim r] \wedge [(\sim p \vee q) \vee \sim p]\\
&\equiv [\underline{\underline{(\sim p \vee q)}} \vee \sim r] \wedge [\underline{\underline{(\sim p \vee q)}}]\\
&\equiv \sim p \vee q \qquad\qquad \text{(por absorción)}\\
&\equiv p \to q
\end{aligned}
$$

Al simplificar:

$$
\begin{aligned}
C &\equiv \sim q \to \sim p\\
&\equiv \sim(\sim q) \vee \sim p\\
&\equiv q \vee \sim p\\
&\equiv \sim p \vee q = p \to q
\end{aligned}
$$

(12) Definimos los siguientes conectivos mediante las siguientes tablas:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	$A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Usado únicamente los conectivos definidos, simplificar:

$$
\left\{\left[\overline{(\overline{\overline{A}+B})+(\overline{A}\cdot\overline{B})}\right] + \left[A\cdot\overline{B}\right]\right\}\cdot\left\{\left[\overline{(\overline{A}+B)+(\overline{A}\cdot\overline{B})}\right]+\left[\overline{A\cdot\overline{B}}\right]\right\}
$$

***Solución*:**

1) Los conectivos definidos son, respectivamente, equivalentes a la negación, a la conjunción y a la disyunción; por tanto podemos aplicar todas las propiedades que corresponden a los indicados conectivos.

2)
$$
\begin{aligned}
& \left\{\left[\overline{\overline{(\overline{A}+B)}+(\overline{A}\cdot\overline{B})}\right]+\left[A\cdot\overline{B}\right]\right\}\cdot\left\{\left[\overline{(\overline{A}+B)}+(\overline{A}\cdot\overline{B})\right]+\left[\overline{A\cdot\overline{B}}\right]\right\} \\
\equiv & \left\{\left[\overline{(A\cdot\overline{B})+(\overline{A}\cdot\overline{B})}\right]+(A\cdot\overline{B})\right\}\cdot\left\{\left[(A\cdot\overline{B})+(\overline{A}\cdot\overline{B})\right]+\left[\overline{A}+B\right]\right\} \\
\equiv & \left\{\overline{\underbrace{(A+\overline{A})}_{1}\cdot\overline{B}}+(A\cdot\overline{B})\right\}\cdot\left\{\underbrace{(A+\overline{A})}_{1}\cdot\overline{B})+\left[\overline{A}+B\right]\right\} \\
\equiv & \left\{\overline{1\cdot\overline{B}}+(A\cdot\overline{B})\right\}\cdot\left\{1\cdot\overline{B}+\overline{A}+B\right\} \\
\equiv & \left\{\overline{\overline{B}}+(A\cdot\overline{B})\right\}\cdot\left\{\overline{B}+\overline{A}+B\right\} \\
\equiv & \underbrace{\left\{B+(A\cdot\overline{B})\right\}}_{B+A}\cdot\underbrace{\left\{\underbrace{(\overline{B}+B)}_{1}+\overline{A}\right\}}_{1} \\
\equiv & (B+A)\cdot 1 \\
\equiv & B+A
\end{aligned}
$$

Nota:

$\overline{1}=0$	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
$\overline{0}=1$	$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$
$\overline{\overline{A}}=A$	$A+0=A$
$A\cdot A=A$	$A+1=1$
$A\cdot 0=0$	$A+\overline{A}=1$
$A\cdot 1=A$	$A\cdot(A+B)=A$
$A\cdot\overline{A}=0$	$A+(A\cdot B)=A$
	$A\cdot(\overline{A}+B)=A\cdot B$
	$A+(\overline{A}\cdot B)=A+B$

13 El dueño de una casa de venta de autos desea colocar en la puerta de su establecimiento un letrero con un lema que lo identifique. En principio tiene como candidatos los siguientes lemas:

- Un buen auto no es barato.
- Un auto barato no es bueno.
- Un auto barato es bueno.
- Un auto es bueno o no es barato.
- Un auto no es, bueno y barato a la vez.

Su hijo que estudia en la universidad, colabora determinando qué lemas significan lo mismo, al final le alcanza un número menor de lemas. ¿Cuáles son?

Solución:

En primer lugar, expresemos cada lema en otra forma que sea su equivalente.

Así tendremos que:

a) Un buen auto no es barato $\equiv$ $\text{si } \underbrace{\text{un auto es bueno}}_{p}\text{, } \underset{\rightarrow}{\text{entonces un}} \underbrace{\text{auto no es barato}}_{\sim q}$

b) Un auto barato no es bueno $\equiv$ $\text{si } \underbrace{\text{un auto es barato}}_{q}\text{, } \underset{\rightarrow}{\text{entonces un}} \underbrace{\text{auto no es bueno}}_{\sim p}$

c) Un auto barato es bueno $\equiv$ $\text{si } \underbrace{\text{un auto es barato}}_{q}\text{, } \underset{\rightarrow}{\text{entonces}} \underbrace{\text{un auto es bueno}}_{p}.$

d) $\underbrace{\text{Un auto es bueno}}_{p} \underset{\vee}{\text{ o }} \underbrace{\text{no es barato}}_{\sim q} \equiv p \vee \sim q$

e) $\text{Un auto} \underbrace{\text{no es}}_{\sim}\text{, } \underbrace{\text{bueno}}_{p} \underset{\wedge}{\text{ y }} \underbrace{\text{barato}}_{q} \text{ a la vez } \equiv \sim (p \wedge q)$

Luego:

a) $p \rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$

b) $q \rightarrow \sim p \equiv \sim q \vee \sim p$

c) $q \rightarrow p \equiv \sim q \vee p$

d) $p \vee \sim q$

e) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Conclusión:

i) Son iguales los lemas *a*, *b*, *c*.

ii) *c* , *d* son iguales.

iii) Se reduce solo a dos lemas.

(14) Formalizar la siguiente proposición:

Si A es múltiplo de 4, es divisible por 2, pero A no es divisible por 2 , por tanto no es múltiplo de 4.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} p: \text{ A es múltiplo de 4} \\ q: \text{ A es divisible por 2} \end{array}\right\} \left[(p \rightarrow q) \wedge \sim q \right] \rightarrow \sim p$$

15 Formalizar mediante símbolos lógicos, el siguiente texto:

$$\underbrace{\text{“Ese lapso, \textbf{corto} quizá}}_{q}\ \underbrace{\text{SI}}_{\leftarrow}\ \underbrace{\text{se le mide por el calendario}}_{p}\ \underbrace{,}_{\wedge}$$

$$\underbrace{\text{es interminablemente \textbf{largo}}}_{\sim q}\ \underbrace{\text{CUANDO}}_{\leftarrow}\text{, como yo , }\underbrace{\text{se ha galopado a través de él.}}_{r}$$

$$\underbrace{\text{\textbf{Sin embargo}}}_{\wedge}\text{ , }\underbrace{\text{ese lapso de tiempo es \textbf{corto}}}_{q}\ \underbrace{\text{SI}}_{\leftarrow}\ \underbrace{\text{toda proposición es falsa.}}_{s}$$

$$\underbrace{\text{\textbf{Por tanto}}}_{\rightarrow}\text{ , }\underbrace{\text{se obtiene una contradicción.}}_{t}$$

***Solución*:**

Una manera de formalizar el texto dado, es redactando nuevamente el texto en otra que sea equivalente a la original con la diferencia que el NUEVO TEXTO sea sencillo y se haga notorio los CONECTIVOS lógicos.

Veamos:

Si se le mide por el **calendario**, **entonces** ese lapso de tiempo es corto **y si** se ha galopado, como yo, a **través de él**, **entonces** ese lapso de tiempo es largo. **Sin embargo**, **si** toda proposición es **falsa entonces** ese lapso tiempo de tiempo es corto

Por tanto, se obtiene una contradicción.

Donde: p : se le mide por el calendario
q : ese lapso de tiempo es corto.
r : se ha galopado, como yo, a través de él.
s : toda proposición es falsa.
t : se obtiene una contradicción.

La formalización lógica es: $\left\{\left[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim q)\right] \wedge (s \rightarrow q)\right\} \rightarrow t$

16 Simbolizar y analizar el valor de verdad del siguiente enunciado:

“**Si** un satélite gira alrededor de la luna, **entonces** gira también alrededor de la tierra; **y si** gira alrededor de la tierra, **también** gira alrededor del sol. **Y, si** gira alrededor del sol, **entonces** gira alrededor de la luna, **entonces** gira alrededor de la constelación de la luna.”

Solución:

p : Un satélite gira alrededor de la luna
q : Un satélite gira alrededor de la tierra.
r : Un satélite gira alrededor del sol.
s : Un satélite gira alrededor de la constelación de la luna.

La formalización es: $\{[(p \to q) \wedge (q \to r)] \wedge (r \to p)\} \to s$

(17) Considerando que las siguientes proposiciones:

a) "Dos rectas de un mismo plano son paralelas si y sólo si no tienen ningún punto común";
b) "Dados una recta y un punto, por el punto sólo se puede trazar una perpendicular a la recta";
c) "Por un punto exterior a una recta, solo se puede trazar una paralela a ella"; son verdaderas.

Demostrar, que también son verdaderas:

d) "En un plano dos rectas diferentes perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí".
e) **"Si una recta corta a una de dos paralelas, corta también a la otra".**

Traducir al lenguaje lógico:

Solución:

Demostración de la parte d)

$$\text{HIPÓTESIS}\begin{cases} L_1 \neq L_2 \ \dots\ p_1 \\ L_1 \perp L \ \dots\ p_2 \\ L_2 \perp L \ \dots\ p_3 \end{cases} \qquad \text{TESIS}\left\{ L_1 \,//\, L_2 \ \dots\dots\ q \right.$$

Debo demostrar la validez de la INFERENCIA: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$ .... (I)

Pero, **la demostración directa de (I) no es posible**, entonces recurrimos a la **demostración por el** MÉTODO DE REDUCCIÓN AL ABSURDO, que consiste en:

1° **Negar las** TESIS $\sim q \equiv L_1 \not\parallel L_2 \longleftarrow$ "L_1 no es paralela a L_2"
2° **Introducir** $\sim q$ en la CONJUNCIÓN **de** PREMISAS de la hipótesis de una nueva INFERENCIA **(II) que** es equivalente a (I).
3° **llegar a negar** alguna de las premisas (p_1) de (I) que será la CONCLUSIÓN (TESIS) de la nueva inferencia: $(\sim q \wedge p_2 \wedge p_3) \to \sim p_1$ .... (II).

La inferencia (II) es equivalente a la inferencia (I). Como (I) no es posible demostrar directamente, entonces demostraremos (II) que será más sencillo.

En consecuencia debo probar la validez de la inferencia $(\sim q \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow \sim p_1$.

Veamos:

1. Supongamos $\sim q \equiv L_1 \nparallel L_2$
2. Ahora tenemos como hipótesis la siguiente conjunción de premisas.

$\sim q \;:\; L_1 \nparallel L_2$

$p_2 \;:\; L_1 \perp L$

$p_3 \;:\; L_2 \perp L$

3. Si $L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow L_1 \wedge L_2$ se intersectan en un punto IP, es decir $L_1 \cap L_2 = \{ IP \}$
(es la negación de la proposición a)).

4. Por IP tracemos una recta L que sea perpendicular a L_1, es decir, $L_1 \perp L$ en IP.

5. Por la hipótesis P_3 se tiene $L_2 \perp L$ en IP.

6. Luego: Si $L_1 \perp L$ en $IP \wedge L_2 \perp L$ en IP entonces $\underbrace{L_1 = L_2}_{\sim p_1}$, esto se justifica por la proposición b)

7. Según la hipótesis original se tiene $p_1 \;:\; L_1 \neq L_2$
y según el paso 6 hemos probado $\sim p_1 \;:\; L_1 = L_2$
lo cual es una contradicción.

En consecuencia es verdadero la inferencia $\left(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3\right) \rightarrow q$ porque hemos demostrado que (II) es verdadero.

Demostración de e)

$L_1 \,//\, L_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\; p_1$

$L \neq L_1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; p_2$ TESIS L corta a L_2 .... q

L corta a $L_1 \ldots\ldots\; p_3$

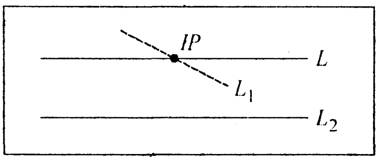
Debo demostrar: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q$ .... (I)

Como la demostración de la validez de la inferencia (I) no es directa recurrimos a la demostración por el método de REDUCCIÓN AL ABSURDO, en este caso debemos probar la INFERENCIA: $(\sim q \wedge p_1 \wedge p_3) \rightarrow \sim p_2$ .... (II)

Veamos:

1. Supongamos $\sim q \equiv L$ no corta a L_2
2. Si L no corta a $L_2 \Rightarrow L \,//\, L_2 \equiv \sim q$
3. Ahora la HIPÓTESIS es $\begin{cases} P_1 : & L_1 \,//\, L_2 \\ \sim q : & L \,//\, L_2 \\ p_3 : & L \text{ corta a } L_1 \end{cases}$ **TESIS** $\{ \sim p_2 : L = L_1$
4. Según p_3 : L corta a L_1 en $I\!P$ ($I\!P$ punto exterior a L_2)
5. Según c) : por $I\!P$ se traza una PARALELA a L_2.
6. Dicha paralela es L según $\sim q$. Es decir $L \,//\, L_2$.
7. Según p_1 : $L_1 \,//\, L_2 \wedge I\!P \in L_1$ según 4.
8. Si $L \,//\, L_2 \wedge L_1 \,//\, L_2$, $I\!P \in L_1 \Rightarrow L = L_1$ .... según c)

   Por lo tanto es verdadero II , lo cual implica que (I) es verdadero.



lqqd

(18) Sean p , q dos proposiciones cualesquiera. Se define el conectivo "*" en la forma siguiente:

$$p * q \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

Expresar sólo en términos del conectivo "*" cada una de las siguientes proposiciones:

a) $\sim p \vee q$

b) $p \leftrightarrow \sim q$

c) Simplificar $[(p*q)*q] * [(p*p)*\sim q]$

Solución:

De la definición dada: $p * q \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$
$\equiv \sim (p \vee q)$

Se deducen:

1. $p * p \equiv \sim (p \vee p)$
$\equiv \sim p$

2. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
$\equiv \sim [(\sim p) * q]$
$\equiv [(\sim p) * q] * [(\sim p) * q]$
$\equiv [(p * p) * q] * [(p * p) * q]$

3. $p \wedge q \equiv \sim [(\sim p) \vee (\sim q)]$
$\equiv \sim p * \sim q$
$\equiv (p * p) * (q * q)$

4. $p \vee q \equiv \sim [\sim (p \vee q)]$
$\equiv \sim [p * q]$
$\equiv (p * q) * (p * q)$

Con el conectivo "*" hemos construido un álgebra para: la negación, la condicional, la conjunción y la disyunción. Esta álgebra será suficiente para expresar cualquier proposición compuesta en términos del conectivo *.

Luego:

a) $\sim p \vee q \equiv p \rightarrow q$
$\equiv [(p * p) * q] * [(p * p) * q]$

b) $p \leftrightarrow \sim q \equiv [p \rightarrow \sim q] \wedge [\sim q \rightarrow p]$
$\equiv [\sim p \vee \sim q] \wedge [q \vee p]$
$\equiv [\sim p \vee \sim q] \wedge [p \vee q]$
$\equiv \sim [p \wedge q] \wedge [p \vee q]$
$\equiv \sim [\underbrace{(p \wedge q)}_{m} \vee \underbrace{\sim (p \vee q)}_{n}]$
$\equiv \sim [m \vee n]$
$\equiv m * n$
$\equiv [(p * p) * (q * q)] * [p * q]$

Donde: $m \equiv (p \wedge q)$
$\equiv (p * p) * (q * q)$

$n \equiv \sim (p \vee q)$
$\equiv p * q$

(19) Sean las proposiciones p, q, r, s tales que las siguientes proposiciones compuestas:

$a \;:\; p \leftrightarrow \sim(q \wedge r)$

$b \;:\; \sim p \,\Delta\, q$

son siempre verdaderas. Determinar el valor de verdad de:

$c \;:\; \sim r \wedge (p \vee s) \to q \vee s$

***Solución*:**

Se tiene:

a) a_1) $\underbrace{\underset{V}{p} \leftrightarrow \underset{V}{\sim}(\underbrace{q \wedge r}_{F})}_{V}$ donde

q r	$q \wedge r$
V V	
V F	F
$\boxed{\text{F V}}$	$\boxed{\text{F}}$
F F	F

o

a_2) $\underbrace{\underset{F}{p} \leftrightarrow \underset{F}{\sim}(\underbrace{q \wedge r}_{V})}_{V}$ donde

q r	$q \wedge r$
V V	V

b) b_1) $\underbrace{\underset{F}{\sim p} \,\Delta\, \underset{V}{r}}_{V}$ se deduce $\begin{cases} r \text{ es V} \\ p \text{ es V} \end{cases}$

o

b_2) $\underbrace{\underset{V}{\sim p} \,\Delta\, \underset{F}{r}}_{V}$ se deduce $\begin{cases} \boxed{r \text{ es F}} \\ p \text{ es F} \end{cases}$

De a_1) y b_1) deducimos: $\begin{cases} p \text{ es V} \\ r \text{ es V} \\ q \text{ es F} \end{cases}$ .... (α)

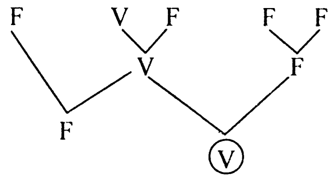
De a_2) y b_2) deducimos: $\left.\begin{matrix} r \text{ es V} \\ r \text{ es F} \end{matrix}\right\}$ lo cual es una contradicción

Utilizando (α) que es la única alternativa, ya podemos determinar el valor de verdad de c)

$c \;:\; \underset{F}{\underbrace{\sim r}} \wedge \underset{V}{(p \vee s)} \to \underset{F}{q} \vee s$, donde s puede ser $\begin{cases} V \\ o \\ F \end{cases}$

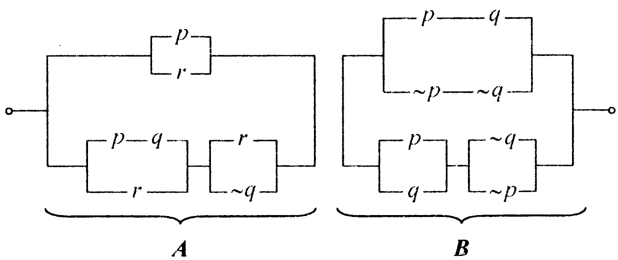
$c_1 : \underbrace{\underbrace{\underbrace{\sim r}_{F} \wedge \underbrace{(\underset{V}{p} \vee \underset{V}{s})}_{V}}_{V} \to \underbrace{\underset{F}{q} \vee \underset{V}{s}}_{V}}_{V}$

$c_2: \quad \underbrace{\sim r}_{F} \wedge (p \vee s) \rightarrow q \vee s$



Conclusión: c es V.

(20) Diseñar el circuito lógico mas simple equivalente al siguiente circuito:



Solución:

1. $A \wedge B$, donde:

2. $A \equiv \{p \vee r\} \vee \left\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge [r \vee \sim q]\right\} \equiv (p \vee r) \vee r \equiv p \vee r$

   $r \vee [(p \wedge q) \wedge \sim q]$

   $p \wedge \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}$

   $\underbrace{\qquad\qquad}_{F}$

   $\underbrace{\qquad\qquad}_{r}$

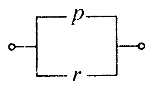
3. $B \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee [(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)]$

   $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) \qquad \underbrace{(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)}_{p \,\Delta\, q}$

   $\sim \underbrace{[\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee q)]}_{p \,\Delta\, q}$

   $\equiv \sim (p \,\Delta\, q) \vee (p \,\Delta\, q) \equiv T \qquad T$: tautología

4. Luego: $\quad A \wedge B \equiv (p \vee r) \wedge T \equiv p \vee r$



(21) Simbolizar y analizar el valor de verdad del siguiente enunciado:
"Si un porvenir brillante me espera, entonces recibiré una gran herencia o estudiaré mucho. Pero no recibiré una gran herencia. En consecuencia, si no estudiaré mucho, entonces no me espera un porvenir brillante ó me es indiferente triunfar en la vida.

Solución:

p : un porvenir brillante me espera.
q : recibiré una gran herencia.
r : estudiaré mucho.
t : me es indiferente triunfar en la vida

$$\{[p \to (q \vee r)] \wedge \sim q\} \to \{\sim r \to (\sim p \vee t)\}.$$

(22) "Si A es múltiplo de 4, es divisible por 2, pero A no es divisible por 2, por tanto no es múltiplo de 4".

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} p : A \text{ es múltiplo de } 4 \\ q : A \text{ es divisible por } 2 \end{array}\right\} \; [(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$$

(23) A : Si a es primo y a no es mayor que 2 entonces a no es múltiplo de 2
1) Si a es múltiplo de 2 entones a no es primo y no es mayor que 2.
2) Si a es múltiplo de 2 entonces a no es primo o es mayor que 2.
3) a no es múltiplo de 2 o a no es primo o a es mayor que 2.

¿Cuáles de estas proposiciones son equivalentes a la primera?

Solución:

r : a es primo
s : a es mayor que 2
t : a es múltiplo de 2

A : $(r \wedge \sim s) \to \sim t$

1) : $t \to (\sim r \wedge \sim s)$

2) : $t \to (\sim r \vee s) \equiv \sim t \vee (\sim r \vee s) \equiv \sim t \vee \sim (r \wedge \sim s) \equiv (r \wedge \sim s) \to \sim t$

3) : $\sim t \vee \sim r \vee s \equiv \sim t \vee \sim (r \wedge \sim s) \equiv (r \wedge \sim s) \to \sim t$

2) y 3) son equivalentes con A.

24 Dada la proposición:

"9 no es par divisible entre 3, **porque** 8 no es múltiplo de 4"

Determinar el valor de la proposición y negarla oracionalmente

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{F})\ p: 9 \text{ es par}\\ (\mathrm{V})\ q: 9 \text{ es divisible entre } 3\\ (\mathrm{V})\ r: 8 \text{ es múltiplo de } 4\end{array}\right\}\quad \sim r \rightarrow (\sim p \wedge q)$$

F V V

V

V

La negación es: $\sim\left[\sim r \rightarrow (\sim p \wedge q)\right] \equiv \sim\left[r \vee (\sim p \wedge q)\right] \equiv \sim r \wedge \sim(\sim p \wedge q)$

$$\equiv \sim r \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\equiv (\sim r \wedge p) \vee (\sim r \wedge \sim q)$$

$$\equiv (\sim r \wedge p) \vee \sim(q \vee r)$$

$$\equiv (q \vee r) \rightarrow (p \wedge \sim r)$$

"Si 9 es divisible entre 3 u 8 es múltiplo de 4, entonces 9 es par y 8 no es múltiplo de 4"

25 Si $p \wedge q \wedge r \equiv F$, demuestre que la proposición más simplificada de la proposición: $\left[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)\right] \rightarrow (r \wedge \sim p)$ es la proposición $p \vee q \vee r$.

Solución:

1. Simplificar la proposición:

$$\left[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)\right] \rightarrow (r \wedge \sim p)$$

$$\equiv \sim\left[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)\right] \vee (r \wedge \sim p)$$

$$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee r) \vee (r \wedge \sim p)$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim p) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1*)$$

2. Según datos: $p \wedge q \wedge r \equiv \mathrm{F}$ F = falso

3. Operemos en (1*):

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee \left[(q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim p) \right]$$

$$\vee \left\{ \underbrace{\left[(q \wedge \sim r) \vee r \right]}_{q \vee r} \wedge \underbrace{\left[(q \wedge \sim r) \vee \sim p \right]}_{(q \vee \sim p) \wedge (\sim r \vee \sim p)} \right\}$$

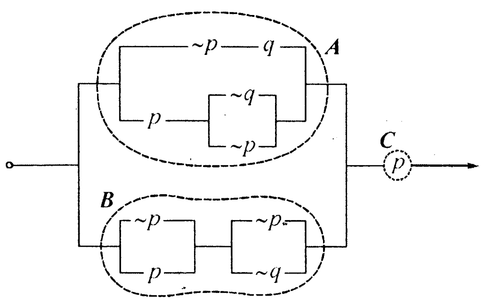
$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee \left\{ (q \vee r) \wedge \left[(q \vee \sim p) \wedge \sim (p \wedge r) \right] \right\}$$

$$\equiv \underbrace{\left[(p \wedge \sim q) \vee (q \vee r) \right]}_{p \vee q \vee r} \wedge \left\{ (p \wedge \sim q) \vee \left[(q \vee \sim p) \wedge \sim (p \wedge r) \right] \right\}$$

$$\wedge \left\{ \underbrace{\left[(p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p) \right]}_{T} \wedge \underbrace{\left[(p \wedge \sim q) \vee \sim (p \wedge r) \right]}_{\underbrace{[p \vee \sim (p \wedge r)]}_{T} \wedge \underbrace{[\sim q \vee \sim (p \wedge r)]}_{\sim (q \wedge p \wedge r)}} \right\}$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \underbrace{\sim \underbrace{(p \wedge q \wedge r)}_{F}}_{T} \equiv p \vee q \vee r.$$

(26) Sea X la proposición más simplificada del circuito lógico:



y sea Y, la proposición más simplificadas de: $s \rightarrow \sim [w \, \Delta \, (\sim s \rightarrow w)]$

Si p, q, r, s, t, w son proposiciones lógicas cualesquiera tales que:

$X \leftrightarrow Y$ es verdadera y

$\sim w \rightarrow \sim s$ es falsa

Hallar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow \sim(\sim p \vee q)$

b) $\sim(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow [t \vee (\sim w) \rightarrow w \wedge \sim p]$

Solución:

1. Sea $\quad X \equiv (A \vee B) \wedge C$, donde:

$$A \equiv (\sim p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$$

$$\vee \underbrace{[(p \wedge \sim q) \vee \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F}]}_{p \wedge \sim q}$$

$$\equiv (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$$

$$\equiv p \,\Delta\, q$$

$$B \equiv \underbrace{\underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \wedge (\sim p \vee \sim q)}$$

$$\equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\equiv \sim(p \wedge q)$$

$$C \equiv p$$

Sustituir en 1.

$$X \equiv [\underbrace{(p \,\Delta\, q) \vee \sim(p \wedge q)}] \wedge p$$

$$\equiv \sim(p \wedge q)$$

$$\equiv \sim(p \wedge q) \wedge p$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge p$$

$$\equiv \underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \vee (\sim q \wedge p) \equiv p \wedge \sim q$$

$$X \equiv p \wedge \sim q$$

2. $\quad Y \equiv s \rightarrow \sim[w \,\Delta\, (\sim s \rightarrow w)]$

$$\equiv \sim s \vee \sim[w \,\Delta\, (s \vee w)]$$

$$\equiv \sim\{s \wedge \underbrace{[w \,\Delta\, (s \vee w)]}\}$$

$$[\underbrace{w \vee (s \vee w)}_{s \vee w}] \wedge \sim[\underbrace{w \wedge (s \vee w)}_{w}]$$

$$\equiv \sim\{s \wedge [(s \vee w) \wedge \sim w]\}$$

$$[(s \wedge \sim w) \vee \underbrace{(w \wedge \sim w)}_{F}]$$

$$\equiv \sim \{ s \wedge (s \wedge \sim w) \} \equiv \sim \{ s \wedge \sim w \} \equiv \sim s \vee w \equiv w \vee \sim s$$

$$Y \equiv w \vee \sim s$$

3\. i_1) $X \longleftrightarrow Y$

$p \wedge \sim q \quad w \vee \sim s$

V V

V V

(V)

hay 3 posibilidades

ii) $\sim w \rightarrow \sim s$ es FALSA

$\equiv \quad w \vee \sim s$

o

i_2) $X \longleftrightarrow Y$

$p \wedge \sim q \quad w \vee \sim s$

F F

F F

(V)

hay 3 posibilidades

de aquí obtenemos $\begin{cases} w \text{ es F} \\ s \text{ es V} \end{cases}$

4\. **Se pide hallar los valores de verdad de:**

a) $(s \longleftrightarrow \sim w) \rightarrow \underbrace{\sim (\sim p \vee q)}_{\underbrace{p \wedge \sim q}_{F}}$

V V

V

(F)

b) $\sim \underbrace{(\sim q \rightarrow \sim p)}_{} \rightarrow [t \vee (\sim w) \rightarrow w \wedge \sim p]$

$\sim \quad (q \vee \sim p)$

$\sim \quad q \wedge p$

$\underbrace{p \wedge \sim q}_{F}$

F

V

según i_2)

(V)

27 Simplificar aplicando equivalencias lógicas, la siguiente proposición:

$$[p \longleftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \rightarrow r)]\}$$

Solución:

$$\wedge \sim [\sim p \vee \sim (q \rightarrow r)]$$

$$\wedge \sim [\sim p \vee (q \wedge \sim r)]$$

$$\equiv [p \longleftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \underbrace{\{[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge \sim [p \rightarrow (q \wedge \sim r)]\}}_{F} \equiv F$$

28 Sabiendo que el valor de verdad de la proposición compuesta:

$\{\sim [(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [(p \vee q) \Delta s]\} \rightarrow \{(s \Delta p) \rightarrow t\}$ es siempre falso.

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

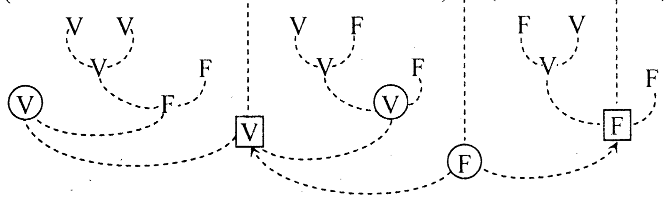
a) $\{[(\sim p \Delta q) \Delta r] \rightarrow [\sim (q \rightarrow (\mu \rightarrow p))]\} \Delta (p \Delta q)$

b) $\{\sim (p \rightarrow q) \Delta [(r \wedge p) \rightarrow \sim (r \vee s)]\} \Delta t$

Solución:

1. Según datos se tiene:

$$\{\sim [(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [(p \vee q) \Delta s]\} \rightarrow \{(s \Delta p) \rightarrow t\}$$



Se ha obtenido que: p es V

q es F

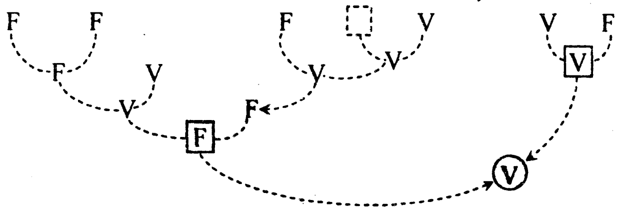
r es V

t es F

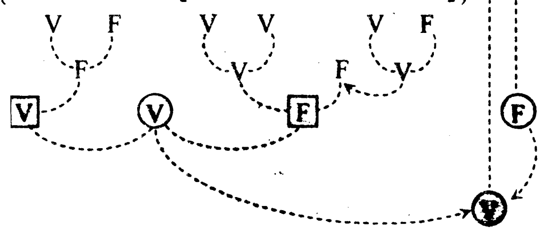
s es F

2. Luego:

a) $\{[(\sim p \;\Delta\; q) \;\Delta\; r] \to [\sim(q \to (\mu \to p))]\} \;\Delta\; (p \;\Delta\; q)$, μ puede ser $\left\{\begin{array}{l} \text{V} \\ \text{o} \\ \text{F} \end{array}\right.$



b) $\{\sim(p \to q) \;\Delta\; [(r \wedge p) \to \sim(r \vee s)]\} \;\Delta\; t$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Dada tres proposiciones: p, q, r, consideremos la proposición compuesta:

$$t: [(p \leftrightarrow r) \vee (\sim q \rightarrow \sim p)] \wedge [\sim((\sim p \rightarrow (\sim r \wedge q)) \vee (r \vee p)]$$

a) Simplificar t a su forma equivalente más sencilla.

b) Si "r" es falso y si las proposiciones "p" y "q" tienes valores de verdad opuestos, hallar el valor de verdad de "t".

2 Se sabe que: $t \equiv (r \longleftrightarrow s)\ \Delta \sim r$

$$\mu \equiv (r \rightarrow \sim s) \rightarrow r$$

Si t es falso y μ es verdadero, determinar el valor de verdad de : $[(r \longleftrightarrow u) \wedge (t\ \Delta\ s)]\Delta \sim t$

3 Si $p \# q \equiv [(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [r \rightarrow \sim (p \wedge q)]$, dibujar el circuito lógico más simple que representa a la siguiente proposición:

$$\{[(p \# \sim q) \# (\sim p \# q)] \# [(\sim p \# \sim p) \# (p \# q)]\} \rightarrow \{p \# q\}$$

R. $p \# q \equiv \sim (p \wedge q)$

4 Si $A : p \longleftrightarrow \sim q$

$B : [(p\,\Delta \sim q) \rightarrow r] \wedge [(p\,\Delta \sim q) \rightarrow \sim r]$

$C : \sim\{[\sim s \rightarrow (\sim s \vee r)] \rightarrow (\sim p \longleftrightarrow \sim q)\}$

¿Son A, B y C equivalentes?

R. $B : p \longleftrightarrow \sim q$

$C : p \longleftrightarrow \sim q$, A , B y C son equivalentes.

5 Usando equivalentes lógicas, simplificar:

$$[\sim(\sim p \rightarrow \sim q) \longleftrightarrow \sim(p \vee q)] \vee [p \rightarrow (\sim p \wedge q \wedge r)]$$

R. T , $T \equiv$ tautología.

6 Se tiene los siguientes datos:
p es verdadero; $r \rightarrow \sim p$ es verdadero y $\sim r \rightarrow s$ es verdadero.
Hallar el valor verdad de $\sim r$ y de s.

R. $\sim r$ es V , s es V.

7 Sean $p,\ q,\ r,\ s,\ t$ proposiciones.
Si $[(\sim p) \wedge q] \rightarrow [(r \rightarrow p) \vee t]$ es una proposición falsa, hallar el valor de verdad de: $\sim(q \vee \sim r) \vee \sim[t \rightarrow ((\sim q) \wedge p)]$.

8 Sean $p,\ q,\ r,\ s,\ t$ proposiciones.
Si $(p \vee q) \longleftrightarrow (r \wedge s)$ es verdadera y $r \,\Delta\, s$ es verdadera, analizar el valor de verdad de:

$$[((\sim p) \longleftrightarrow r)\ \Delta\ (s \rightarrow q)] \wedge s$$

9 Se define el conectivo $\downarrow$ por la tabla

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

a) Expresar $p \,\Delta\, q$ en términos de $\downarrow$ y $\sim$.
b) comprobar mediante una tabla de verdad que la expresión hallada en a) es equivalente a $p \leftrightarrow \sim q$.

10 Se define el conectivo # mediante la siguiente tabla de valores

p	q	$p \# q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

a) Demostrar, usando equivalencias, que $(p \# q) \# (p \# q) \equiv (p \vee q)$
b) Expresar $p \rightarrow q$ sólo en términos del conectivo #.

11 Considerando las siguientes proposiciones:

p : La protesta refleja un síntoma de disconformidad.
q : Los empresarios son personas adineradas.
r : Las personas adineradas son extravagantes.

Traducir en el lenguaje usual, la siguiente expresión simbólica $p \rightarrow \sim(q \vee r)$

12 Estudiar si es válida o no la siguiente proposición compuesta:

"Si en la luna no hay oxígeno, entonces no hay agua ni aire.
Si no hay oxígeno ni hay agua, entonces no hay plantas. No es el caso que en la luna haya oxígeno o no haya plantas.

En consecuencia, la luna está hecha de queso."

R. $\{[\sim p \rightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \wedge [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim s] \wedge \sim[p \vee \sim s]\} \Rightarrow t$, $t \rightarrow F$, $p \rightarrow F$, $s \rightarrow V$, $q \rightarrow V$, $r \rightarrow F$

13 Doña Juana acompaña a sus 3 sobrinos en un paseo por Lima. Después, cada sobrino afirma.

El 1° : Fuimos al Puente de los Suspiros, pero no a la Plaza San Martín, aunque estuvimos en la Alameda de los Descalzos.

El 2° : Estuvimos en el puente de los Suspiros y en la plaza San Martín, pero no visitamos palacio de Gobierno ni llegamos a la Alameda de los Descalzos.

El 3° : No fuimos al Puente de los Suspiros, pero estuvimos en la Alameda de los Descalzos.

Sabiendo que cada sobrino miente una vez y sólo una ¿qué han visitado realmente con su tía Juana? Justificar.

14 La proposición compuesta α, construida con las proposiciones simple p, q y r es verdadera si y sólo si p y q son verdaderas y r es falsa. Analizar si es verdad que tal proposición α es equivalente a la siguiente:
"p es suficiente para q, pero r no es necesario si p; sin embargo q es condición necesaria o suficiente si r".

15 Un juez interroga a tres personas: A, B y C, sospechosas de un delito. Se sabe que una de ellas es culpable, pero en sus declaraciones, cada una hace dos declaraciones, como sigue:

A : Yo y B somos inocentes.
B : A es inocente y C es culpable.
C : Yo soy inocente y A es culpable.

El Juez se entera que los sospechosos se han puesto de acuerdo para que uno de ellos diga dos verdades, otros dos mentiras y el otro una verdad y una mentira.

En base a esta información ¿es posible determinar quién es el culpable?. En tal caso ¿Cuál es?. Explicar.

16 Un comité de tres personas desea emplear un circuito eléctrico para registrar votaciones mayoritarias simples y secretas. Construya un circuito que controle tales votaciones con solo cinco interruptores, de modo que cada miembro del comité pueda accionar (cerrar) el interruptor asignado para decir "SI" con su voto o no accionar (mantenerlo abierto) el interruptor asignado para decir "NO" con su voto, y que se encienda una señal si la mayoría de los miembros del comité vota afirmativamente. (no se admiten abstenciones)

17 Para una proposición cualquiera p se define:

$$V(p) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{si } p \text{ es verdadero} \\ 0 \quad , & \text{si } p \text{ es falso.} \end{cases}$$

A partir de las tablas de verdad, mostrar que:

a) $V(\sim p) = 1 - V(p)$

b) $V(p \vee q) \equiv V(p) + V(q) - V(p) \cdot V(q)$.

A continuación y sólo utilizando a) y b) probar que:

c) $V(p \wedge q) = V(p) \cdot V(q)$.

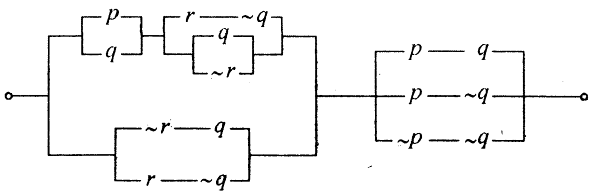
Finalmente deducir una fórmula aritmética para:

d) $V(p \Delta q \Delta r)$ en función de $V(p)$, $V(q)$ y $V(r)$.

e) $V(\sim (p \rightarrow q))$ en función de $V(\sim p)$ y $V(q)$

R : e) $V(\sim (p \rightarrow q)) = (1 - V(\sim p))\,(1 - V(q))$.

18 Sea X la proposición más simplificada del circuito lógico:

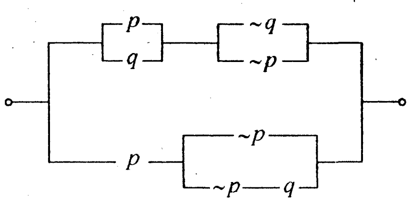


y sea Y la proposición más simplificada de

$$[(p \wedge s) \vee (p \wedge \sim s)] \wedge [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

Construir el circuito lógico mas simplificado correspondiente a $Y \rightarrow X$.

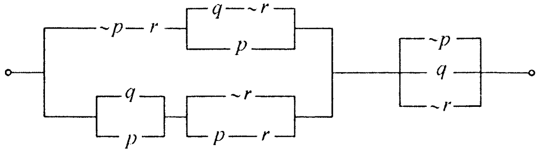
19 Sea A la proposición lógica más simple del circuito lógico:



y B la proposición lógica más simple de la proposición $(p * q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ donde $[(p * q) \rightarrow p]$ es equivalente a $(p \leftrightarrow q)$

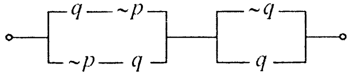
Encontrar el valor de verdad de la proposición $A \longleftrightarrow B$

20 Dado el siguiente circuito lógico.



dar el circuito equivalente, más simplificado posible.

21 Sean A el circuito lógico más simple correspondiente a las proposición: $[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge [(p \wedge s) \vee (p \wedge \sim s)]$ y B el circuito lógico más simple equivalente a:



Construir el circuito lógico simplificada correspondiente a: $A \Rightarrow B$

22 Se definen los conectivos $\downarrow$ y $\oplus$ mediante

$p \downarrow q \equiv p \wedge (p \rightarrow \sim q)$ y

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Expresar ambos conectivos en términos de la conjunción y negación.

23 Sea $A = \{\, p/p$ es proposición $\}$

$B = \{0, 1\}$

Definimos una función $f: A \rightarrow B$ en la forma siguiente:

$$\forall\, p \in A\,,\ f(p) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } p \text{ es verdadera} \\ 0\ , & \text{si } p \text{ es falsa} \end{cases}$$

Si se sabe que $f(\sim p) = 1 - f(p)$

a) Demostrar:

i) $f(p \wedge q) = f(p) \cdot f(q)$

ii) $f(p \vee q) = f(p) + f(q) - (p \wedge q)$

b) Hallar:

i) $f(p \rightarrow q)$

ii) $f(p \,\Delta\, q)$

24 Si definimos: $p * q \equiv (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$

$p \# q \equiv \sim p \vee \sim q$

$p\, \theta\, q \equiv \sim (p \rightarrow q)$

Valuar la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

(1) $(p \rightarrow q) \# (p\, \theta\, q)$

(2) $[(p * r) \# q]\, \theta\, (q \# r)$

(3) $(p \# r) \wedge (r * q)$

(4) $\sim (p \# q) \vee \sim (p\, \theta\, r)$

(5) $\left[(\sim p \wedge \sim r) \rightarrow (r \# p)\right] \theta \sim q$

(6) $\left\{[(p\, \Delta\, r) \# q] \rightarrow s\right\} \theta \left\{(p\, \theta\, r) * (p \# s)\right\}$

25 Si $p \uparrow q \equiv \sim p \vee \sim q$. Escribir en términos del conectivo "$\uparrow$" cada una de las siguientes proposiciones:

1. $\sim p$
2. $p \wedge q$
3. $p \vee q$
4. $p \rightarrow q$
5. $p\, \Delta\, q$
6. $p \leftrightarrow q$
7. $p \wedge (q \vee p)$
8. $(p \wedge q) \rightarrow p$

26 Si $p \downarrow q \equiv \sim p \wedge q$, expresar las siguientes proposiciones solamente en términos del conectivo $\downarrow$.

1. $(p \rightarrow q) \wedge p$
2. $(p \wedge q) \vee p$
3. $(\sim p \leftrightarrow q) \wedge \sim p$

27 a) Utilizando leyes lógicas, simplificar la proposición compuesta:

$[\sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim (q \rightarrow p)] \wedge [p \vee q]$

b) Partiendo de la composición compuesta:

$\left\{ p \leftrightarrow [p \wedge \sim (q \vee r)]\right\}$, llegar a la proposición $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$.

28 Si p y q son proposiciones, definimos la operación $p * q$ mediante la tabla siguiente:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

a) Hallar $p * q$ en términos de $\wedge$, $\sim$.

b) Construir una tabla de valores de verdad para : $(p * q) * r$.

c) Hallar $p * p$.

d) Escribir una proposición equivalente a $(p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim p)$ en términos del conectivo $*$.

29 Sea "X" la proposición equivalente más simplificada de la proposición compuesta: $(p \wedge q) * (q \vee r)$ donde $p * q \equiv \sim (\sim p \rightarrow q)$, y sea "$Z$" la proposición equivalente más simplificada que representa a la proposición $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge p)$.

Hallar el circuito lógico más simple que representa a la proposición: $X * Z$.

30 Si p, q, r, s, t, x representan proposiciones y se sabe que:

$(\sim p) \vee q$ es V

$t \wedge \sim s$ es F

$s \rightarrow p$ es V

Siendo q : "4 es un número primo"

Deducir la V o la F de cada una de las siguiente proposiciones:

a) $(q \rightarrow p) \wedge \sim (t \wedge s)$

b) $[p \wedge (q \rightarrow p)] \vee [x \vee (\sim s \rightarrow \sim x)]$

31 Dadas las proposiciones compuestas denotadas por a, b y c respectivamente:

$a : p \longleftrightarrow \sim (q \wedge r)$ $\qquad$ $b : \sim p \,\Delta \sim r$

$c : \sim (p \wedge q) \vee \sim r$

Determinar si $a \rightarrow c$ y $b \rightarrow c$ son tautologías.

32 Si p, q, r, s son proposiciones.

Si $\{(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)\}$ es FALSA, deducir el valor de verdad de:

a) $(\sim p \,\Delta\, q) \vee \sim q$ $\qquad$ b) $(p \rightarrow r) \rightarrow (p \vee s)$

c) $(\sim r \wedge q) \leftrightarrow (\sim q \wedge s)$

33 Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que:

$X : (p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es V

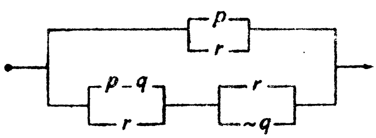
$Y : (\sim w \rightarrow \sim s)$ es F

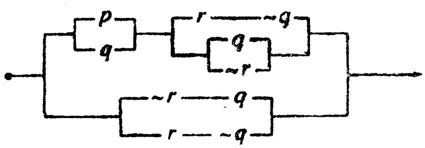
Hallar el valor de verdad de las proposiciones: m: $[t \rightarrow (w \vee \sim p) \wedge \sim (p \rightarrow r)]$

$n : (s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow (r \vee \sim p)$.

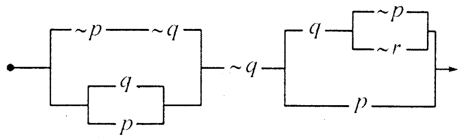
34 Sean A y B las expresiones lógicas que representan a los circuitos a) y b) respectivamente. Si el costo de cada llave repercute en forma significativa en el costo total del circuito. Halle el circuito lógico más económico correspondiente a $B \rightarrow A$.

a)





35 Considere el circuito lógico siguiente:



Si el costo de cada llave repercute en forma significativa en el costo total del circuito. Hallar un circuito equivalente que sea el más económico posible.

36 Un estudiante rinde un examen de tipo verdadero–falso, que consiste de cinco preguntas. Sabe que su profesor siempre plantea más preguntas verdaderas que falsas, y que nunca plantea tres preguntas consecutivas que tengan las mismas respuestas. Por la naturaleza de la primera y la última pregunta, sabe que éstas deben de tener respuestas contrarias.

De la única pregunta que conoce la respuesta es la segunda y esto le asegura tener las respuesta correctas.

a) ¿Qué sabe él sobre la pregunta dos?
b) ¿Cuáles son las respuestas a las cinco preguntas?
Justifique con base lógica.

37 Se cuentan con pantalones que pueden tener las siguientes características : desteñidos, estrechos y con pretina.
Se sabe que en sus roperos respectivos, Ana tiene unos pantalones estrechos y con pretina, y unos pantalones desteñidos sin pretina ; que Beatriz tiene unos pantalones sin pretina y unos pantalones desteñidos, estrechos y con pretina, por último, que Carmen tiene pantalones anchos, y unos pantalones oscuros, estrechos y con pretina.
Si un día, Ana, Beatriz y Carmen se dan cuenta que llevan unos pantalones idénticos, ¿cuáles son las características comunes en estos pantalones?
Justifique su solución mediante la lógica proposicional.

38 Determinar la validez o la invalidez de la siguiente proposición compuesta: "Si tiene un solo elemento, se llama conjunto unitario. Si no tiene elemento alguno, se llama conjunto vacío. Tiene un solo elemento o no tiene elemento.
En consecuencia, se llama "conjunto unitario o se llama conjunto vacío".

39 Suponga que A, B y C representan opiniones que serán favorables o desfavorables cuando una cierta decisión es estudiada. Suponga también que se desea que la decisión sea aceptada sólo cuando A es favorable o B es favorable (pero no ambas) y C es desfavorable.

Diseñar un circuito que sea favorable sólo en estas condiciones.

40 Supóngase que un estudio ha mostrado que la fracción de fumadores entre los que tienen cáncer pulmonar es mayor que la fracción de fumadores entre los que no tienen cáncer pulmonar. Se asegura entonces que la fracción de fumadores que tienen cáncer pulmonar es mayor que la fracción de no fumadores que tienen cáncer pulmonar.

Analizar si este argumento es válido.

41 Un hombre al margen de la ley es capturado por las fuerzas del orden y puesto en una cárcel que tiene dos túneles de salida. El jefe de las fuerzas del orden ofrece al prisionero la siguiente oportunidad de escapar:

"Uno de los túneles conduce a una muerte segura y el otro a la libertad. Puedes salir por cualquier túnel. Para ayudarte a tomar una decisión, dos de mis subalternos permanecerán contigo y responderán a cualquier pregunta única que tú quieras hacerles. Debo advertirte, sin embargo, de que uno de mis subalternos es completamente veraz, mientras que el otro miente siempre".

Se va luego el jefe, creyendo que ha dado al prisionero sólo una deportiva oportunidad de escapar. Después de pensar un momento, el prisionero de rápido ingenio hace una pregunta y luego escoge el túnel que conduce a la libertad.

¿Qué pregunta hizo? Justifique su respuesta.

42 El señor García dice a su hija: acudirás a las fiestas, mi querida hija, si cumples las siguientes reglas:

1) En toda fiesta que no uses anteojos, debes usar falda larga.
2) Si usas anteojos y falda larga en la misma fiesta, entonces no debes usar aretes.
3) Si usas aretes y no usas anteojos entonces no debes usar falda larga.

La señorita García está de acuerdo, pero algo confusa, y acude a un estudiante de ciencias para que simplifique el texto anterior. ¿Cuál es la orden simplificada?.

43 Simbolice:

a) Cualquiera de los dos P o Q pero no ambos
b) ninguno de los dos P o Q
c) P pero no Q
d) P sólo cuando Q
e) P implica Q, y a la inversa

44 Encontrar expresiones equivalentes para la negación de los siguientes:

a) x es racional y $x > 3$ y $x \neq \frac{10}{3}$.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces es absolutamente convergente.

c) Si $b > 0$ y $|a| < b$, entonces $-b < a < b$.

45 Explicar la lógica de los siguientes argumentos acerca de los números reales:

a) $-1 < 0$, por otra parte $0 = -1 + 1 \geq 1$

b) $x^2 \neq -1$ del momento en que $x^2 > 0 > -1$.

c) Suponer que $x > 0$ y $(x+1)(x-2) = 0$. Entonces $x = 2$.

d) $x^2 + y^2 = 0$ si y sólo si $x = y = 0$. En realidad, si $x = y = 0$, entonces $x^2 + y^2 = 0$. Inversamente, si $x \neq 0$ o $y \neq 0$, entonces $x^2 + y^2 > x^2 > 0$, así $x^2 + y^2 \neq 0$.

e) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$ no tiene soluciones, a partir de $\sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$ nosotros deducimos $x + 1 = x + 2$ de donde $1 = 2$.

46 Sea c un número real positivo y x un número real. Recordar el hecho

$$|x| < c \longleftrightarrow -c < x < c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Explicar cómo se resuelve la desigualdad $|x| \geq c$ en base de (*) y las resultados de este capítulo.

47 Justificar: si $\sim p \to p$ es verdadero, entonces p es verdadero.

48 Expresar $P \to Q$ solamente en términos de P, Q, $\sim$, $\wedge$

49 Probar:

a) $P \wedge P \longleftrightarrow P$.

b) $[(P \to Q) \wedge (R \to S)] \to [P \wedge R \to Q \wedge S]$.

c) $[P \wedge (P \vee Q)] \longleftrightarrow P$.

d) $P \wedge (P \to Q) \to Q$.

50 Definimos: P/Q mediante $\sim P \vee \sim Q$.

a) Escribir la tabla de verdad para P/Q

b) Probar: $\sim P \longleftrightarrow (P/P)$,

$(\sim P/\sim Q) \longleftrightarrow (\sim P/P)/(Q/Q)$

c) Usar (b) para encontrar expresiones solamente en términos de P, Q y el cual es equivalente a $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \to Q$, $P \leftrightarrow q$.

LÓGICA MATEMÁTICA

Representar cada uno de los siguientes enunciados usando simbología lógica :

51 "El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería".

52 "Una persona puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene una pase"

53 "Hoy es domingo y tengo que estudiar teorías de aprendizaje o no aprobaré el curso"

54 "El candidato del APRA dice: si salgo electo presidente de la República recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año". Analice la tabla de verdad correspondiente.

55 "Es buen estudiante, si y solo si, tiene promedio de diez"

56 "Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si y solo si soy desorganizado".

57 ¿Es válido el siguiente argumento?
Si usted invierte en el mercado de valores, entonces se hará rico.
Si se hace usted rico, entonces será feliz

$\therefore$ Si usted invierte en el mercado, entonces será feliz

58 ¿Es válido el siguiente argumento?

Si bajan los impuestos, entonces se eleva el ingreso.
El ingreso se eleva

$\therefore$ Los impuestos bajan

59 Sean P : trabajo ; q : Ahorro ; r : compraré una casa ;
S : Podré guardar el coche en mi casa.

Usando tautologías y las reglas de inferencia probar el siguiente argumento :

"Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa. Por consiguiente, si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro".

60 Demostrar por el método de contradicción el siguiente teorema
$[p \to (p \wedge r)] \wedge [(q \vee s) \to t] \wedge (p \vee s) \to t$

RESPUESTAS:

51 p : el coche enciende , q : tiene gasolina el tanque,
r : tiene corriente la batería , $p = q \wedge r$

52 p : entra al cine , q : compra su boleto,
r : obtiene un pase , $p = q \vee r$.

53 p : Hoy es domingo; q : tengo que estudiar teorías de aprendizaje;
r : Aprobaré el curso. $p \wedge q \wedge r$.

54 p : Salió electo Presidente de la república
q : Recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año. $p \rightarrow q$.

55 p : Es buen estudiante; q : Tiene promedio diez;
$p \longleftrightarrow q$

56 p : Pago la luz; q : Me cortarán la corriente eléctrica;
r : Me quedaré sin dinero; s : Pediré prestado,
t : Pagar la deuda; w : soy desorganizado.

$$(\sim p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow \sim t] \longleftrightarrow w$$

57 p : Usted invierte en el mercado de valores.
q : Se hará rico.
r : Será feliz.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore\ p \rightarrow r \end{array}$$

58 p : Los impuestos bajan.
q : El ingreso se eleva.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

59 $(p \vee q) \rightarrow r$ y $r \rightarrow s$, entonces $\sim s \rightarrow \sim q$.

Debo probar $[(p \vee q)] \rightarrow r] \wedge [r \rightarrow s] \rightarrow [\sim s \rightarrow \sim q]$

Se aplica el procedimiento general para demostración de enunciados válidos. A continuación se demuestra el teorema respaldando cada uno de sus pasos en tautologías de inferencia ya conocidas.

1. $(p \vee q) \to r$ hipótesis
2. $r \to s$ hipótesis
3. $q \to (q \vee p)$ Adición tautológica
4. $q \to (p \vee q)$ 3, ley conmutativa
5. $q \to r$ 4 ; 1 ; silogismo hipotético
6. $q \to s$ 5 ; 2 ; silogismo hipotético
7. $\sim s \to \sim q$ 6 ; contra positiva

El enunciado es válido aunque la conclusión puede ser falsa o verdadera.

60 Demostración:

1. $p \to (p \wedge r)$ hipótesis
2. $(q \vee s) \to t$ hipótesis
3. $p \vee s$ hipótesis
4. $\sim t$ negación de la conclusión
5. $\sim (q \vee s)$ 2, 4 , Modus tollens
6. $\sim q \wedge \sim s$ 5 , Ley de Morgan
7. $\sim q$ 6 , Simplificación
8. $\sim s \vee \sim q$ 6, Ley conmutativa
9. $\sim s$ 8, simplificación
10. s y p 3, Ley conmutativa
11. p 10, 9, silogismo disyuntivo
12. $q \wedge r$ 11,1 , modus ponens
13. q 12, simplificación
14. $q \wedge \sim q$ 13, 7 conjunción
15. contradicción.

Representar cada uno de los siguientes enunciados usando simbología lógica y responder a la pregunta: ¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes afirmaciones?

61 $3 + 2 = 5$ y $5 = 1 + 4$, entonces $3 + 2 = 1 + 4$ (transitiva)

62 5 es mayor que 2 , por lo tanto 5 es mayor o igual que 2 (adición)

63 Si $a > 4$, entonces $a^2 > 16$

Si $a^2 > 16$, entonces $a^2 + 3 > 19$

Por lo tanto, si $a > 4$, entonces $a^2 + 3 > 16$ (silogismo hipotético)

64 Juan Pérez es médico o ingeniero
Juan Pérez no es médico.
Entonces Juan Pérez es ingeniero. (Tollendo Ponens)

65 José saca una bola numerada de una urna, ve el número que tiene la bola.
José no ve el número de la bola.
Por lo tanto, José no saca una bola de la urna. (modus tollens)

66 Pepito mide 1.20 metros, entonces pesa más de 40 kilogramos.
Pepito mide 1.20 metros.
Por lo tanto, Pepito pesa más de 40 kilogramos (modus Ponens)

67 4 y 8 son divisores de 32.
Entonces 4 es divisor de 32. (simplificación)

¿Cuáles de las siguientes parejas de proposiciones compuestas son equivalentes?

68 A : $p \to q$, B : $p \vee q \longleftrightarrow q$

69 A : $p \to q$, B : $p \wedge q \longleftrightarrow p$

70 A : $p \wedge \sim q$, B : $p \wedge \sim (p \wedge q)$

71 A : $p \vee (p \wedge q)$, B : p

72 A : $p \wedge (p \vee q)$, B : p

73 A : $p \wedge \sim (q \wedge r)$, B : $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)$

74 A : $p \wedge \sim (p \wedge q)$, B : $p \wedge \sim q$

75 A : $p \vee q$, B : $(p \, \Delta \, q) \vee (p \wedge q)$

76 A : $p \wedge q$, B : $(p \wedge q) \wedge \sim (p \, \Delta \, q)$

77 A : $p \wedge \sim q$, B : $(p \, \Delta \, q) \wedge \sim q$

78 A : $p \wedge \sim (p \, \Delta \, q)$, B : $p \wedge q$

79 A : $p \wedge (q \wedge \sim r)$, B : $(p \wedge q) \wedge \sim (p \wedge r)$

80 A : $p \,\Delta\, q$ B : $(p \vee q) \wedge \sim (q \vee p)$

Simplificar:

81 $\sim (p \to q) \to (q \wedge \sim p)$

82 $\sim p \leftrightarrow (p \to \sim q)$

83 $[(p \to q) \vee p] \wedge [(p \to q) \vee \sim p]$

84 $[\sim(p \to q) \to \sim(q \to p)] \wedge [p \vee p]$

¿Cuáles de las siguientes pares de enunciados son equivalentes?

85 $7x = 14$; $3x = 6$

86 $a^2 < b$ con $b > 0$; $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

87 $|\, a \,| < b$, con $b > 0$; $-b < a < b$

88 $x^2 = 4$; $x = 2$

89 $x^2 = 4$; $x = 2 \;\vee\; x = -2$

90 $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{9} = 3 \;\vee\; \sqrt{9} = -3$

LÓGICA MATEMÁTICA

Marque la respuesta correcta.

01 La negación de $p \to q$ es:

a) $\sim p \wedge q$ b) $q \wedge p$ c) $p \wedge \sim q$ d) $\sim p \wedge q$

02 La proposición: $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \vee q) \longleftrightarrow (p \wedge q)]$ es:

a) Tautología b) indeterminada c) contradicción d) Ninguna anterior

03 $p \wedge (q \oplus r)$ equivale a $(p \wedge q) \oplus (p \wedge r)$ en lógica binaria esto es:

a) imprevisible b) parcialmente falso
c) correcto d) parcialmente imposible.

04 Señale la existencia, si existiera, una contradicción o absurdo:

a) $p \to (p \to p)$ b) no hay ninguno
c) $(p \wedge q) \to p$ d) $[q \wedge (q \to \sim p) \wedge (p \to \sim q)] \to q$

05 Señale, si hay, la tautología:

a) $[(\sim p \to q) \wedge (p \to q)] \to q$ b) $[(p \to q) \wedge (p \vee q)] \to \sim q$
c) $p \vee q$ d) ninguna de las anteriores.

06 Sean A contradicción o absurdo y T una tautología. Señalar la única contradicción.

a) $(p \longleftrightarrow \sim p) \longleftrightarrow A$ b) $(A \vee T) \longleftrightarrow T$
c) $q \to p$ d) $[\sim(\sim p) \longleftrightarrow p] \longleftrightarrow A$

07 Una ley de De Morgan es:

a) $(\sim p \vee \sim q) \longleftrightarrow \sim(p \vee q)$ b) $\sim(p \vee q) \longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
c) $(\sim p \wedge \sim q) \longleftrightarrow \sim(p \wedge q)$ d) $(\sim p \vee q) \longleftrightarrow (p \vee \sim q)$

08 La forma equivalente de la expresión $\sim(p \to q) \wedge p$ es:

a) $p \wedge \sim q$ b) $(p \vee \sim q)$
c) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ d) $p \vee q \vee \sim q$

09 Señale la expresión equivalente a la frase $(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$

a) $q \to q$ b) $p \to q$

c) $(p \to q) \to \sim p$ d) $\sim p \to (p \to q)$

10 Si $p \oplus q \equiv \sim(p \wedge q)$, se deduce:

a) $p \to \sim q$ b) $p \wedge q$ c) $p \to q$ d) $q \to q$

11 Sea A contradicción o absurdo y T una tautología. Señalar la única tautología.

a) $(p \longleftrightarrow \sim p) \longleftrightarrow T$ b) $(A \wedge T) \longleftrightarrow T$

c) $T \to (p \to p)$ d) $[\sim(\sim p) \longleftrightarrow p] \longleftrightarrow A$

12 Una ley de De Morgan es:

a) $\sim(\sim p) \longleftrightarrow p$ b) $\sim(p \wedge q) \longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$

c) $(\sim p \wedge \sim q) \longleftrightarrow \sim(p \wedge q)$ d) $\sim(p \to q) \longleftrightarrow (\sim p \to \sim q)$

13 "Es posible que p sea necesario" equivale a "Es posible que $\sim p$ sea imposible". Esta afirmación es:

a) cierta b) falsa c) depende de p d) Ninguna de las 3

14 Si $p \oplus q$ entonces:

a) $p \to \sim q$ b) $p \wedge q$ c) $p \to q$ d) $q \to p$

15 La proposición $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ es equivalente a:

a) $(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

b) $(p \to q) \to (r \to s)$

c) $(p \vee r) \wedge (q \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

d) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee s)$

16 Señale el razonamiento mal hecho:

A) $\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \wedge \sim q \end{array}}{\lambda}$ B) $\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \end{array}}{q}$

a) sólo A b) sólo el B c) ambos d) ninguno

17 p es posible si y sólo si.

a) p es imposible
b) es necesario que no p
c) es necesario que p
d) no es necesario que no p.

18 Señalar el razonamiento incorrecto

A) $$\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow r \\ r \wedge s \\ q \wedge \sim s \\ \hline \sim p \end{array}$$

B) $$\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow r \\ q \rightarrow (s \wedge t) \\ \hline \lambda \end{array}$$

a) sólo el *B* b) ambos c) ninguno d) sólo el A.

19 Señale el razonamiento mal hecho:

A) $$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \wedge \sim q \\ \hline \lambda \end{array}$$

B) $$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

a) sólo el *A* b) sólo el ***B*** c) ambos **d) ninguno**.

20 Señale, si existiera, una **contradicción o absurdo**.

a) $p \rightarrow (p \rightarrow p)$
b) No hay ninguna
c) $(p \wedge q) \rightarrow p$
d) $[q \wedge (q \rightarrow \sim p) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow q$

Respuestas:

01) c	02) a	03) c	04) b	05) a	06) d	07) b
08) a	09) c	10) a	11) c	12) b	13) a	14) a
15) c	16) d	17) d	18) a	19) d	20) b	

Negar los siguientes enunciados:

01 $p \;:\; x<2 \vee x>-3$

02 $q \;:\; -1<x<2$

03 $r \;:\; x=2$

04 $Q \;:\; 3x \neq 2$

05 $P \;:\; \forall\ x \in \mathbb{R} / (x-2)^2 \geq 0$

06 $R \;:\; \sim(p \wedge q) \vee q$, además simplificar.

Simplificar las siguientes proposiciones:

07 $(p \,\Delta\, q) \wedge (p \wedge \sim q)$

08 $(p \wedge q) \wedge (\sim q \rightarrow p)$

09 $(\sim q \wedge p) \vee (p \wedge q)$

10 $(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \wedge q)$

11 $(\sim q \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p \vee q)$

12 $(\sim p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

13 $(p \vee q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

14 $(p \wedge q \wedge r) \wedge [\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim r]$

15 $[\sim p \wedge (p \vee q)] \vee [\sim(p \vee r) \wedge \sim q]$

CONJUNTOS

INTRODUCCIÓN

Se dice que un concepto es ***primitivo***, cuando dicho ***concepto se admite sin definición***. Así los conceptos de conjunto, de elemento y la relación de pertenencia son conceptos primitivos en las matemáticas.

2.1 NOCIÓN DE CONJUNTO

Toda agrupación o colección de objetos es considerada como **CONJUNTO**, siempre que exista un criterio preciso que nos permita afirmar que un objeto pertenece o no a dicha agrupación.

Los objetos que "pertenecen al conjunto" se llaman sus elementos.

2.2 NOTACIÓN Y CONVENIOS INICIALES

Los conjunto se denotan con letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$
Los elementos se denotan con letras minúsculas: $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, x_1, x_2, \ldots$

2.2.1 RELACIÓN DE IGUALDAD

En matemáticas, los objetos en estudio son elementos o conjuntos y una relación entre elementos o entre conjuntos es la relación de igualdad que se denota por el símbolo "=" (igual).

Así tendremos que si a y b son elementos de algún conjunto, la notación $a = b$ nos indica que a y b representan el mismo elemento.

Si A y B son conjuntos, la notación $A = B$ nos indica que A y B representan al mismo conjunto.

2.2.2 PROPIEDADES DE IGUALDAD DE ELEMENTOS

P_1) $a = a$, $\forall\, a$ (Propiedad reflexiva)

P_2) $a = b$ implica $b = a$ (Propiedad simétrica)

P_3) Si $a = b \;\wedge\; b = c$ implica $a = c$ (Propiedad transitiva)

2.3 RELACIÓN DE PERTENENCIA

La relación de ***elemento a conjunto*** es de ***pertenencia***.

La notación: " $x \in B$ " se lee "x pertenece a B"
indicando así, que x forma parte del conjunto B.

La negación de p : $x \in B$
es $\sim p$: $x \notin B$ y se lee "x no pertenece a B"
Si la proposición p: $x \in B$ es **VERDADERO**, entonces la proposición: $x \notin B$ es **FALSO**.

Ejemplos:

Sean los conjuntos: $A = \{ x \in I\!R \,/\, x^2 - 4 = 0 \}$ $\quad C = \{ x \in I\!R \,/\, a^{x+1} = 1 \}$, $a \neq 1$, $a > 0$

$B = \{ x \in I\!R \,/\, x^2 + 4 = 0 \}$ $\quad D = \{ x \in I\!R \,/\, 0 < x < 1 \}$

Entonces tenemos:

(1) $2 \in A$, porque $2 \in I\!R \;\wedge\;$ 2 satisface la ecuación $x^2 - 4 = 0$

(2) $-2 \in A$, porque $-2 \in I\!R \;\wedge\;$ -2 satisface la ecuación $x^2 - 4 = 0$

(3) $2 \notin B$, porque $2 \in I\!R \;\wedge\;$ 2 no satisface la ecuación $x^2 + 4 = 0$

(4) $-1 \in C$, porque $-1 \in I\!R \;\wedge\;$ -1 satisface la ecuación $a^{x+1} = 1$

(5) $\frac{1}{3} \in D$, porque $\frac{1}{3} \in I\!R \;\wedge\; 0 < \frac{1}{3} < 1$

(6) $\frac{5}{16} \in D$, porque $\frac{5}{16} \in I\!R \;\wedge\; 0 < \frac{5}{16} < 1$

(7) $\frac{4}{3} \notin D$, porque $\frac{4}{3} \in I\!R$ pero, $\frac{4}{3}$ no es menor que 1.

2.4 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos que se estudian en las matemáticas, son: Los números naturales, los números enteros, los números racionales, los números irracionales, los números reales y los números complejos.

1) EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES:

$I\!N = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\ldots,n,\ldots\}$

2) EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-n,\ldots,-3,-2,-1,\underbrace{0,1,2,3,\ldots\ldots,n,\ldots}_{I\!N}\}$$

3) EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{m}{n} \Big/ m \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad n \in \mathbb{Z} \ , \ n \neq 0 \right\}$$

Algunos números racionales son: $-\frac{m}{n}\ldots -1\ldots -\frac{1}{2}\ldots -\frac{1}{3}\ldots 0\ldots \frac{1}{2}\ldots 1\ldots \frac{5}{4}\ldots 2\ldots \frac{m}{n}\ldots$

NOTA: Los números racionales contienen a los $I\!N$ y a los $\mathbb{Z}$.

4) EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES:

Es el conjunto de los números NO RACIONALES, es decir, aquellos números que no pueden expresarse como fracciones de la forma: $\frac{m}{n}$, con m y $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Por ejemplo, son números irracionales:

$$-\pi \ldots 3^{2/3} \ldots -e \ldots -2^{1/5} \ldots -\sqrt[3]{2} \ldots -\sqrt[3]{9} \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{3/5} \ldots \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots \sqrt{2} \ldots \sqrt{3}$$

Hay dos números irracionales muy importantes en las matemáticas:

Dichos números son:

i) El número: π (pi), cuya aproximación decimal es $\pi \approx 3.1416$
El número π se obtiene de la relación que existe entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, es decir:

$$\pi = \frac{C}{2R} \begin{cases} C = \text{longitud circunferencial} \\ R = \text{radio} \end{cases}$$

ii) El número: "e", cuya aproximación decimal es $e \approx 2.7182$
El número "e" es un límite:

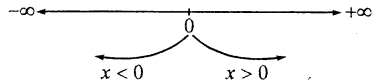
$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\frac{1}{n!}+\ldots$$

(5) EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES: $I\!R$

El conjunto de los números **REALES**, es la reunión de los números racionales, con los números irracionales, es decir:

$$\boxed{I\!R = \mathbb{Q} \cup I\!I}$$

Intuitivamente los números reales se representa por una recta y la llamamos **RECTA REAL**.



NOTA DE ACLARACIÓN:

El conjunto de todos los números reales no se puede expresar por extensión.
Sin embargo existen subconjuntos de números reales que sí se pueden expresar por extensión, tales como las sucesiones:

$$A = \left\{ x_n = \tfrac{n}{n+1} \,/\, n \in I\!N \right\} \ , \ B = \left\{ y_n = 2^n \,/\, n \in I\!N \right\}$$

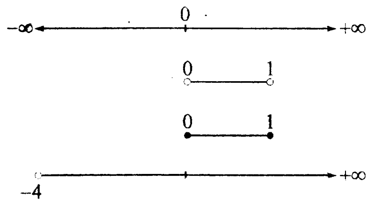
Los subconjuntos de números reales que no se pueden expresar por extensión son los intervalos, tales como:

$$\langle -\infty, +\infty \rangle = \{ x \,/\, x \in I\!R \}$$

$$\langle 0,1 \rangle = \{ x \in I\!R \,/\, 0 < x < 1 \}$$

$$[0,1] = \{ x \in I\!R \,/\, 0 \le x \le 1 \}$$

$$\langle -4, +\infty \rangle = \{ x \in I\!R \,/\, x > -4 \}$$



La definición **AXIOMÁTICA** de los números reales, la daremos más adelante. Por ahora, interesa que el estudiante tenga una **CLARA IDEA** de los números reales.

(6) EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS: $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \,/\, a \in I\!R \ \wedge \ b \in I\!R \ , \ i = \sqrt{-1} \}$$

Se lee: "Los números complejos, es el conjunto de los números de la forma "$a + bi$", tales que a y b pertenecen a los números reales, donde $i = \sqrt{-1}$ ".

NOTA:
La suma " $a+bi$ " también se representan por el par ordenado (a, b), donde la primera componente "a" se llama **PARTE REAL** y la segunda componente "b" se llama **PARTE IMAGINARIA**.

Simbólicamente es así:

$$\text{Si} \quad z = a + bi, \text{ entonces} \begin{cases} a = \operatorname{Re}(z) \\ b = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

Además $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|z|$ = módulo de z

$$\theta = \underbrace{Arg(z)}_{\text{argumento de } Z} = arc\ tg\left(\frac{b}{a}\right), \text{ donde } 0° \leq \theta < 2\pi$$

IMPORTANTE CONCLUSIÓN:

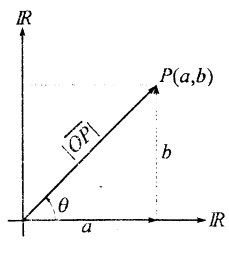
Como los números complejos se representan por pares ordenados y dichos pares ordenados **SON PUNTOS DEL PLANO** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entonces podemos extraer una importante conclusión: "Los números complejos son puntos de otro plano llamado PLANO COMPLEJO, que coincide con el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$".

Matemáticamente está "coincidencia" toma el nombre de **ISOMORFISMO ENTRE DOS CONJUNTOS.**

Para nuestro caso tenemos que "$\mathbb{C}$ es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$".

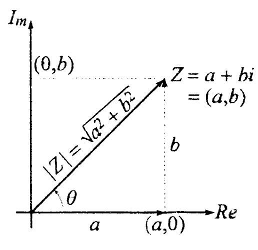
El estudio de los isomorfismos corresponde a otros cursos superiores de las matemáticas que no es de nuestra competencia en este momento.

Para una mejor idea, veamos gráficamente el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y el plano complejo $\mathbb{C}$:



PLANO $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

donde $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



PLANO COMPLEJO $\mathbb{C}$

donde $(a,b) \in \mathbb{C}$

EJEMPLOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

01

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2+\sqrt{-4} \\ &= 2+\sqrt{4(-1)} \\ &= 2+\sqrt{4}\sqrt{-1} \\ Z_1 &= 2+2i \\ Z_1 &= (2,2) \\ |Z_1| &= \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \\ \theta_1 = Arg(Z_1) &= arctg\left(\tfrac{2}{2}\right) = arctg\ (1) \\ \theta_1 &= \tfrac{\pi}{4} \end{aligned}$$

02

$$\begin{aligned} Z_2 &= 5 \\ &= 5+0i \\ Z_2 &= (5,0) \\ |Z_2| &= \sqrt{5^2+0^2} \\ &= 5 \\ \theta_2 = Arg(Z_2) &= arctg\left(\tfrac{0}{5}\right) \\ &= arctg(0) \\ \theta_2 &= 0^\circ \end{aligned}$$

03

$$\begin{aligned} Z_3 &= -5 \\ &= -5+0i \\ &= (-5,0) \\ |Z_3| &= \sqrt{(-5)^2+0^2} \\ &= 5 \\ \theta_3 = Arg(Z_3) &= arctg\left(-\tfrac{0}{5}\right) \\ &= arctg\ (0) \\ \theta_3 &= \pi \end{aligned}$$

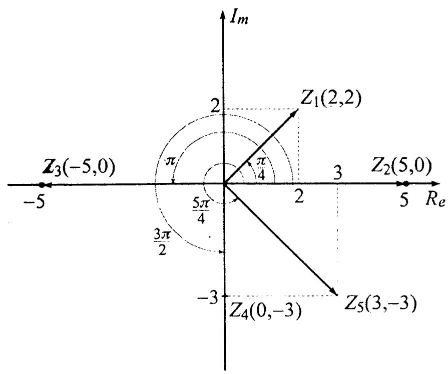
04

$$\begin{aligned} Z_4 &= -3i \\ &= 0-3i \\ |Z_4| &= -3i \\ &= 0-3i \\ \theta_4 = Arg(Z_4) &= arctg\left(\tfrac{-3}{0}\right) \\ &= arctg\ (+\infty) \\ \theta_4 &= \tfrac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

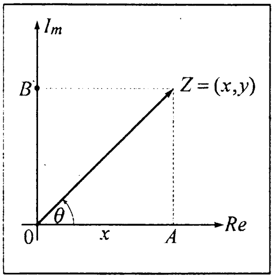
05

$$\begin{aligned} Z_5 &= 3-3i \\ &= (3,-3) \\ Z_5 &= \sqrt{(3)^2+(-3)^2} \\ &= 3\sqrt{2} \\ \theta_5 = Arg(Z_5) &= arctg\left(\tfrac{-3}{3}\right) \\ &= arctg\ (-1) \\ \theta_5 &= \tfrac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

Gráfico:



FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS



1. Sabemos que: $\boxed{Z = x + iy} = (x, y)$
FORMA BINOMIAL

donde $\begin{cases} x = Re\,(Z) \\ y = Im\,(Z) \end{cases}$

2. En el triángulo rectángulo OAZ, recto en A tenemos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|Z|} & \Longleftrightarrow & x = |Z|\cos\theta \\ sen\,\theta = \dfrac{y}{|Z|} & \Longleftrightarrow & y = |Z|\,sen\,\theta \end{cases}$$

3. Reemplazando (2) en (1) : $Z = |Z|\cos\theta \; + \; i\,|Z|\,sen\,\theta$

$$\boxed{Z = |Z|\,(\cos\theta \; + \; i\;sen\,\theta)}$$

FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

4. Pero: $\cos\theta + i\,sen\,\theta = e^{i\theta}$ y si $|Z| = r$ (Módulo de Z)

5. Reemplazando (4) en (3):

$Z = |Z|\,e^{i\theta} \quad \Longleftrightarrow$

$Z = r\,e^{i\theta}$	$r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = Arg\,(Z) = arctg\,\frac{y}{x}$
FORMA EXPONENCIAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS	

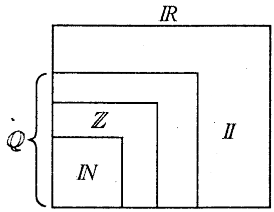
POTENCIAS DE $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{cases} i = \sqrt{-1} \\ i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\,i = -i \\ i = i \cdot i = (-1)(-1) = 1 \end{cases} \qquad i^n = \begin{cases} 1\,, \text{ si } n = \dot{4} \\ i\,, \text{ si } n = \dot{4} + 1 \\ -1\,, \text{ si } n = \dot{4} + 2 \\ i\,, \text{ si } n = \dot{4} + 3 \end{cases}$$

La notación $\dot{4}$ se lee "múltiplo de 4" es decir $\dot{4} = 4\,K$, $\forall\, K \in \mathbb{Z}$.

En consecuencia, cualquier potencia de i se reducen sólo a uno de los siguientes valores $\{\, i, -1, -i, 1 \}$.

Usando los diagramas de Veen-Euler para representar los números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; tendremos:



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$
$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$
$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

2.5 DETERMINACIÓN O DESIGNACIÓN DE CONJUNTOS

Un conjunto puede describirse de dos formas: por extensión y/o por comprensión.

2.5.1 DETERMINACIÓN POR EXTENSIÓN

Diremos que un conjunto se designa por ***extensión***, cuando es posible indicar explícitamente los elementos del conjunto, escribiéndolos uno a continuación de otro, separados por una coma y encerrados entre llaves $\{ a_1, a_2, a_3, \ldots \}$. Es decir, una lista de los elementos que forman el conjunto.

2.5.2 DETERMINACIÓN POR COMPRESIÓN

Un conjunto se designa **por comprensión**, cuando los elementos del conjunto pueden expresarse mediante **una propiedad o más propiedades, que es característica única y común a ellos**.

EJEMPLOS

POR EXTENSIÓN

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Se lee: "A es el conjunto formado por los números enteros consecutivos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6."

POR COMPRESIÓN

$$A = \{ x \in \mathbb{Z} / 0 < x < 7 \}$$

Se lee: "A es el conjunto de los "x" pertenecientes a los números enteros, tales que, las "x" sean mayores que 0 y menores que 7".

$B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}$

$C = \{ 1, 2, 4, 8, 16, \ldots \}$

$D = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$

$E = \{ 1, 3, 5, 7, \ldots \}$

$F = \left\{ 1, x, x^2, x^3, \ldots \right\}$

$G = \{ 5, 10, 15, 20, \ldots \}$

$H = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \right\}$

$I = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots \right\}$

$J = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{9}, \frac{4}{17}, \ldots \right\}$

$B = \left\{ \frac{1}{n} \Big/ n \in \mathbb{Z}^{+} \right\}$

$C = \left\{ 2^n \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}$

$D = \left\{ 2n \Big/ n \in \mathbb{Z}^{+} \right\}$ este conjunto son los números pares enteros positivos.

$E = \left\{ 2n - 1 \Big/ n \in \mathbb{Z}^{+} \right\}$

o $\{ 2n + 1 / n \in \mathbb{N} \}$

éste conjunto son los números impares enteros positivos.

$F = \{ x^n / n \in \mathbb{N} \}$

$G = \{ 5n / n \in \mathbb{Z}^{+} \}$

$H = \left\{ \frac{1}{2^n} \Big/ n \geq 2, n \in \mathbb{N} \right\}$

$I = \left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \Big/ n \in \mathbb{Z}^{+} \right\}$

$J = \left\{ \frac{n}{2^n + 1} \Big/ n \in \mathbb{Z}^{+} \right\}$

Tener en cuenta que: $\mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

1.6 CONJUNTOS BIEN DEFINIDOS

Diremos que un conjunto esta bien definido, si **podemos conocer todos los elementos del conjunto**.

Es decir, si dado cualquier objeto podemos afirmar si dicho objeto pertenece o no al conjunto.

PROBLEMAS

01. Dados los conjuntos:

$$A=\left\{ x=\frac{p}{q} \Big/ p\,,q\in I\!N\ \wedge\ \text{uno por lo menos es } 5\right\}$$

$$B=\left\{ x=\frac{p}{q} \Big/ p\,,q\in I\!N\ \wedge\ q\neq 0\ \wedge\ p+q=\text{múltiplo de } 2\right\}$$

$$C=\left\{ x=\frac{p}{q} \Big/ p\,,q\in I\!N\ \wedge\ q\neq 0\ \wedge\ q\geq p\right\}$$

$$E_1=\left\{ x\in \mathbb{Q} \Big/ \ x=\frac{5-2K}{5}\ ,\ K=0,1,2\right\}$$

$$E_2=\left\{ x\in \mathbb{Q} \Big/ \ x=\frac{5}{5+2K}\ ,\ K\in I\!N\right\}$$

Demostrar que: $A\cap B\cap C\subset E_1\cup E_2$

***R*:** $$A=\left\{ \frac{5}{q} \Big/ q\in I\!N^+\right\}\cup\left\{ \frac{p}{5} \Big/ p\in I\!N\right\}$$

$$B=\left\{ \frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\ldots,\frac{3}{1},\frac{5}{1},\frac{7}{1},\ldots,\frac{2}{4},\frac{4}{2},\ldots,\frac{5}{3},\frac{3}{5},\ldots\frac{5}{7},\frac{7}{5},\ldots\right\}$$

$$C=\left\{ \frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\ldots,\frac{1}{5},\ldots,\ldots\frac{3}{5},\ldots,\frac{5}{5},\ldots,\frac{5}{7},\ldots\ldots\right\}$$

$$A\cap B\cap C=\left\{ \frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{5}{5},\frac{5}{7},\ldots\right\}$$

$$E_1=\left\{ \frac{5}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right\}\quad,\quad E_2=\left\{ \frac{5}{5},\frac{5}{7},\frac{5}{9},\frac{5}{11},\frac{5}{13},\frac{5}{15},\ldots\right\}$$

02. a) ***Definición***: Sea A un conjunto y T una colección de subconjuntos de A que cumplen:

i) ϕ y A están en T.

ii) Una reunión cualquiera de elementos de T, está en T.

iii) Una intersección de n elementos de T están en $T\,(n=2\,,3\,,\,\ldots)$

Si $A=\{1,2,3\}$, hallar todas las colecciones de subconjuntos T definidades en A.

b) Sean los conjuntos: $A=\{0,1,3,7,8,9\}$; $B=\{1,5\}$; $C=\{0\}$

¿Cuántos subconjuntos de A no vacíos, cumplen la condición de que no están incluidos en $B\cup C$?

03. Dado $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Si $A=\{x\in U\,/\,2\leq x<7\}$

$B=\{x\in U\,/\,(x-2)\,(x^2-11x+28)=0\}$

$C=\{x\in U\,/\,x\leq 3\}$

hallar todos los subconjuntos X de U tales que: $X \subset (A-B) \quad \wedge \quad X \not\subset (A \cap \complement C)$

04. Dado los conjuntos $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$, E conjunto universal.

$E = \{ x \in \mathbb{Z}^+ / x < 10 \}$

Si: $\complement A = \{ x \in E / x < 7 \}$

$A \cup B = \{ x \in E / x \leq 9 \ \wedge \ x > 2 \}$

$B \cup C = \{ x \in E / x \leq 7 \}$

$B \cap C = \{ 3 \}$

$A \cap C = \complement A \cap \complement B \cap \complement C = \phi$

Determinar A, B , C .

05. Sean los conjuntos: $A = \{ x \in \mathbb{Z} / x \text{ es impar} \}$

$B = \{ x \in \mathbb{Z} / x \text{ es múltiplo de } 5 \}$

$C = \{ x \in \mathbb{Z} / x \geq 100 \quad \vee \quad x^2 < 25 \}$

Utilizando sólo comprensión, determinar el conjunto $(\complement C \cup B) - \complement A$.

2.7 CUANTIFICADORES: EXISTENCIAL Y UNIVERSAL

Introducción.- Toda expresión que contiene una o más variables es un enunciado abierto.

Ejemplos:

$P(x) : \ 0 < x < 2$

$Q(y) : \ (y-1)^2 \geq 0$

$E(n) : \ 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(1+n)}{2}$

$E(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 25$

A partir de estos enunciados abiertos se pueden construir proposiciones asignando a cada variable valores tomados de un cierto conjunto.

Por ejemplo:

1) En $P(x)$: $0 < x < 2$, si asignamos a la variable x cualquier valor $x \in \mathbb{N}$, obtendremos las siguientes proposiciones:

$$P(2) \ : \ 0 < 2 < 2 \qquad (F)$$
$$P(1) \ : \ 0 < 1 < 2 \qquad (V)$$

2) En $Q(y):(y-1)^2 \geq 0$, si $y \in IR$, obtenemos las siguientes proposiciones:

$$Q(-1) \ : \ (-2)^2 \geq 0 \qquad (V)$$
$$Q(1/3) \ : \ \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 \geq 0 \qquad (V)$$

3) En $E(n)$: $1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(1+n)}{2}$, si $n \in \mathbb{Z}^+$, obtenemos las siguientes proposiciones:

$$E(2) \ : \ 1+2=\frac{2(1+2)}{2} \qquad (V)$$
$$E(5) \ : \ 1+2+3+4+5=\frac{5(1+5)}{2} \qquad (V)$$

4) En $E(x,y): x^2+y^2 \leq 25$, si $(x,y) \in IR^2$, obtendremos las siguientes proposiciones:

$$E(0,-5) \ : \ 0+25 \leq 25 \qquad (V)$$
$$E(-2,-5) \ : \ 4+25 \leq 25 \qquad (F)$$

Ahora, si a cada enunciado abierto le anteponemos la expresión "para todo" o la expresión "existe", estaremos obteniendo nuevas proposiciones cuantificadas universalmente o existencialmente, respectivamente.

2.7.1 CUANTIFICADOR UNIVERSAL

Si a una proposición abierta $P(x)$, donde los valores de la variable x están definidas sobre un conjunto A, le anteponemos la expresión "**PARA TODO** x", obtenemos una proposición de la forma:

"Para todo $x \in A$, $P(x)$ es verdadero" que se simboliza por "$\forall x \in A$, $P(x)$ "

El símbolo "$\forall$" = para todo, se llama **CUANTIFICADOR UNIVERSAL**.

Ejemplos: 1) "$\forall y \in IR$, $(y-1)^2 \geq 0$" es V

2) "$1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(1+n)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$" es V

3) "$(x-1)^2>0$, $\forall x \in IR$" es F , porque para $x=1$ es $0>0$ que es F.

OTRAS FORMAS DE LEER LA PROPOSICIÓN

"$\forall\, x \in A \;,\; P(x)$"

son: "Para cada x en A, $P(x)$"
"cualquiera que sea x en A, $P(x)$"
"$P(x)$, para cada x en A"
"$P(x)$, para todo x en A"

4. $x^2 + 1 < 0 \;,\; \forall\, x \in I\!R$ es F
5. $x^2 + 1 > 0 \;,\; \forall\, x \in I\!R$ es V
6. $e^{-x} > 0 \;,\; \forall\, x \in I\!R$ es V
7. $Ln\, x > 0 \;,\; \forall\, x \in I\!R$ es F
8. $Ln\, x > 0 \;,\; \forall\, x > 1$ es V.
9. $Ln\, x > 0 \;,\; \forall\, x \le 1$ es F
10. $Ln\, x < 0 \;,\; \forall\, x \in \langle 0,1 \rangle$ es V

2.7.2 CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Si al enunciado abierto $P(x)$, donde $x \in A$, le anteponemos la frase "**EXISTE** x", obtenemos una proposición de la forma

"Existe $x \in A$, tal que $P(x)$ es cierta" que se denota por:
"$\exists\, x \in A \,/\, P(x)$"

El símbolo "$\exists$" = existe, se llama cuantificador **EXISTENCIAL**.

Ejemplo:
1) $\exists\, x \in I\!N \,/\, 0 < x < 2$ es V , con $x = 1$
2) $\exists\, x \in \mathbb{Z} \,/\, 2x = 1$ es F , pues $x = 1/2$ no es entero.
3) $\exists\, x \in I\!R \,/ (x^2 - 1)^2 \le 0$ es V , con $x = \pm 1$ se cumple la igualdad.

OTRAS FORMAS DE LEER LA PROPOSICIÓN

"$\exists\, x \in A \,/\, P(x)$"

son: "existe por lo menos un $x \in A$, tal que $P(x)$ es cierta"
"Para algún x en A, $P(x)$"
"$P(x)$, para algún x en A"
"Hay al menos un x en A, tal que $P(x)$"

NOTACIÓN:
La notación "$\exists!$" se lee "**EXISTE UN ÚNICO** .... "

Ejemplos:

1. $P(x)$: "$\exists!\, x \in \mathbb{Z} \,/\, 2 < x < 4$" es V porque $x = 3$ es el único número entero que cumple $2 < 3 < 4$.

2. $Q(x)$: "$\exists!\ x \in I\!R \,\big/\, (x+1)^2 \le 0$" es V porque $x = -1$ es el único número real tal que cumple $(x+1)^2 \le 0$.

   Pues: $(-1+1)^2 \le 0 \iff \underbrace{\underbrace{(-1+1)^2 < 0}_{F} \ \vee\ \underbrace{(-1+1)^2 = 0}_{V}}_{V}$

3. $R(x)$: "$\exists!\ x \in I\!R \,/\, e^{x^2-9} = 1$" es F, por existen dos valores: $x = \pm 3$.

2.8 NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES

Sea $P(x)$ un enunciado abierto, definido en un cierto conjunto A, las proposiciones cuantificadas: "$\forall\, x, P(x)$" y "$\exists\, x \,/\, P(x)$" se pueden negar obteniéndose otras proposiciones.

Sus respectivas negaciones son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sim[\forall\, x, P(x)] \equiv \exists\, x / \sim P(x) \\ \sim[\exists\, x / P(x)] \equiv \forall\, x, \sim P(x) \end{array}}$$

Ejemplos:

1) $\sim[\forall\, n\ ,\ n \in I\!N\ ,\ n+2 < 5] \equiv \exists\, n\ ,\ n \in I\!N \,/ \sim(n+2 < 5)$
$\qquad \equiv \exists\, n\ ,\ n \in I\!N \,/\, n+2 \ge 5$

2) $\sim[\,\exists\, x / x^3 = x^2\,] \equiv \forall\, x, \sim(x^3 = x^2)$
$\qquad \equiv \forall\, x, x^3 \ne x^2$

3) $\sim[\,\exists\, x \in I\!R \,/\, 1 \le x^2 < 4\,] \equiv \forall\, x \in I\!R\ ,\ \sim(1 \le x^2 < 4)$
$\qquad \equiv \forall\, x \in I\!R\ ,\ x^2 < 1 \ \vee\ x^2 \ge 4$

4) $\sim[\forall\, x \in A\ ,\ p(x) \longrightarrow q(x)] \equiv \exists\, x \in A / p(x) \ \wedge\ \sim q(x)$

2.9 CUANTIFICACIONES CON DOS O MÁS CUANTIFICADORES

Ejemplo 1:

Sea $A=\{0,1,2\}$, determinar el valor de verdad de cada **una de las siguientes** proposiciones:

a) P : $\forall\, x\in A\ ,\ \forall\, y\in A\ ,\ y^2\leq 4(x+1)$ .... **es V**

b) Q : $\forall\, x\in A\ ,\ \exists!\ y\in A\ ,\ y=\begin{cases}\frac{2|x|}{x} & ,\ x\neq 0\\ 2 & ,\ x=0\end{cases}$ .... **es V**

c) E : $\exists!\, x\in A/\forall\, y\in A\ ,\ (x-1)^2\leq y$ .... **es V**

d) F : $\exists!\, x\in A/\exists!\, y\in A\ ,\ x^2+y^2=0$ .... **es V**

Comprobación:

a) $\forall\, x\in A\ ,\ \forall\, y\in A: y^2\leq 4(x+1)$.

$x=0$:
- $0^2\leq 4$ V
- $1^2\leq 4$ V
- $2^2\leq 4$ V

Como vemos, la proposición P es VERDADERO, porque se cumple $\forall\, x\in A$ y $\forall\, y\in A$

$x=1$:
- $0^2\leq 8$ V
- $1^2\leq 8$ V
- $2^2\leq 8$ V

$x=2$:
- $0^2\leq 12$ V
- $1^2\leq 12$ V
- $2^2\leq 12$ V

b) Q es V porque: $\forall\, x\in A\ ,\ y=2$ es el único elemento de A que hace verdadero la proposición.

c) E es verdadero, porque $x=1$ es el único elemento que hace verdadero la proposición $\forall\, y\in A$

d) F es verdadero, porque $x=0$, $y=0$ son los únicos valores que hacen verdadero la proposición.

Ejemplo 2:

Sean $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{-1,0,1\}$, determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

e) $\forall\, x\in A$, $\forall\, y\in B$, $4x^2+y^2\le 17$ .... **es V**

f) $\forall\, x\in A$, $\exists\, y\in B/\,1-\frac{x^2}{4}\le y^2+1<2$ .... **es V**

Ejemplo 3: Sean $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{4,2,0,-2\}$, determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

g) $\forall\, x\in A$, $\forall\, y\in B$, $2x+y=4$ .... es F

h) $\forall\, x\in A$, $\exists\, y\in B/(x-1)^2>y$ .... es V

i) $\exists\, y\in B\,/\,\forall\, x\in A$, $(x-1)^2>y$ .... es V, basta que cumpla con $y=-2$

En g) si $x=0$, "$y=4$, $\forall\, y\in B$" es F

$$\text{En h) si}\quad x=\begin{cases}0\ ,\ \text{“}\exists\, y\in B\,/\,1>y\text{”}\ \text{es V}\\ 1\ ,\ \text{“}\exists\, y\in B\,/\,0>y\text{”}\ \text{es V}\\ 2\ ,\ \text{“}\exists\, y\in B\,/\,1>y\text{”}\ \text{es V}\\ 3\ ,\ \text{“}\exists\, y\in B\,/\,4>y\text{”}\ \text{es V}\end{cases}$$

las 4 proposiciones son V, por tanto h es V

En i) Si $y=-2$ se tiene "$(x-1)^2>-2$, $\forall\, x\in A$" es V.
Luego , i) es V.

NOTA: La proposición $p:\ (\forall\, x\in I\!R\ ,\ x\neq 0)$, $(\exists\, y\in I\!R)\,/\,xy=1$ es V
Mientras que $q:\ (\exists\, y\in I\!R)\,/\,\forall\, x\in I\!R$, $x\neq 0$, $xy=1$ es F

En p tenemos: si $x=2$ $\exists\, y=½$ tal que $xy=1$
En q tenemos: si $y=2$, la igualdad $2x=1$ no se cumple $\forall\, x\in I\!R$.

CONSECUENCIA: **NO** son iguales "$\forall\, x \in A\ ,\ \exists\, y \in B : P(x,y)$"
y "$\exists\, y \in B\ ,\ \forall\, x \in A : P(x,y)$"
porque la jerarquía de los cuantificadores son de izquierda a derecha. Pues los cuantificadores, universal y existencial son operadores monádicos, y como tales sólo operan hacia la derecha.

Ejemplo 4: Negar las proposiciones de los ejemplos 2 y 3.

Solución:

e) $\sim(\forall\, x \in A\ ,\ \forall\ y \in B\ ,\ 4x^2 + y^2 \le 17) \equiv \exists\, x \in A / \sim(\forall\, y \in B\, , 4x^2 + y^2 \le 17)$
$\equiv \exists\, x \in A\ /\ \exists\, y \in B / 4x^2 + y^2 > 17$

f) $\sim\left(\forall\, x \in A\ ,\ \exists\, y \in B \Big/ 1 - \frac{x^2}{4} \le y^2 + 1 < 2\right) \equiv \exists\, x \in A / \forall\, y \in B\ ,\ 1 - \frac{x^2}{4} > y^2 + 1$
$\vee\ \ y^2 + 1 \ge 2\,.$

g) $\sim\left(\forall\, x \in A\ ,\ \forall\, y \in B\ ,\ 2x + y = 4\right) \equiv \exists\, x \in A / \sim(\forall\, y \in B\ ,\ 2x + y = 4)$
$\equiv \exists\, x \in A / \exists\, y \in B / 2x + y \ne 4$

h) $\sim\left(\forall\, x \in A\ ,\ \exists\, y \in B \Big/ (x-1)^2 > y\right) \equiv \exists\, x \in A \Big/ \sim(\exists\, y \in B / (x-1)^2 > y)$
$\equiv \exists\, x \in A / \forall\, y \in B\ ,\ (x-1)^2 \le y$

i) $\sim\left(\exists\, y \in B \Big/ \forall\, x \in A\ ,\ (x-1)^2 > y\right) \equiv \forall\, y \in B, \exists\, x \in A / (x-1)^2 \le y$ es F.

OTROS EJEMPLOS SOBRE NEGACIÓN

1) $\sim(\forall\, x \in A, \exists\, y \in B / \underbrace{E(x) \to F(y)}_{\sim E(x)\ \vee\ F(y)}) \equiv \exists\, x \in A / \forall\, y \in B, E(x) \wedge \sim F(y)$

2) $\sim(\exists\, x \in A / \exists\, y \in B / P(x) \wedge P(y)) \equiv \forall\, x \in A, \forall\, y \in B / \sim P(x) \vee \sim P(y)$

3) $\sim(\exists\, x \in A / \forall\, y \in B\ ,\ E(x) \vee [\sim F(y)]) \equiv \forall\, x \in A, \exists\, y \in B / \sim E(x) \wedge F(y)$

4) $\sim(\forall\, y \in B\ ,\ \exists\, x \in A / y = f(x)) \equiv \exists\, y \in B / \forall\, x \in A\ ,\ y \ne f(x)$

5) $\sim(\forall\, \varepsilon>0\ ,\ \exists\, \delta>0\,/\,|x-x_0|<\delta\ \wedge\ x\in D_f \rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon) \quad\equiv$

$\equiv \exists\, \varepsilon>0\,/\,\forall\, \delta>0\ ,\ \sim\Big(\big(\,|x-x_0|<\delta\ \wedge\ x\in D_f\,\big) \rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\Big)$

$\equiv \exists\, \varepsilon>0\,/\,\forall\, \delta>0\ ,\ (|x-x_0|<\delta\ \wedge\ x\in D_f)\ \wedge\ |f(x)-L|\geq\varepsilon$

6) $\sim(\forall\, x\in A\ ,\ x\in A \rightarrow x\in B) \equiv \exists\, x\in A\,/\,x\in A\ \wedge\ x\notin B$

7) $\sim\{\,[\forall\, x\in A\,,\,P(x)\rightarrow q(x)]\ \vee\ [\exists\, y\in A\,/\,E(y)\rightarrow \sim F(y)]\,\}$

$\equiv\quad \sim[\forall\, x\in A\,,\,P(x)\rightarrow q(x)]\ \wedge\ \sim[\exists\, y\in A\,/\,E(y)\rightarrow\sim F(y)]$

$\equiv\quad [\exists\, x\in A\,/\sim(P(x)\ \rightarrow\ q(x))]\ \wedge\ [\forall\, y\in A\,,\sim(E(y)\rightarrow\sim F(y))]$

$\equiv\quad [\exists\, x\in A\,/\,P(x)\ \wedge\ \sim q(x)]\ \wedge\ [\forall\, y\in A\,,\,E(y)\ \wedge\ F(y)]$

2.10 PROBLEMAS

Formalizar, simplificar y negar las siguientes proposiciones compuestas:

(1) Si todos los números enteros son pares, entonces hay algún número entero primo si, y solo si, todos los números enteros no son primos; pero cualquier número entero no es primo.

(2) Cualquier número entero es par y existen números enteros primos, si hay algún entero impar, sí y solo si, hay algún número entero primo o cualquier número entero par, si cada número entero no es primo.

(3) Hay algún número entero primo, si todos los números enteros son pares, pero hay algún entero impar. Por tanto, cualquier entero no es primo.

(4) Negar las siguientes proposiciones:

$P \equiv \forall\, x\in I\!R\ ,\ \exists\ M\in\mathbb{Z}\,/\,x<M \ \Rightarrow\ x^2<M+1$

$q \equiv \forall\, r\in\mathbb{Q}\ ,\ \exists\ n\in\mathbb{Z}\,/\,n\leq r<n+1$

Solución:

(1) P : $\forall\, x\in\mathbb{Z}$, x es par.

q : $\exists\, x\in\mathbb{Z}\,/\,x$ es primo.

$[(p\rightarrow q)\ \leftrightarrow\ \sim q]\ \wedge\ \sim q \equiv \sim(p\vee q)$. Su negación es: $p\vee q$

(2) $[(\sim p\rightarrow(p\wedge q)]\ \leftrightarrow\ [\sim q\rightarrow(q\vee p)] \equiv\ p\ \vee\ (\sim q)$

La negación es: $\sim p\ \wedge\ q$

③ $[(p \to q) \wedge (\sim p)] \to \sim q \equiv p \vee \sim q$. La negación es: $\sim p \wedge q$.

④ Negar las siguientes proposiciones:

$p \equiv \forall\, x \in I\!R \;,\; \exists\, M \in \mathbb{Z} \,/\, x < M \longrightarrow x^2 < M+1$

$q \equiv \forall\, r \in \mathbb{Q} \;,\; \exists\, n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq r < n+1$

Solución: $\sim p \equiv \exists\, x \in I\!R \,/\, \forall\, M \in \mathbb{Z} \;,\; x < M \;\wedge\; x^2 \geq M+1$

$\sim q \equiv \exists\, r \in \mathbb{Q} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{Z} \;,\; n > r \;\vee\; r \geq n+1$

2.11 SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES CATEGÓRICAS

Son 4:
1. Universal afirmativo : Todos los x son $p \equiv \forall\, x : P(x)$
2. Universal negativo : Ningún x es $p \equiv \forall\, x : \sim p(x)$
3. Particular afirmativo : Algún x es $p \equiv \exists\, x \,/\, p(x)$
4. Particular negativo : Algún x no es $p \equiv \exists\, x \,/ \sim p(x)$

Ejemplos:

a) P : Todos los números racionales son impropios $\equiv \forall\, x \in \mathbb{Q} \;,\; x > 1$

$\sim P : \exists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x \leq 1$

b) q : Ningún número racional es impropio $\equiv \forall\, x \in \mathbb{Q} \;,\; x \leq 1$

$\sim q : \exists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x > 1$

c) r : Algún número racional es propio $\equiv \exists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x < 1$

$\sim r : \forall\, x \in \mathbb{Q} \,,\, x \geq 1$

d) s : Algún número racional no es propio $\equiv \exists\, x \in \mathbb{Q} / x \geq 1$

$\sim s : \forall\, x \in \mathbb{Q} \,,\, x < 1$

2.12 CUANTIFICACIÓN DE LAS FORMAS CATEGÓRICAS TÍPICAS DE LA LÓGICA TRADICIONAL

Son 4: A : Todos los S son $P \equiv \forall\, x\,[S(x) \to P(x)]$

"Para todo x, si x es de S entonces x es de P"

B : Ningún S es $P \equiv \forall\, x[S(x) \to \sim P(x)]$

"Para todo x, si x es de S entonces x no es de P"

I : Algunos S son $P \equiv \exists x[S(x) \wedge P(x)]$
"Para algún x, x es de S y x es de P"

O : Algunos S no son $P \equiv \exists x[S(x) \wedge \sim P(x)]$
"Para algún x, x es de S pero no es de P"

2.13 PROBLEMAS

① Determinar el valor de verdad de: p : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\exists y \in \mathbb{Q}$, $x+y=0$

q : $\exists y \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x+y=0$

Solución:

En p : si $x=2$, "$\exists y \in \mathbb{Q} / 2+y=0$" es V

si $x=-\frac{3}{5}$, "$\exists y \in \mathbb{Q} / -\frac{3}{5}+y=0$" es V

$\vdots$

"Para cualquier $x \in \mathbb{Q}$ existe su opuesto $y=-x$, tal que $x+y=0$"

Por tanto : p es V.

En q : si $y=\frac{1}{2}$, "$x+\frac{1}{2}=0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$" es F

Por tanto : q es F.

② Dados los conjuntos: $A=\{x \in \mathbb{N} / 2x \leq 13\}$

$B=\{x \in A / (x^2-2x) \notin A\}$

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

p : $\forall x \in (A-B)$, $\exists y \in B / x^2-2x \geq y-3$

q : $\exists x \in B$, $\exists y \in (A-B)$, $\forall z \in B$: $(x+y^2+z) \in A$

r : $\forall x \in (A-B)$: $x^2 \notin A$

Solución:

1. En primer lugar, tabulemos los conjuntos A y B:

$A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$B=\{1,4,5,6\}$ y $A-B=\{0,2,3\}$

2. Veamos el valor de verdad de p:

$$\text{Si} \quad (A-B) \ni x = \begin{cases} 0 \ , \ \text{“}\exists\, y \in B \,/\, 0 \geq y-3\text{” es } V \text{ con } y=1 \\ 2 \ , \ \text{“}\exists\, y \in B \,/\, 0 \geq y-3\text{” es } V \text{ con } y=1 \\ 3 \ , \ \text{“}\exists\, y \in B \,/\, 3 \geq y-3\text{” es } V \text{ con } y=4 \end{cases}$$

Entonces p es V.

3. Veamos el valor de verdad de q :

$\exists\, x \in B = \{1,4,5,6\}$, $\exists\, y \in (A-B) = \{0,2,3\}$, $\forall\, z \in B = \{1,4,5,6\} : (x+y^2+z) \in A$

si $x=1$, $y=0$; la proposición “$(1+z) \in A$, $\forall\, z \in B$” es F, falla con $z=6$.

Por tanto: q es F.

4. Veamos el valor de verdad de r :

$$(A-B) \ni x = \begin{cases} 0 \ : \ 0^2 \notin A \text{ es } F \\ 2 \ : \ 2^2 \notin A \text{ es } F \\ 3 \ : \ 3^2 \notin A \text{ es } F \end{cases}$$

Como hay dos proposiciones falsas, es más que suficiente para afirmar que r es F.

3 Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{-2,-1,0,5,6\}$ establecer el valor de verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones, justificando debidamente su respuesta.

p : $\forall\, x \in A$, $\exists\, y \in B$: $x+y<3$

q : $\exists!\, y \in B$, $\forall\, x \in A$: $x-y>1$

r : $\forall\, x \in B$, $\forall\, y \in A$: $x<y \Rightarrow x^2<y^2$

s : $\exists\, x \in A$, $\exists\, y \in B$: $(x-y) \in A$

Solución:

1. En P :

$$A \ni x = \begin{cases} 1 \ : \ \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < 2\text{” es V} \\ 2 \ : \ \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < 1\text{” es V} \\ 3 \ : \ \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < 0\text{” es V} \\ 4 \ : \ \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < -1\text{” es V} \\ 5 \ : \ \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < -2\text{” es F} \end{cases}$$

Luego, $\boxed{P \text{ es } F}$; porque no se cumple para todos los elementos del conjunto A, falla con $x = 5$.

2. En q, probemos $\quad y = -2 \in B$: "$x-(-2) > 1$, $\forall\, x \in A$" es V

con $\quad y = -1 \in B$: "$x-(-1) > 1$, $\forall\, x \in A$" es V

Luego, no existe valor único, existe hasta dos.

Por tanto, $\boxed{q \text{ es F}}$

3. En r : bastará que falle una vez para afirmar que r es F .

Vemos: Si $x = -2 \in B \;\wedge\; y = 1 \in A$, se tendrá: $\underset{\text{V}}{-2 < 1} \rightarrow \underset{\text{F}}{4 < 1}$

F

Luego, $\boxed{r \text{ es F}}$

4. En s, si $x = 1 \in A \;\wedge\; y = -2$ se tiene "$1-(-2) = 3 \in A$" es V.

Como vemos, basta que se cumpla por lo menos con un solo elemento para A y de B, para afirmar que la proposición es verdadero.

Luego. $\boxed{s \text{ es V}}$

4 Sea $A = \{x \in I\!N \,/\, x \leq 50\}$ el conjunto universal y sean p, q y r las proposiciones cuantificadas siguientes:

p : $\forall\, x \in A$, $\exists\, y \in A \,/\, x + 2y > x^2$

q : $\forall\, x \in A$, $\exists\, y \in A$, $\forall\, z \in A$: $x + y - z \leq x + y$

r : $\exists\, x \in A$, $\exists\, y \in A$, $\forall\, z \in A$: $x - 2y \geq x + y - z$

Hallar el valor de verdad de: $[(p \rightarrow q)\, \Delta\, (q \rightarrow r)] \;\leftrightarrow\; [q \vee \sim r]$

Solución:

1. Hallemos el valor de p

Se pide: para todo x en A, existe algún $y \in A / x + 2y > x^2$.

Para afirmar que p es V, debe cumplirse para todo $x \in A$. Si falla para algún $x \in A$, será falsa.

Veamos:

La desigualdad $x + 2y > x^2$ es equivalente a:

$$\frac{x(x-1)}{2} < y$$

Si probamos con $x = 50 \in A$ tendremos "$\exists\, y \in A \Big/ \frac{(50)(49)}{2} < y$" es F, porque no existe ningún $y \in A$, tal que $(25)(49) < y$.

Luego; $\boxed{p \text{ es F}}$

2. Hallar el valor de q.

   q : Para todo x en A, existe algún y en A, tal que para todo z en A, se cumple:
   $x + y - z \leq x + y$

   Antes de analizar, simplifiquemos: $x + y - z \leq x + y$

   $$\Longleftrightarrow \quad z \geq 0$$

   Así la proposición q se reduce a q: "$z \geq 0$, $\forall\, z \in A$" es V.

   Luego: $\boxed{q \text{ es V}}$

3. Hallar el valor de verdad de r
   r : Para algún x en A, hay al menos un y en A, tal que:
   "$x - 2y \geq x + y - z$, para todo z en A".

   En primer lugar debemos simplificar la desigualdad:

   $x - 2y \geq x + y - z \quad \Longleftrightarrow \quad z \geq 3y$, así r es:

   r : "$\exists\, y \in A , \forall\, z \in A$: $z \geq 3y$"

   "hay al menos un $y \in A$, tal que: $z \geq 3y$, para todo z en A"

   Con $y = 0$, se cumple "$z \geq 0$, $\forall\, z \in A$"

   Luego, $\boxed{r \text{ es V}}$

   Finalmente, tabulemos el valor de: $[(p \to q) \;\Delta\; (q \to r)] \to [q \vee \sim r]$

   $$\begin{array}{ccccccccc} [(p & \to & q) & \Delta & (q & \to & r)] & \to & [q \vee \sim r] \\ F & & V & & V & & V & & V \quad F\,V \\ & V & & F & & V & & & V \\ & & & & & & & (V) & \end{array}$$

(5) Dado $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

p : $\forall\, x \in U : \exists\, y \in U \;\wedge\; \exists\, z \in U$ tales que $2x - y + z < 10$

q : $\exists\, x \in U$ tal que: $\forall\, z \in U$, $\exists\, y \in U$ tal que $2x - y + z < 10$

Solución:

1. p : "Para cada $x \in U$: hay al menos un $y \in U$ $\wedge$ existe por lo menos un $z \in U$, tales que $2x - y + z < 10$"

   Como se pide para todo $x \in U$, en particular escojamos el mínimo y máximo valores de U.

   Así:

   Si $x = 0$, se tiene la proposición "$\exists\, y \in U$, $\exists\, z \in U / z - y < 10$" que es V para $y = 0 \wedge z = 0$.

   Si $x = 10$, se tiene la proposición "$\exists\, y \in U$, $\exists\, z \in U / 10 + z < y$" que es F, porque no existen valores para $y \wedge z$ pertenecientes a U que hagan verdadero la proposición.

   Entonces $\boxed{p \text{ es F}}$

2. q : "Hay al menos un $x \in U$, tal que: para todo $z \in U$, existe algún $y \in U$, tal que $2x - y + z < 10$"

   Si $x = 0$, la proposición "$\underbrace{\forall\, z \in U \;,\; \exists\, y \in U / z < 1 + y}_{\text{es V}}$"

   Pues, para todo $z \in U$, siempre es posible hallar por lo menos algún $y \in U$, tal que $z < 1 + y$

   Con $z = 0$, "$\exists\, y \in U / 0 < 1 + y$" es V con $y = 1, 2, \ldots$

   Con $z = 1$, "$\exists\, y \in U / 0 < y$" es V con $y = 1, 2, \ldots$

   $\vdots$

   Con $z = 10$, "$\exists\, y \in U / 9 < y$" es V con $y = 10$.

   Luego, $\boxed{q \text{ es V}}$

(6) Sean las proposiciones p, q y r, dadas por:

p : "$\forall\, y \in I\!N$, $\exists\, x \in I\!N$: $x > y \;\wedge\; x$ es par"

q : "$\exists\, x \in I\!N$: $\forall\, y \in I\!N$: $y < x$"

r : "$\forall\, x \in I\!N$, $\forall\, y \in I\!N$: $x + y > x$"

Deducir y fundamente el valor de verdad de cada una de dichas proposiciones.

Solución:

1. Tener en cuenta que $I\!N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

2. p : " para todo $y \in I\!N$, hay al menos un $x \in I\!N$: $x > y \wedge x$ es par "

para $y = 0$, hay $x = 2$ tal que $2 > 0$ es V

para $y = 1$, hay $x = 2$ tal que $2 > 1$ es V

para $y = 2$, hay $x = 4$ tal que $4 > 2$ es V

$\vdots$

para todo $y \in I\!N$, siempre será posible encontrar algún x par tal que $x > y$.

Luego, $\boxed{p \text{ es } V}$

3. q : "Hay al menos un $x \in I\!N$, tal que, para todo $y \in I\!N$ se cumple: $y < x$ "

Si probamos con $x = 0$, " $y < 0$, $\forall\, y \in I\!N$ " es F.

No va a ser posible encontrar algún $x \in I\!N$, tal que " $y < x, \ \forall\, y \in I\!N$ "

Luego, $\boxed{q \text{ es } F}$

4. r : Al simplificar: " $y > 0, \ \forall\, y \in I\!N$ " es F, falla con $y = 0$.

Luego, $\boxed{r \text{ es } F}$

2.14 VARIABLE Y CONJUNTO UNIVERSAL

El conjunto de todos los objetos que representa la variable x, en un determinado tema de interés, se llama **EL UNIVERSO** de la variable o **CONJUNTO UNIVERSAL** de la variable.

NOTACIÓN: $\underset{\text{conjunto universal}}{U} = \{ x / x = x \}$

Ejemplos:

1) $U = \{ x/x \in \mathbb{N} \}$

2) $U = \{ x/x$ es un alumno ingresante en la UNI en 1980 $\}$

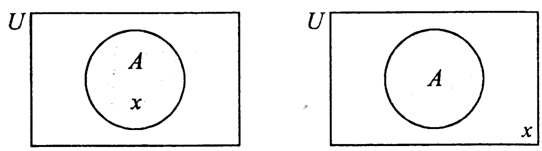
3) $U = \{ x/x$ es un ciudadano hábil para elegir y ser elegido $\}$

4) $U = \{ x/x$ es una persona entre 20 y 25 años de edad $\}$

En matemáticas, son conjuntos universales importantes y básicos:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$

En un diagrama de Venn, el conjunto universal, se representa por un rectángulo:



$x \in A$ $\qquad$ $x \notin A$

Si x es una variable que representa a un elemento del conjunto universal U y A es un conjunto de elementos referentes al universo U, entonces puede ocurrir uno y sólo uno de las siguientes posibilidades: $x \in A$ o $x \notin A$.

2.14.1 PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN

Si $p(x)$ es una proposición verdadera para $x \in A$ y si $u = x$, entonces $p(u)$ también es verdadera.

Ejemplos:

1) $P(x)$: $x^2 < 4$ es verdadera para $-2 < x < 2$, entonces:
   $P(u)$: $u^2 < 4$ también es verdadera para $-2 < u < 2$.

2) Sea $A = \{2,4,6,......\}$ si $x \in A$ es verdadero y $u = x$, entonces $u \in A$ también es verdadero.

2.15 CONJUNTO FINITO

Un conjunto es finito, si consta de "n" elementos, siendo "n" un número natural fijo. $I\!N$: $0,1,2,3,...$

2.16 CONJUNTO INFINITO

Un conjunto es infinito, si no es finito.

2.17 CONJUNTO NUMERABLE

Diremos que un conjunto A es numerable, si y sólo si, **existe una BIYECCIÓN entre los números naturales y los elementos del conjunto** A.

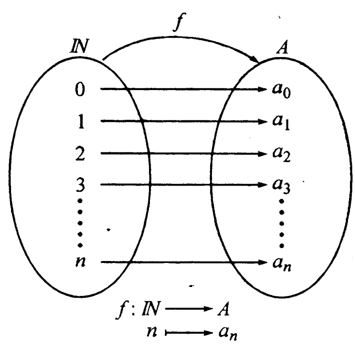
Es decir existe una función **BIYECTIVA** f, tal que, $f(n) = a_n$, $n \in I\!N$, $I\!N = \{0,1,2,3,...\}$

NOTA:

En lugar de usar $I\!N$, también podemos usar los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$)

DEFINICIÓN

Una función f de A en B es biyectiva si es **inyectiva y suryectiva**.



Si no existe una **BIYECCIÓN** entre los números enteros (o números naturales) y los elementos del conjunto A, entonces diremos que A es **NO NUMERABLE**.

- Por ejemplo, los números reales son no numerables.

Ejemplos:

$A = \{2,4,6,8,\ldots\}$ El conjunto A es **INFINITO NUMERABLE**, la biyección existente es: $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

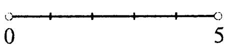
$B = \{1,3,5,7,\ldots\}$ El conjunto B es **INFINITO NUMERABLE**, la función biyectiva existente es: $f(n) = 2n-1$, $n \in \mathbb{Z}$ ó $f(n) = 2n+1$, $n \in I\!N$.

$C = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729} \right\}$ El conjunto C es **NUMERABLE FINITO**, la Biyección existente es: $f(n) = \frac{1}{3^n}$, $n = 1,2,\ldots\ldots,6$

$D = \{ x \in I\!R / x > 2 \}$ El conjunto es infinito **NO NUMERABLE**.

$E = \{1,2,4,8,\ldots\}$ El conjunto E (potencias de 2) es **INFINITO NUMERABLE**, porque existe una función biyectiva, y es: $f(n) = 2^n$, $n \in I\!N$

$F = \{ x \in I\!R / 0 < x < 5 \}$ El conjunto F es **INFINITO NO NUMERABLE**.



Gráficamente el conjunto F es un segmento de recta de longitud 5 unidades.

EJERCICIOS

Decir, cuál de los siguientes conjuntos son finitos, infinitos, numerables o no numerables o vacío.

$A = \{ x \in I\!N \;/\; (x+1)(2x-1) = 0 \}$

$B = \{ x \in I\!R \;/\; (x+1)(2x-1) = 0 \}$

$C = \{ x \in I\!R \;/\; x^2 + 4 = 0 \}$

$D = \{ x \in I\!R \;/\; x^2 - 4 = 0 \}$

$E = \{ x \in \mathbb{C} \;/\; x^2 + 4 = 0 \}$

$F = \{ x \in \mathbb{Z} \;/\; x > 5 \}$

$G = \{ x \in I\!R \;/\; x > 5 \}$

$H = \{ x \in \mathbb{Z} \;/\; x^2 \leq 16 \}$

$I = \left\{ \frac{1}{n} \middle/ 1 < n < 5 \,,\, n \in \mathbb{Z} \right\}$

$J = \{ x \in I\!N \;/ (x+1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0 \}$

$K = \{ 1, 5, 25, 125, \ldots \}$

$L = \{ 1, b, b^2, b^3, \ldots \}$

$M = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \}$

$N = \{ 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots \}$

$O = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{17}, \ldots \right\}$

$P = \{ x \in I\!R^+ \;/\; 1 - \cos x = 0 \}$

$Q = \{ x \in I\!R^+ \;/\; \operatorname{sen} x = 0 \}$

$R = \{ x \in I\!R^+ \;/\; 1 + \operatorname{sen} x = 0 \}$

$S = \{ x \in I\!R \;/\; 1 - \cos^2 x = 0 \}$

$T = \{ y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2 \ldots \}$

$U = \{ -11, -9, -7, -5, -3, -1 \}$

$V = \{ f_1, 2f_2, 3f_3, 4f_4, \ldots \}$

$W = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \ldots \right\}$

$X = \left\{ \frac{2}{6}, \frac{4}{11}, \frac{6}{16}, \frac{8}{21}, \frac{10}{26}, \frac{12}{31} \right\}$

$Y = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{26}, \frac{1}{80}, \ldots\ldots \right\}$

$Z = \{ -2, 5, -8, 11, \ldots\ldots \}$

2.18 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

La relación de conjunto a conjunto puede ser de inclusión o de igualdad. Es decir, dado dos conjuntos A y B incluidos en un cierto universo, pueden ocurrir que: $A \subset B$ (A está incluido en B), $B \subset A$ (B está incluido en A), $A = B$ (A es igual a B)

2.18.1 SUBCONJUNTOS

Definición:

	$A \subset B \iff (\forall x) / x \in A \Rightarrow x \in B$
Su negación	$A \not\subset B \iff (\exists x) / x \in A \wedge x \notin B$

$\begin{cases} A \text{ esta contenido en } B. \\ A \text{ es subconjunto de } B. \\ A \text{ es parte de } B. \end{cases}$

La notación $A \subset B$, se lee: "A está incluido en B" si, y solo si para todo x, tal que, x pertenece a A, implica que x pertenece a B".

Es decir: $A \subset B$ si, y sólo si todo elemento de A está también en B.

Ejemplos:

Sean los conjuntos: $A = \{2,4,6,8\}$

$B = \{2,4,6,8,10,12\}$

$M = \{a,b,c,d,e\}$

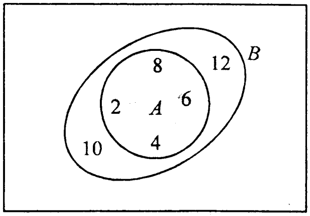
$N = \{b,c,d,m,n\}$

Entonces, podemos afirmar que:

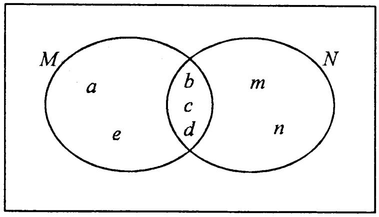
(*i*) $A \subset B$, porque todos los elementos de A están en B.

(*ii*) $M \not\subset N$, porque no todos los elementos de M están en N.

Representación de (i) y (ii) usando **DIAGRAMA DE VENN-EULER**



$A \subset B$



$M \not\subset B$

2.18.2 SUBCONJUNTO PROPIO

Diremos que A es **SUBCONJUNTO PROPIO** de B, si: $A \subset B \quad \wedge \quad A \neq B$

La notación $\underset{\neq}{A \subset B}$ se lee: "A es ***subconjunto propio*** de B"

ó "A es ***una parte propia*** de B"

2.18.3 PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN

Si A, B y D son conjuntos arbitrarios, entonces las propiedades de la inclusión son:

(P_1) $A \subset A$ (P. REFLEXIVA)

(P_2) Si $A \subset B \;\wedge\; B \subset D \Rightarrow A \subset D$ (P. TRANSITIVA)

(P_3) Si $A \subset B \;\wedge\; B \subset A \Rightarrow A = B$ (P. ANTISIMÉTRICA)

(P_4) $\forall A$, $\phi \subset A$ el conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto.

(P_5) Es verdadero: $\phi \in \mathcal{P}(A) \;\wedge\; \phi \subset \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A.

2.19 IGUALDAD DE CONJUNTOS

Axioma de extensión: "dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si tienen los mismos elementos".

Notación: $\boxed{A = B \iff [A \subset B \;\wedge\; B \subset A]}$

Se lee: "El conjunto A es igual al conjunto B, si y solo si A está contenido en B y B está contenido en A".

2.19.1 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD DE CONJUNTOS

(P_1): $A = A$ (Propiedad reflexiva)

(P_2): $A = B$ implica $B = A$ (Propiedad simétrica)

(P_3): $A = B \ \wedge \ B = C$ implica $A = C$ (Propiedad transitiva)

Demostración de $\mathbf{P_1}$.
Haciendo $p : x \in A$, aplicar la condicional $p \longrightarrow p$, $\forall\, x \in A$.

Demostración de $\mathbf{P_2}$.
Hacer $p : x \in A$, $q : x \in B$, $r : x \in C$.
Aplicar la definición de inclusión y la propiedad transitiva.

2.20 AXIOMA DE ESPECIFICACIÓN: Construcción de nuevos conjuntos

A partir del conjunto universo U, se construyen nuevos conjuntos a partir del axioma de especificación.

> Dado un conjunto U y una proposición $P(x)$ sobre $x \in U$, existe un único subconjunto $A \subset U$, cuyos elementos son todos los $x \in U$, tales que $P(x)$ es verdadera.
>
> Esto es $A = \{x \in U \,/\, P(x) \text{ es verdadero}\}$

Ejemplos:

$$A = \{\ \underset{\substack{\uparrow \\ U}}{x \in \mathbb{Z}} \,/\, \underbrace{-3 < x < 2}_{P(x)}\ \}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

2.20.1 CONJUNTO VACÍO

Se llama conjunto vacío o conjunto nulo de U, denotado por $\varnothing$, al siguiente

$$\varnothing = \{x \in U \,/\, x \neq x\}$$

se lee "x diferente de x".

Ejemplos: $\{x \in \mathbb{Z} / x^2 + 4 = 0\} = \varnothing$

$\{x \in \mathbb{N} / 1 < x < 2\} = \varnothing$

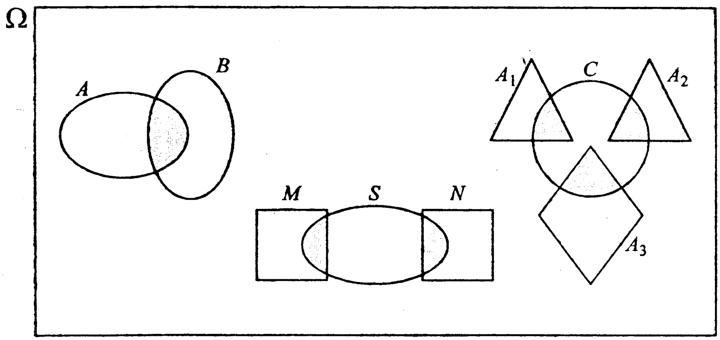
2.20.2 CONJUNTO UNITARIO

Definición.- Sea U un conjunto no vacío, y sea $a \in U$. Si $P(x)$ es la proposición dada por la expresión "$x = a$", entonces por el axioma de especificación, existe y es único el conjunto $\{x \in U / x = a\}$. Este conjunto se denota por $\{a\}$ y se llama **CONJUNTO UNITARIO**.

Se tiena así que: $\{a\} = \{x \in U / x = a\}$

2.21 DIAGRAMA DE VENN - EULER

Consiste en representar el conjunto universal mediante un rectángulo y los otros conjuntos mediante círculos o cualquier figura plana.



2.22 CONJUNTO POTENCIA DE UN CONJUNTO
(Ó CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO)

Definición.- Dado un conjunto A, definimos el **CONJUNTO POTENCIA DE** A, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Notación: El conjunto potencia de A se denota por $\mathcal{P}(A)$ o por 2^A.

Donde la notación: $\mathcal{P}(A)$ o 2^A se lee:

"el conjunto potencia de A o El conjunto de partes de A".

Definición simbólica: $\boxed{\mathcal{P}(A)=\{\,X/X\subseteq A\,\}}$

Se lee "El conjunto potencia de A, es igual, al conjunto de los elementos X, tales que, los X son subconjuntos de A.

Por lo tanto: $\boxed{X\in\mathcal{P}(A)\iff X\subseteq A}$

Además, si el número de elementos de A es k, $k\in\mathbb{N}$ el número de elementos de 2^A es 2^k.

Ejemplos:

1) Si $A=\{1,2\}$, entonces $2^A=\{\{1\},\{2\},A,\phi\}$

Como vemos $n(A)=2$ y $n(2^A)=2^2=4$

2) Si $B=\{a,\{1,b\},c\}$, entonces:

$$2^B=\{\{a\},\{\{1,b\}\},\{c\},\{a,\{1,b\}\},\{a,c\},\{\{1,b\},c\},B,\phi\}$$

Como vemos: $n(B)=3$ y $n(2^B)=2^3=8$

3) $C=\{2,\{a,b\},3,\{x\}\}$, entonces:

$$\begin{aligned}2^C=\{&\{2\},\{\{a,b\}\},\{3\},\{\{x\}\},\{2,\{a,b\}\},\{2,3\},\{2,\{x\}\}\\&\{\{a,b\},3\},\{\{a,b\},\{x\}\},\{3,\{x\}\},\{2,\{a,b\},3\},\{2,3,\{x\}\},\\&\{2,\{a,b\},\{x\}\},\{\{a,b\},3,\{x\}\},C,\phi\}\end{aligned}$$

Como vemos: $n(C)=4$ y $n(2^C)=2^4=16$

2.22.1 PROPIEDADES:

Para cualquier conjunto A, se cumple:

(P_1) $a\in A \iff \{a\}\in\mathcal{P}(A)$

(P_2) $B\subset A \iff B\in\mathcal{P}(A)$

(P_3) $\phi\in\mathcal{P}(A) \wedge A\in\mathcal{P}(A)$

(P_4) $\mathcal{P}(\phi)=\{\phi\}$

(P_5) $A\subset B \iff \mathcal{P}(A)\subset\mathcal{P}(B)$

(P_6) $A=B \iff \mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B)$

TEOREMA 1. $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$

TEOREMA 2. $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subset\mathcal{P}(A\cup B)$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Las operaciones con conjuntos son: La unión de conjuntos, la intersección de conjuntos y la diferencia de conjuntos.

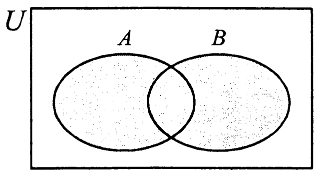
2.23 UNIÓN DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, definimos la unión de A con B, como el conjunto:

$$\boxed{A \cup B = \{x / x \in A \quad \vee \quad x \in B\}}$$

Por lo tanto : $x \in (A \cup B) \iff x \in A \quad \vee \quad x \in B$
su negación : $x \notin (A \cup B) \iff x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B$

se lee: "x perteneciente a la unión de A con B, es equivalente a que x pertenece al conjunto A o x pertenece al conjunto B".



$A \cup B$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

si $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \vee x \in B$

si $x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

El conjunto $A \cup B$ contiene todo A y todo B.

Ejemplo aclaratorio:

Consideremos $\Omega = \mathbb{Z}$ y sean los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 3x + 2 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 = 4x\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} / 0 < x < 4\}$

Hallar: (i) $A \cup B$, (ii) $B \cup C$, (iii) $A \cup B \cup C$

Solución:

En primer lugar, expresemos los conjuntos A, B y C por extensión:

$A=\{2,1\}$ pues: $x^2-3x+2=0 \iff (x-2)(x-1)=0$

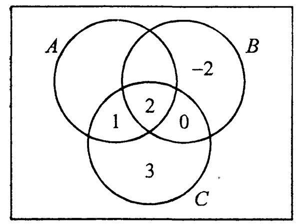
$\iff x=2\in\mathbb{Z} \;\vee\; x=1\in\mathbb{Z}$

$B=\{0,2,-2\}$ pues: $x^3=4x \iff x^3-4x=0$

$\iff x(x^2-4)=0 \iff x(x-2)(x+2)=0$

$\iff x=0\in\mathbb{Z} \;\vee\; x=2\in\mathbb{Z} \;\vee\; x=-2\in\mathbb{Z}$

$C=\{0,1,2,3\}$



Por lo tanto: *i*) $A\cup B=\{2,1,0,-2\}$

ii) $B\cup C=\{0,2,-2,1,3\}$

ii) $A\cup B\cup C=\{2,1,0,-2,3\}$

2.23.1 PROPIEDADES DE LA UNIÓN

$P_1)$ $A\cup\phi=A$

$P_2)$ $A\cup\Omega=\Omega$, Ω : Conjunto universal

$P_3)$ $A\cup A=A$ (PROPIEDAD IDEMPOTENTE)

$P_4)$ $A\cup B=B\cup A$, (PROPIEDAD CONMUTATIVA)

$P_5)$ $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (PROPIEDAD ASOCIATIVA)

$P_6)$ $\left.\begin{array}{l} A\subset A\cup B \\ B\subset A\cup B \end{array}\right\}\ \forall\ A\ y\ B$

$P_7)$ $A\subset B \iff A\cup B=B$

$P_8)$ $A\cup(B\cup C)=(\underline{A\cup}\,B)\cup(\underline{A\cup}\,C)$ (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)

$P_9)$ Si $A\cup B=\phi \Rightarrow A=\phi \wedge B=\phi$

$P_{10})$ Si $A\subset B \Rightarrow (A\,\underline{\underline{\cup C}})\subset(B\,\underline{\underline{\cup C}})$, $\forall\ C$ (PROPIEDAD MONÓTONA)

DEMOSTRACIÓN DE ALGUNAS PROPIEDADES:

(P_3) Demostrar que: $A \cup A = A$

Demostración:

Para demostrar la igualdad: $A \cup A = A$, debo demostrar que:

$$\underbrace{\boxed{A \cup A \subset A}}_{\textbf{(I)}} \quad \wedge \quad \underbrace{\boxed{A \subset A \cup A}}_{\textbf{(II)}}$$

Demostración de (I):

Para demostrar que $A \cup A$, debo probar que si $x \in (A \cup A) \Rightarrow x \in A$

Veamos:

1) Supongamos que $x \in (A \cup A)$ (hipótesis)

2) $\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in A}_{p}$ (definición de unión)

3) Por una tautología que dice: $p \vee p \Longleftrightarrow p$, podemos afirmar de (2) que:

$$\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in A}_{p} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p}$$

4) Por tanto: por (1) y (3), tenemos que: $A \cup A \subset A$

Demostración de (II):

Para probar que $A \subset A \cup A$, debo demostrar que, si $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup A)$

Veamos:

5) Si $\underbrace{x \in A}_{p} \Rightarrow (\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in A}_{p})$ (Por la tautología $p \Leftrightarrow p \vee p$)

6) Luego: $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup A)$ (Por def. de **UNIÓN**)

7) Por (5) y (6) se cumple que: $A \subset A \cup A$

8) Finalmente por (4) y (7) se cumple que: $A \cup A = A$

$\therefore$

(P4) Demostrar que: $A \cup B = B \cup A$ .... PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA UNIÓN

***Demostración*:**

Tengo que demostrar que: $A \cup B \subset B \cup A \quad \wedge \quad B \cup A \subset A \cup B$

Veamos:

1) Supongamos que $x \in (A \cup B)$

2) $\Rightarrow \quad \underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q}$ (Def. de **UNIÓN**)

3) $\Rightarrow \quad \underbrace{x \in B}_{q} \vee \underbrace{x \in A}_{p}$ (Por tautología $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$)

4) $\Rightarrow \quad x \in (B \cup A)$ (Def. de **UNIÓN**)

5) Por (1) y (4) se cumple que: $A \cup B \subset B \cup A$ **(INCLUSIÓN)**

Ahora debo demostrar que: $B \cup A \subset A \cup B$

Veamos:

6) Supongamos que: $x \in (B \cup A)$ (Hipótesis)

7) $\Rightarrow \quad \underbrace{x \in B}_{q} \vee \underbrace{x \in A}_{p}$ (Def. de **UNIÓN**)

8) $\Rightarrow \quad \underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q}$ (Pues: $q \vee p \Longleftrightarrow p \vee q$)

9) $\Rightarrow \quad x \in (A \cup B)$ (Def. de **UNIÓN**)

10) Por lo tanto: $B \cup A \subset A \cup B$ (Por (6), (9) y Def. de **INCLUSIÓN**)

11) Por (5) y por (10) se cumple que: $A \cup B = B \cup A$

(P₆) Demostrar que: $A \subset A \cup B \ , \ \forall\, A, B$

Demostración:

1) Supongamos que $x \in A$, donde $p: x \in A$ (Hipótesis)

2) Aplicar la tautología $p \Rightarrow p \vee q \ , \ \forall\, q$

3) Como la tautología se cumple $\forall\, q$, en particular se cumplirá

Si hacemos $q: x \in B$, entonces $p \Rightarrow p \vee q$ será:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

4) $$x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$$

5) Luego, por el paso (4) se tendrá: $A \subset A \cup B$

(P₇) Demostrar que: $\underbrace{A \subset B}_{p} \iff \underbrace{A \cup B = B}_{q}$

Demostración:

Una doble implicación $p \Leftrightarrow q$ **se demuestra** con dos **implicaciones**:

<u>**Primero**</u>, se demuestra **la "IMPLICACIÓN DE IDA"** $(p \Rightarrow q)$, **llamada CONDICIÓN SUFICIENTE para** q, si p es fijo.

<u>**Segundo**</u>, se demuestra la **"IMPLICACIÓN DE VENIDA"** $(q \Rightarrow p)$ **llamada CONDICIÓN NECESARIA para** q.

Así establecemos que la doble implicación "$p \Leftrightarrow q$", **es una CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE**.

DEMOSTRACIÓN DE LA CONDICIÓN SUFICIENTE PARA q $(p \Rightarrow q)$

Debo demostrar que, si $\underbrace{A \subset B}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{A \cup B = B}_{\text{Tesis}}$

Ahora, para demostrar que $A \cup B = B$, debo probar que $A \cup B \subset B \;\wedge\; B \subset A \cup B$, sabiendo por hipótesis que $A \subset B$.

Veamos: Por demostrar que: $A \cup B \subset B$

1) Sea $x \in (A \cup B)$ .... (Hipótesis)

2) $\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p_1} \vee \underbrace{x \in B}_{q_1}$ .... (Def. de UNIÓN)

3) Pero: $A \subset B$ .... (Hipótesis)

   Luego: Si $\underbrace{x \in A}_{p_1} \rightarrow \underbrace{x \in B}_{q_1}$, $\forall\, x \in A$

4) Por (2), (3) y usando la tautología: $(p_1 \rightarrow q_1) \longleftrightarrow (p_1 \vee q_1 \rightarrow q_1)$

   Tendremos: $(\underbrace{x \in A}_{p_1} \vee \underbrace{x \in B}_{q_1}) \Rightarrow \underbrace{x \in B}_{q_1}$

5) Entonces: $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in B$, $\forall\, x \in (A \cup B)$

6) Por lo tanto: $(A \cup B) \subset B$ .... (Paso (5) y Definición de $\subset$)

Ahora, demostraré **que**: $B \subset A \cup B$

7) **La** proposición: " $B \subset A \cup B$ ", es verdadero: lo he demostrado en el ejercicio P_6 de la página anterior.

8) **En consecuencia**, por los pasos 6 y 7 queda demostrado que: $A \cup B = B$, siempre y cuando $A \subset B$.

DEMOSTRACIÓN DE LA CONDICIÓN NECESARIA PARA q $(p \Leftarrow q)$

Por demostrar que si $\underbrace{A \cup B = B}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{A \subset B}_{\text{Tesis}}$

Se lee "si A unido con B es igual a B entonces A está incluido en B"

9) Supongamos que $(\forall x)$; $x \in A$ .... (Hipótesis)

10) Usando la tautología: $p_1 \Rightarrow p_1 \vee q_1$ y

haciendo $p_1 : x \in A$ y $q_1 : x \in B$, tenemos:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

11) $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$ .... (Definición de UNIÓN)

12) Por hipótesis, tenemos que: $A \cup B = B$, y si reemplazamos (12) en (11), se tendrá:

$x \in A \Rightarrow x \in B \ , \ \forall x \in A$

13) Esto implica que: $A \subset B$ .... (**Definición de INCLUSIÓN**)

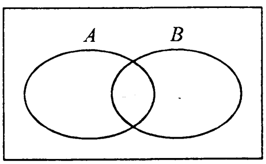
14) Conclusión: Por los pasos 8 y 13, se cumple: $A \subset B \iff A \cup B = B$

2.24 INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Definición: Dado dos conjuntos, definimos la intersección de A y B, como el conjunto:

$$\boxed{A \cap B = \{ x / x \in A \ \wedge \ x \in B \}}$$

Por lo tanto:	$x \in (A \cap B) \iff (x \in A \ \wedge \ x \in B)$
La negación:	$x \notin (A \cap B) \iff x \notin A \ \vee \ x \notin B$



$A \cap B$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

si $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

si $x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$

Como vemos: el conjunto " $A \cap B$ " contiene sólo los **elementos comunes** de A y B.

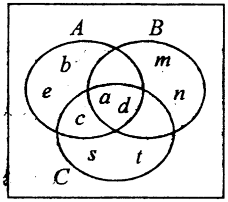
Ejemplo 1:

Sean los conjuntos: $A = \{ a, b, c, d, e \}$, $B = \{ m, n, a, d \}$, $C = \{ s, a, t, c, d \}$

Hallar: (1) $A \cap B$, (2) $B \cap C$ (3) $A \cap B \cap C$ (4) $A \cap C$

Solución:

1) $A \cap B = \{a, d\}$
2) $B \cap C = \{a, d\}$
3) $A \cap B \cap C = \{a, d\}$
4) $A \cap C = \{a, c, d\}$



NOTA: Para hacer un diagrama de Venn; primero, se ubican los elementos de $A \cap B \cap C$; segundo, se ubican los elementos de $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$; se termina completando los elementos de A, B y C.

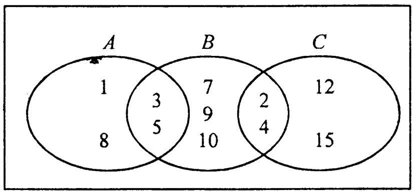
Ejemplo 2:

Sean los conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 12, 15\}$

Hallar: (1) $A \cap B$ (2) $B \cap C$ (3) $A \cap B \cap C$

Solución:

1) $A \cap B = \{3, 5\}$
2) $B \cap C = \{2, 4\}$
3) $A \cap B \cap C = \phi$



2.24.1 PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

P_1) $A \cap \phi = \phi$ "Cualquier conjunto A, intersectado con el conjunto vació, es igual, al conjunto vacío".

P_2) $A \cap \Omega = A$ "Cualquier conjunto A, intersectado con el conjunto universal, es igual, al conjunto A".

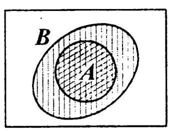
P_3) $A \cap A = A$ "Todo conjunto intersectado consigo mismo, es el mismo conjunto".

P_4) $A \cap B = B \cap A$ "La intersección es conmutativa".

P_5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ "La intersección es asociativa".

P_6) $\left.\begin{array}{r} A \cap B \subset A \\ y \quad A \cap B \subset B \end{array}\right\} \forall\, A, B$ "Toda intersección de dos o más conjuntos, están contenidos en cualquier conjunto de la intersección".

P_7) $A \subset B \iff A \cap B = A$



$P_8)$ Si $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C \quad , \forall C$

$P_9)$ Si $[A \subset C \wedge B \subset D] \Rightarrow A \cap B \subset C \cap D$

$\boxed{\text{Probar } P_3}$ $A \cap A = A$

($\subset$) Por probar: $A \cap A \subset A$

Veamos:

1. Suponer: $\forall\, x \in (A \cap A)$ (hipótesis)
2. $\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in A}_{p}$
3. Por tautología: $p \wedge p \Longleftrightarrow p$ hacemos
4. $(x \in A \wedge x \in A) \Rightarrow x \in A$
5. Por 1 y 4. $A \cap A \subset A$

   ($\supset$) Por probar: $A \subset A \cap A$
6. $\forall \underbrace{x \in A}_{p} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in A}_{p}$ (Tautología)
7. $\Rightarrow x \in (A \cap A)$
8. Por 6 y 7: $A \subset A \cap A$
9. Por 5 y 8: $A \cap A = A$

$\boxed{\text{Probar } P_6}$ $A \cap B \subset A$

1. $\forall\, x \in (A \cap B)$
2. $\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q}$
3. $[\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q}] \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p}$ (Tautología)
4. Por 1 y 3 : $A \cap B \subset A$

$\boxed{\text{Probar } P_8}$

Si $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C , \forall C$

1. Suponer: $\forall\, x \in (A \cap C)$
2. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x \in A}} \wedge x \in C$
3. Como $A \subset B$ entonces:
   $\forall\, x \in A \Rightarrow \underline{\underline{x \in B}}$
4. 3 en 2: $x \in B \wedge x \in C$
5. $\Rightarrow$ $x \in (B \cap C)$
6. Por 1 y 5: $A \cap C \subset B \cap C$

$\boxed{\text{Probar } P_9}$

Si $[A \subset C \wedge B \subset D] \Rightarrow [A \cap B \subset C \cap D]$

1. $\forall\, x \in (A \cap B)$
2. $\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$
3. Pero: $A \subset C$, entonces
   $\forall\, x \in A \Rightarrow x \in C$
4. Como: $B \subset D$, entonces
   $\forall\, x \in B \Rightarrow x \in D$
5. 3 y 4 en 2 $\Rightarrow x \in C \wedge x \in D$
6. $\Rightarrow x \in (C \cap D)$
7. Por 1 y 6 : $A \cap B \subset C \cap D$

2.24.2 PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS DE LA UNIÓN O INTERSECCIÓN

(D$_1$) $A \cap (B \cup C) = \underbrace{(A \cap}B) \cup \underbrace{(A \cap}C)$

Propiedad Distributiva de la **INTERSECCIÓN** con respecto a la **UNIÓN**.

(D$_2$) $A \cup (B \cap C) = \underbrace{(A \cup}B) \cap \underbrace{(A \cup}C)$

Propiedad Distributiva de la **UNIÓN** con respecto a la **INTERSECCIÓN**.

2.24.3 LEYES DE ABSORCIÓN

(A$_1$) $A \cap (A \cup B) = A$

(A$_2$) $A \cup (A \cap B) = A$

2.25 DIFERENCIA DE DOS CONJUNTOS

Definición: Sean A y B dos subconjuntos del conjunto universal. Definimos la diferencia entre A y B (en este orden), denotado por $A - B$, al conjunto:

$$\boxed{A - B = \{x \in \Omega / x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}}$$

Se lee: "El conjunto A menos B, es igual al conjunto de los elementos x, tales que, x pertenece al conjunto A y x no pertenece al conjunto B".

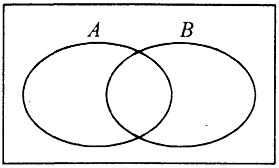
Por lo tanto:
$$\begin{aligned} x \in (A - B) &\iff (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B) \\ &\iff (x \in A \quad \wedge \quad x \in B') \\ &\iff x \in (A \cap B') \end{aligned}$$

En consecuencia: $\boxed{A - B = A \cap B'}$, B' : complemento de B

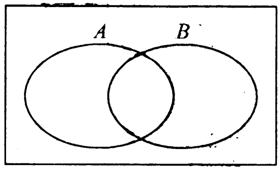
El conjunto $(A - B) \subset \Omega$, se caracteriza por la siguiente propiedad:

$$\boxed{\begin{aligned} x \in (A - B) &\iff x \in A \wedge x \notin B \\ \sim [x \in (A - B)] &\iff x \notin (A - B) \iff x \notin A \vee x \in B \end{aligned}}$$

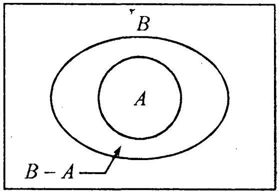
Diagrama de Venn-Euler para la diferencia de dos conjuntos:



$A - B = A \cap B'$



$B - A = B \cap A'$



$A \subset B \iff A - B = \phi$

$\boxed{A \subset B \iff A \cap B' = \phi}$

Propiedad importante muy útil
para demostrar inclusiones.

Ejemplos:

1) $\{\underline{a}, b, \underline{c}, m, n\} - \{p, q, \underline{a}, r, \underline{c}, t\} = \{b, m, n\}$

2) $\{\underline{4}, 6, 8, 10\} - \{1, 2, 3, \underline{4}, 5\} = \{6, 8, 10\}$

3) Supongamos que: $A = \{4n / n \in \mathbb{Z}^+\}$ y $B = \{2n / n \in \mathbb{Z}^+\}$,

entonces: $i)$ $A - B = \phi$

$ii)$ $B - A = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, \ldots\ldots\}$

4) Sean los conjuntos: $A = \{1, \underline{2}, 5, 8, \underline{9}, 10\}$ y $B = \{-1, \underline{2}, 7, \underline{9}, 12\}$

entonces: $i)$ $A - B = \{1, 5, 8, 10\}$

$ii)$ $B - A = \{-1, 7, 12\}$

2.25.1 PROPIEDADES

La diferencia de conjuntos satisface las siguientes propiedades:

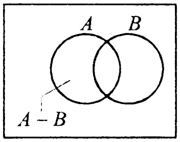
P$_1$) $A-\phi=A$

P$_2$) $A-A=\phi$

P$_3$) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

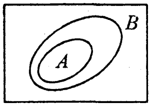
P$_4$) $\phi-A=\phi$

P$_5$) $(A-B)\subset A$



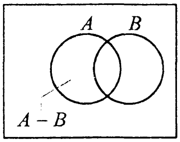
P$_6$) Si $A\subset B \Rightarrow (A-C)\subset(B-C)$, $\forall C$

P$_7$) $A\subset B \iff \underbrace{A-B}=\phi$
$\iff A\cap B'=\phi$



P$_8$) $B\cap(A-B)=\phi$

P$_9$) $A-B=(A\cup B)-B$
$=A-(A\cap B)$



$\boxed{\text{Prueba de } P_3}$

Por probarse dos inclusiones:

$$(A\cap B)-(A\cap C)\subset A\cap(B-C) \quad \wedge \quad A\cap(B-C)\subset(A\cap B)-(A\cap C)$$

Probemos que: $[(A\cap B)-(A\cap C)] \subset A\cap(B-C)$

1. $\forall \quad x\in[(A\cap B)-(A\cap C)]$

2. $\Rightarrow \ x\in(A\cap B) \quad \wedge \quad x\notin(A\cap C)$

3. $\Rightarrow \ x\in(A\cap B) \quad \wedge \quad [x\notin A \vee x\notin C]$

4. $\Rightarrow \quad x \in (\underline{A \cap B}) \quad \wedge \quad [x \in A' \vee x \in C']$

5. $\Rightarrow \quad [x \in (A \cap B) \wedge x \in A'] \vee [x \in (A \cap B) \wedge x \in C']$

6. $\Rightarrow \quad [\underline{x \in A} \wedge x \in B \wedge \underline{x \in A'}] \vee [x \in (A \cap B) \wedge x \in C']$

7. $\Rightarrow \quad \underbrace{\underbrace{[\underline{x \in B} \wedge \underbrace{(x \in A \wedge \underline{x \in A'})}_{F}]}_{F} \vee [x \in (A \cap B) \wedge x \in C']}$

8. $\Rightarrow \quad x \in (A \cap B) \wedge x \in C'$

9. $\Rightarrow \quad x \in A \wedge [x \in B \wedge x \in C']$

10. $\Rightarrow \quad x \in A \wedge [x \in (B - C)]$

11. $\Rightarrow \quad x \in [A \cap (B - C)]$

12. $\Rightarrow$ Por 1 y 11. $[(A \cap B) - (A \cap C)] \subset A \cap (B - C)$

Ahora probemos que: $\quad A \cap (B - C) \subset (A \cap B) - (A \cap C)$

13. $\quad \forall\, x \in [A \cap (B - C)]$ .... (hip.)

14. $\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \in (B - C)$

15. $\quad x \in A \wedge [x \in B \wedge x \notin C]$

16. $\quad [x \in A \wedge x \in B] \wedge x \notin C$

17. $\quad x \in (A \cap B) \wedge x \notin C$

Aplicar la tautología: $F \vee p \equiv p$, en particular para $F \equiv x \in A \wedge x \notin A$

18. $\quad \underbrace{\quad F \quad} \vee \overbrace{[x \in (A \cap B) \wedge x \in C']}^{P}$

19. $\quad [x \in A \wedge x \notin A] \vee [x \in (A \cap B) \wedge x \in C']$, aplicar: $q \wedge F \equiv F$ siendo $q: x \in B$

20. $\quad (\overbrace{x \in B}^{q} \wedge \overbrace{[x \in A \wedge x \notin A]}^{F}) \vee [x \in (A \cap B) \wedge x \in C']$

21. $\quad (\underbrace{[x \in A \wedge x \in B]} \wedge x \in A') \vee [x \in (A \cap B) \wedge x \in C']$

22. $[x \in \underline{(A \cap B)} \quad \wedge \quad x \in A'] \vee [x \in \underline{(A \cap B)} \quad \wedge \quad x \in C']$

23. $x \in \underline{(A \cap B)} \quad \wedge \quad [x \in A' \vee x \in C']$ Propiedad distributiva

24. $x \in (A \cap B) \quad \wedge \quad [x \notin A \vee x \notin C]$

25. $x \in (A \cap B) \quad \wedge \quad x \notin (A \cap C)$

26. $x \in [(A \cap B) - (A \cap C)]$

27. Por 13 y 26 $[A \cap (B - C)] \subset [(A \cap B) - (A \cap C)]$

$\therefore$ Por 12 y 27 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

$\boxed{\text{Prueba de } P_7}$ $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B' = \phi$

$(\Rightarrow)$ Si $A \subset B$ implica $A \cap B' = \phi$.

Prueba:

Teniendo como hipótesis $A \subset B$, deseamos saber cómo es $A \cap B'$.

Veamos:

1. Por hipótesis: $A \subset B$

2. Si $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ ...... P_7 de $\cap$

3. Reemplazar $A = A \cap B$ en $A \cap B'$, así obtendremos:

$$A \cap B' = (A \cap B) \cap B' = A \cap \underbrace{(B \cap B')}_{\phi}$$

$$= A \cap \phi = \phi$$

$\Rightarrow A \cap B' = \phi$

4. He demostrado que: $A \subset B$ implica $A \subset B' = \phi$

$(\Leftarrow)$ Si $A \cap B' = \phi$ implica $A \subset B$

Si pruebo que $A \cap B = A$ implica $A \subset B$

Veamos:

5. Por hipótesis: $A \cap B' = \phi$

6. Pero: $A \cap B = (A \cap B) \cup \phi$ .... P_1 de unión.

7. 5 en 6 $A \cap B = (A \cap B) \cup \overbrace{(A \cap B')}^{\phi}$

$$= \underbrace{A}\cap \overbrace{(B \cup B')}^{\Omega}$$

$$= A \cap \Omega = A$$

$$A \cap B = A$$

8. Si $A \cap B = A$ implica $A \subset B$, que es la P_7 de la intersección.

Por tanto, por 1, 4, 5, 8, concluimos: $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B' = \phi$.

$\boxed{\text{Prueba de } P_6}$ Si $A \subset B \Rightarrow (A - C) \subset (B - C)$, $\forall C$.

1. Por hipótesis: $A \subset B$

2. Debo probar: Si $x \in (A - C)$ implica que $x \in (B - C)$

Veamos:

3. Si $x \in (A-C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin C$

4. Como: $A \subset B \Rightarrow x \in B \wedge x \notin C \ , \forall x \in A$

5. $\Rightarrow x \in (B-C)$

6. Por 3 y 5 se cumple: $A-C \subset B-C$

Prueba de P_8 $\quad B \cap (A-B) = \phi$

Veamos:

1. $B \cap (A-B) = B \cap (A \cap B')$

2. $= B \cap (B' \cap A)$

3. $= \underbrace{(B \cap B')}_{\phi} \cap A$

4. $= \phi \cap A$

5. $= \phi$

Por elementos:

1. $\forall x \in [B \cap (A-B)]$

2. $\Rightarrow x \in B \wedge x \in (A-B)$

3. $\Rightarrow x \in B \wedge [x \in A \wedge x \notin B]$

4. $\Rightarrow x \in B \wedge [x \notin B \wedge x \in A]$

5. $\Rightarrow \underbrace{\underbrace{[x \in B \wedge x \notin B]}_{F} \wedge x \in A}_{F}$

6. $\Rightarrow B \cap (A-B) = \phi$

Prueba de P_9 $\quad A-B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$. Probar: $A-B = (A \cup B) - B$

($\supset$) Por demostrar que:
$[(A \cup B) - B] \subset (A-B)$

1. De $(A \cup B) - B$
2. $\forall x \in [(A \cup B) - B]$
3. $\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin B$
4. $\Rightarrow [x \in A \vee x \in B] \wedge x \notin B$
5. $\Rightarrow [x \in A \wedge x \notin B] \vee \underbrace{[x \in B \wedge x \notin B]}_{F}$
6. $\Rightarrow x \in (A-B)$
7. Luego: $(A \cup B) - B \subset A - B$, por 1 y 6

   Por demostrar: $A - B \subset (A \cup B) - B$

   (queda como ejercicio)

   Demostrando las dos inclusiones queda probado la igualdad.

Probar: $A - (A \cap B) = A - B$

($\subset$)

1. $\forall x \in [A - (A \cap B)]$
2. $x \in A \wedge x \notin (A \cap B)$
3. $x \in A \wedge [x \notin A \vee x \notin B]$
4. $[\underbrace{x \in A \wedge x \notin A}_{}] \vee [x \in A \wedge x \notin B]$
5. $\underbrace{\qquad F \qquad\qquad\qquad\qquad}$
6. $\underbrace{x \in A \wedge x \notin B}$
7. $\Rightarrow x \in (A-B)$
8. Por 1 y 7 queda probado:
   $[A - (A \cap B)] \subset (A-B)$

($\supset$) Queda por demostrar:
$(A-B) \subset [A - (A \cap B)]$

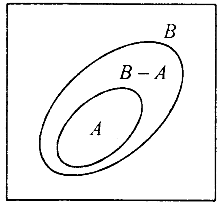
Probando las dos inclusiones **queda** demostrado la igualdad.

2.26 COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Definición.- Si A es subconjunto de B, se define el **COMPLEMENTO DE** A con respecto a B, a la diferencia $B-A$.

NOTACIÓN:

$\mathcal{C}_B A = B - A$ es el complemento de A con respecto a B.



$\mathcal{C}_B A = B - A$

2.26.1 PROPIEDADES

P_1 $\mathcal{C}_B A \subset B$ y $\mathcal{C}_A B \subset A$

P_2 $A \cup \mathcal{C}_B A = B$

P_3 $A \cap \mathcal{C}_B A = \phi$

P_4 $\mathcal{C}_A A = \phi$.

P_5 $\mathcal{C}_A \phi = \phi$

P_6 $\mathcal{C}_B(\mathcal{C}_B A) = A$

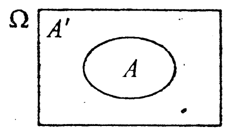
P_7 $A - B = A \cap \mathcal{C}_A B$

2.27 DEFINICIÓN

Sea $A \subset \Omega$, donde Ω es el **CONJUNTO UNIVERSAL**, entonces definimos EL COMPLEMENTO DE A, al conjunto formado por todos los elementos de Ω que no pertenece al conjunto A.

DEFINICIÓN SIMBÓLICA

$A' = \Omega - A = \{x \in \Omega / x \notin A\}$
$x \in A' \iff x \notin A$
su negación: $x \notin A' \iff x \in A$



NOTACIÓN:
El complemento del conjunto A, se denota por A'.
También se usan las notaciones: $A' = \mathcal{C}A = A^C = \overline{A}$

Ejemplo 1: Sea $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y los conjuntos

$$A = \{1,3,5,7\} \quad \Rightarrow \quad A' = \{2,4,6,8,9,10\}$$

$$B = \{x \in \Omega / 4 < x < 8\} \quad \Rightarrow \quad B' = \{x \in \Omega / x \geq 8 \ \vee \ x \leq 4\} = \{1,2,3,4,8,9,10\}$$

$$C = \{x \in \Omega / x \geq 6\} \quad \Rightarrow \quad C' = \{x \in \Omega / x < 6\} = \{1,2,3,4,5\}$$

Ejemplo 2: Supongamos que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y sean los conjuntos

$$A = \{2x / x \in \Omega\}$$

$$B = \{x \in \Omega / (x^2 - 4)(x^2 - 7x + 12) = 0\}$$

$$C = \{x \in \Omega / 9^{x^2 - 3} = 9\}$$

Hallar: (1) A' , (2) B' , (3) C' , (4) $(A \cup B)'$, (5) $(A \cap B)'$, (6) $(B \cup C)'$

Solución:

En primer lugar, expresemos los conjuntos A, B y C por extensión:

$A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{2\}$

Luego:

1) $A' = \{1,3,5,7,9\}$
2) $B' = \{1,5,6,7,8,9,10\}$
3) $C' = \{1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
4) $A \cup B = \{2,4,6,8,10,3\}$ y $(A \cup B)' = \{1,5,7,9\}$
5) $A \cap B = \{2,4\}$ y $(A \cap B)' = \{1,3,5,6,7,8,9,10\}$
6) $B \cup C = \{2,3,4\}$ y $(B \cup C)' = \{1,5,6,7,8,9,10\}$

2.27.1 PROPIEDADES DE COMPLEMENTACIÓN

C_1 $A \cup A' = \Omega$ "La unión de un conjunto con su complemento, es igual al conjunto universal".

C_2 $A \cap A' = \phi$ "La intersección de un conjunto con su complemento, es igual al conjunto vacío".

C_3 $\Omega' = \phi$ "El complemento del conjunto universal, es igual al conjunto vacío".

C4 $\phi' = \Omega$ "El complemento del conjunto vacío, es igual al conjunto universal".

C5 $(A')' = A$ "El complemento del complemento de un conjunto, es igual al mismo conjunto".

C6 $A - B = A \cap B' = A\overline{B}$

C7 $A \subset B \iff B' \subset A'$

2.28 APLICACIONES IMPORTANTES

La diferencia de dos conjuntos " $A - B$ " tiene una gran importancia para formar **CONJUNTOS DISJUNTOS**, que tiene su aplicación inmediata en el **CÁLCULO DE PROBABILIDADES**.

A continuación, hago algunas aclaraciones al respecto:

PRIMERO Las diferentes notaciones que se usan para la diferencia de dos conjuntos A y B, son:

$$A - B = A \cap B' = AB^C = A\overline{B} = A \cap \complement B$$

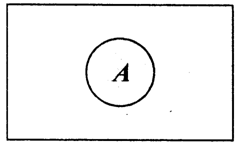
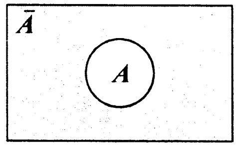
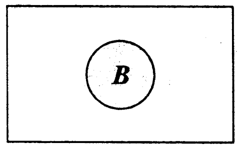
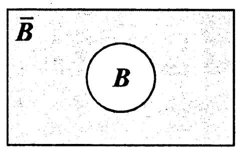
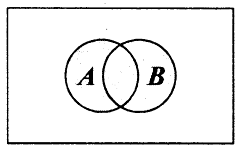
SEGUNDO A continuación veamos la interpretación que se le da al conjunto diferencia: $A - B = A\overline{B}$; al conjunto unión: $A \cup B$; al conjunto intersección: $A \cap B$; al conjunto complemento de A: $\overline{A}$; al conjunto: $AB^C C^C = A\overline{B}\overline{C}$, etc.

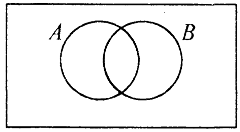
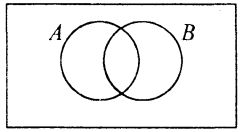
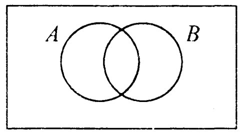
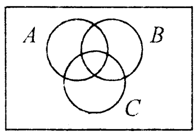
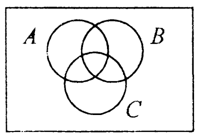
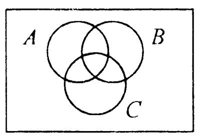
Experimento Aleatorio.- Es un ensayo u operación cuyo resultado no puede predecirse. Extraer una bola numerada de una urna, tirar un dado y observar el número que aparece en la cara superior; son experimentos aleatorios.

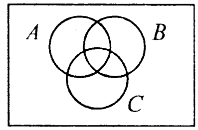
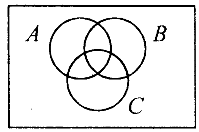
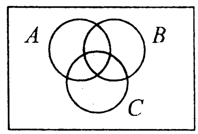
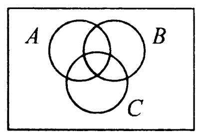
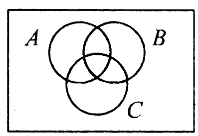
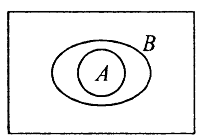
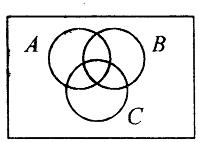
Al elegir, al azar, 30 personas y encuestarlas sobre un tema de interés, el resultado de este ensayo es un experimento aleatorio. Al conjunto de todos los resultados obtenidos de un experimento aleatorio se llama **ESPACIO MUESTRAL** (es el conjunto universal Ω). A cada elemento del espacio muestral, se le llama **EVENTO ELEMENTAL**.

A cada subconjunto del espacio muestral se le llama, simplemente **EVENTO** o **SUCESO**.

Si los conjuntos A, B y C son eventos o sucesos de Ω, entonces los conjuntos: $\overline{A}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, ABC, etc. también son eventos de Ω y tienen una interpretación, que se muestra en el siguiente cuadro.

EVENTO	REPRESENTACIÓN CONJUNTISTA DEL EVENTO	REPRESENTACIÓN DEL EVENTO USANDO LOS DIAGRAMAS DE VENN
"ocurre el suceso A"	A	
"No ocurre el suceso A"	$\bar{A}$	
"ocurre el suceso B"	B	
"No ocurre el suceso B"	$\bar{B}$	
"***Por lo menos*** ocurre uno de los sucesos" (De dos sucesos A y B existentes).	$A \cup B$	
"***Por lo menos*** ocurre uno de los sucesos" (De n sucesos existentes).	$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_n$	

EVENTO	REPRESENTACIÓN CONJUNTISTA DEL EVENTO	REPRESENTACIÓN DEL EVENTO USANDO LOS DIAGRAMAS DE VENN
"Ocurre A y ocurre B" "A y B ocurren a la vez" "Los dos sucesos A y B ocurren simultáneamente"	$A \cap B$ o AB	
"Todos ocurren a la vez" (De "n" eventos existentes)	$A_1 \cap A_2 \cap ..... \cap A_n$ o $A_1 A_2 A_3 ..... A_n$	
"Sólo ocurre A" "ocurre A, pero no ocurre B" "ocurre A y no ocurre B"	$A \cap B^C$ o $A\bar{B}$ o AB'	
"Sólo ocurre B" "ocurre B, pero no ocurre A" "ocurre B y no ocurre A"	$B \cap A^C$ o $B\bar{A}$ o BA'	
De tres eventos existentes "Sólo ocurre A" "ocurre A, y no ocurren B y C"	$AB'C'$ ó $AB^C C^C$ ó $A\bar{B}\bar{C}$	
De tres eventos existentes "Sólo ocurre B" "ocurre B y no ocurren A ni C"	$B\bar{A}\bar{C}$ ó $BA'C'$ ó $BA^C C^C$	
De tres eventos existentes: "Sólo ocurre C"	$C\bar{A}\bar{B}$ ó $CA'B'$ ó $CA^C B^C$	

EVENTO	REPRESENTACIÓN CONJUNTISTA DEL EVENTO	REPRESENTACIÓN DEL EVENTO USANDO LOS DIAGRAMAS DE VENN
De tres eventos A, B y C existentes: "sólo uno de los sucesos ocurre"	$A\bar{B}\bar{C} + B\bar{A}\bar{C} + C\bar{A}\bar{B}$ ó $AB'C' + BA'C' + CA'B'$	
De tres eventos: A, B y C existentes: "sólo dos sucesos ocurren"	$AB\bar{C} \cup AC\bar{B} \cup BC\bar{A}$ ó $ABC' + ACB' + BCA'$ ó $(AB \cup AC \cup BC) - ABC$	
"Por lo menos, dos sucesos ocurren"	$AB \cup AC \cup BC$ ó $AB\bar{C} + AC\bar{B} + BC\bar{A} + ABC$	
"A, B y C ocurren a la vez"	$A \cap B \cap C$ ó ABC	
"A lo más, ocurren dos sucesos"	$A \cup B \cup C \; - \; A \cap B \cap C$ ó $\underbrace{\underbrace{AB'C' + BA'C' + CA'B'}_{\text{sólo 1}} + \underbrace{ABC' + ACB' + BCA'}_{\text{sólo 2}}}_{\text{A lo mas 2}}$	
"Si A ocurre, también ocurre B"	$A \subset B$	
	$A \cup B \cup C - C\bar{A}\bar{B}$	

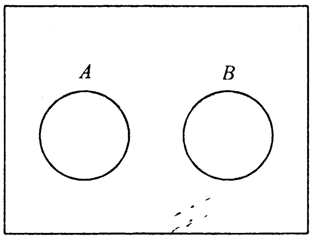
TERCERO Ahora, voy a definir lo que son **CONJUNTOS DISJUNTOS**.

2.29 DEFINICIÓN

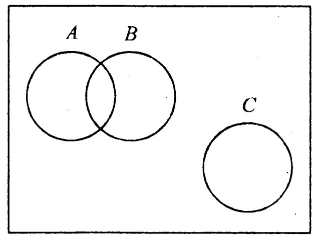
Dos conjuntos A y B, son disjuntos, si $A \cap B = \phi$

Es decir, si dos conjuntos A y B **NO TIENEN NINGÚN ELEMENTO EN COMÚN**, entonces. decimos que dichos conjuntos son disjuntos.

Ejemplos:



En este diagrama, podemos apreciar que $A \cap B = \phi$, por lo tanto, los conjuntos A y B son disjuntos.



En este diagrama, podemos ver que $(A \cup B) \cap C \neq \phi$; por lo tanto los conjuntos $(A \cup B)$ y C son disjuntos.

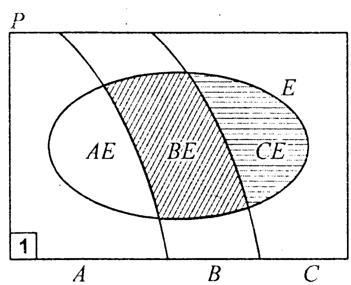
CUARTO En seguida, veamos cómo podemos formar **CONJUNTOS DISJUNTOS** usando las operaciones conjuntistas de: unión de dos conjuntos, intersección de dos conjuntos y el complemento de un conjunto.

NOTA ACLARATORIA:

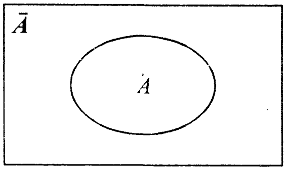
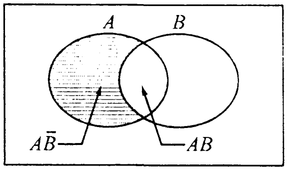
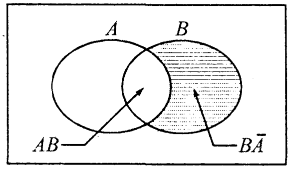
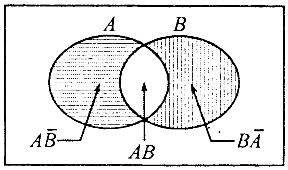
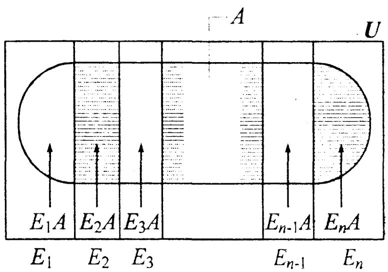
La unión de **CONJUNTOS DISJUNTOS**, se expresa como **SUMA DE CONJUNTOS DISJUNTOS**.

EJEMPLO INTUITIVO: Una forma sencilla de intuir cómo son los conjuntos disjuntos es comparándola con un rompecabezas.

1. Imaginemos el Perú (P) dividido en 3 regiones: costa (A), sierra (B) y selva (C), cuyas fronteras estén bien definidas.
2. Por otro lado, supongamos que E sea el presupuesto de la república ($E \subset P$), de modo que a cada región le corresponde una parte del presupuesto.

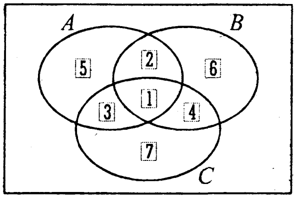


Si el presupuesto se distribuye proporcionalmente a cada región, el diagrama que exprese todas las relaciones conjuntistas entre P, A, B, C y E en el que estén bien definidas los conjuntos disjuntos es el diagrama 1.

OPERACIONES CONJUNTISTAS CON CONJUNTOS DISJUNTOS	REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMAS DE VENN-EULER
Los conjuntos A y $\bar{A}$ son disjuntos, porque $A \cap \bar{A} = \phi$ Además: $A + \bar{A} = \Omega$ expresa la unión de los conjuntos disjuntos A y $\bar{A}$	
Los conjuntos $A\bar{B}$ y AB son disjuntos, porque $(A\bar{B}) \cap (AB) = \phi$ Además: $A = A\bar{B} + AB$	
Los conjuntos AB y $B\bar{A}$ son disjuntos, porque $(AB) \cap (B\bar{A}) = \phi$ Además: $B = AB + B\bar{A}$	
Los conjuntos: $A\bar{B}$, AB y $B\bar{A}$ son disjuntos. Además: $A \cup B = A\bar{B} + AB + B\bar{A}$	
Los conjuntos: E_1A, E_2A, ... $E_{n-1}A$ y E_nA son disjuntos; porque: $(E_iA) \cap (E_jA) = \phi$ Además: $\boxed{A = E_1A + E_2A + ... + E_nA}$ $\quad \forall\, i \neq 1$ $i = 1, 2, \dots n$ $j = 1, 2, \dots n$ Esta partición de conjuntos se usa en el teorema de BAYES (cálculo de probabilidades)	

Supongamos que se tenga 3 grupos de personas:

A : personas que habla alemán
B : personas que hablan inglés
C : personas que hablan francés



El siguiente diagrama, expresa diversas formas de conjuntos disjuntos.

$$\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\boxed{4}+\boxed{5}+\boxed{6}+\boxed{7} = A\cup B\cup C$$

$$\underbrace{ABC}_{\text{Hablan los 3 idiomas}} + \underbrace{ABC' + ACB' + BCA'}_{\text{Hablan solo dos idiomas}} + \underbrace{AB'C' + BA'C' + CA'B'}_{\text{Hablan sólo un idioma}}$$

$$\underbrace{ABC + ABC' + ACB' + BCA'}_{\text{Por lo menos hablan dos idiomas}}$$

$$\underbrace{ABC' + ACB' + BCA' + AB'C' + BA'C' + CA'B'}_{\text{A lo más hablan dos idiomas}}$$

$$\underbrace{ABC + ABC' + ACB' + BCA' + AB'C' + BA'C' + CA'B'}_{\text{Por lo menos hablan un idioma}}$$

2.30 LEYES DE "DE MORGAN"

	Generalizando
M_1 $(A\cup B)' = A'\cap B'$ "***El complemento de la unión de*** dos conjuntos, es igua, a la ***intersección de sus complementos***"	$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcap_{i=1}^{n} A_i'$
M_2 $(A\cap B)' = A'\cup B'$ "***El complemento de la intersección*** de dos conjuntos, es igual, a la ***unión de sus complementos***"	$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$

2.31 GENERALIZACIÓN DE LA UNIÓN E INTERSECCIÓN DE UNA FAMILIA O COLECCIÓN FINITA DE CONJUNTOS

① Si $\mathfrak{I} = \{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$ es una colección finita de conjuntos, ***la unión de todos los conjuntos de*** $\mathfrak{I}$ se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen, ***por lo menos*** a uno de los conjuntos de $\mathfrak{I}$.

Notación: Sea: $A_1 \cup A_2 \cup, \ldots\ldots\ldots, \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \iff \exists\, i / x \in A_i$$

Se lee: $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ si, y sólo si existe por lo menos un subíndice i tal que, x pertenece a A_i

② Si $\mathfrak{I} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una colección finita de conjuntos, ***la intersección*** de todos los conjuntos de $\mathfrak{I}$ se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a ***todos los conjuntos de*** $\mathfrak{I}$.

Notación: Sea: $A_1 \cap A_2 \cap, \ldots\ldots, \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Entonces: $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff x \in A_i \ , \ \forall\, i$

Donde: $\bigcap_{i=1}^{n} A = \{x / x \in A_1 \ \wedge \ x \in A_2 \ \wedge \ \ldots\ldots \wedge \ x \in A_n\}$

$$= \{x / x \in A_i \ , \ \forall\, i\}$$

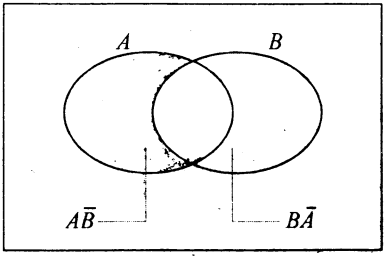
2.32 DIFERENCIA SIMÉTRICA

Definición.- Dado dos conjuntos A y B de Ω definimos ***el conjunto diferencia de A y B***, denotado por $A \,\Delta\, B$, al conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$.

Es decir: $\boxed{A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)}$

La notación: $A \Delta B$ se lee: "La diferencia simétrica de A y B"

Diagrama de Venn - Euler



$$(A-B)\cup(B-A)=A\,\Delta\,B$$

PROPIEDAD 1

$$\begin{aligned} A\,\Delta\,B &= (A\cup B)-(A\cap B)\\ &= (A-B)\cup(B-A)\\ &= (A\cap B')\cup(B\cap A')\\ &= A\overline{B}+B\overline{A} \end{aligned}$$

unión de conjuntos disjuntos

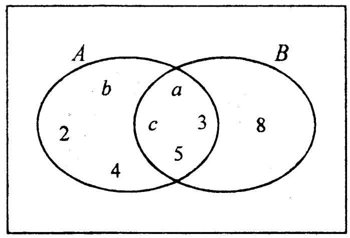
Ejemplo: Sean los conjuntos:

$$A=\{a,b,c,2,3,4,5\}\ ,\ B=\{a,3,5,c,8\}$$

Entonces: $A\,\Delta\,B=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{b,2,4\}\cup\{8\}$

$=\{b,2,4,8\}$



2.32.1 PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA SIMÉTRICA

P_1. $A\,\Delta\,B=(A-B)\cup(B-A)$

P_2. $(A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C=A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C)$ .... Asociativa

P_3. $A\,\Delta\,B=B\,\Delta\,A$ .... Conmutativa

P_4. $A\,\Delta\,\phi=A$

P_5. $A\,\Delta\,A=\phi$

P_6. $A\cap(B\,\Delta\,C)=(A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C)$ .... Distributiva

P_7. $(A\,\Delta\,B)\cup(B\,\Delta\,C)=(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)$

Demostración de P_1:

1) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ...... definición de Δ

2) $\quad = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$

3) $\quad = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$

4) $\quad = [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$

5) $\quad = [\underbrace{(A \cap A')}_{\phi} \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\phi}]$

6) $\quad = (B \cap A') \cup (A \cap B')$

7) $\quad = (B - A) \cup (A - B)$

8) $\quad = (A - B) \cup (B - A)$

Demostración de P_4: $\quad A \Delta \phi = A$

1) $A \Delta \phi = (A \cup \phi) - (A \cap \phi)$

2) $\quad = A - \phi$

3) $\quad = A$

Demostración de P_5 : $\quad A \Delta A = \phi$

1) $A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A)$

2) $\quad = A - A$

3) $\quad = \phi$

Probar P_3 : $\quad A \Delta B = B \Delta A$

Veamos: $\quad A \Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)$ .... definición de dif. simétrica

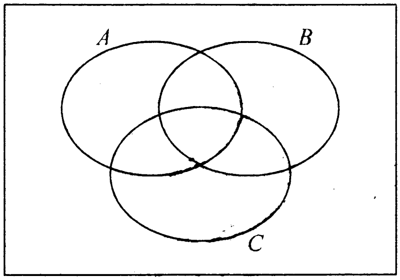
$\quad = (B \cup A) - (A \cap B)$ .... Propiedad conmutativa de la unión e intersección.

$\quad = B \Delta A$

Probar P_2 : $\quad (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

Antes de hacer la demostración, propongo dos sugerencias:

1. Se puede recurrir a los diagramas de Venn para intuir y poder formalizar la demostración requerida.
Por ejemplo, el diagrama que corresponde a la propiedad P_2, es:



$$A \,\Delta\, B \,\Delta\, C = A\cap B'\cap C' + B\cap A'\cap C' + C\cap A'\cap B' + A\cap B\cap C$$

2. La diferencia simétrica, es la unión de conjuntos disjuntos.
Podemos convenir en reemplazar el símbolo "U" (unión) por "+" cuando se trata de unir conjuntos disjuntos.

Así por ejemplo: $A + A' = \Omega$

$A = A\cap B' + A\cap B$

$B = B\cap A' + B\cap A$

$A\,\Delta\, B = A\cap B' + B\cap A'$

Ahora vayamos a la demostración:

$(A\,\Delta\, B)\,\Delta\, C =$

$= [(A\cap B')\cup(B\cap A')]\,\Delta\, C$

$= [(A\cap B')\cup(B\cap A')] - C \quad \cup \quad C - [(A\cap B') \cup (B\cap A')]$

$= [(A\cap B')\cup(B\cap A')] \cap \underline{\underline{C'}} \quad \cup \quad C\cap[(A\cap B') \cup (B\cap A')]'$

$C\cap[(A\cap B')' \cap (B\cap A')']$

$C\cap[(A'\cup B) \cap (B'\cup A)]$

$[C\cap(A'\cup B)] \cap (B'\cup A)$

$= [(A\cap B')\cap C'] \cup [(B\cap A')\cap C'] \cup [(C\cap A')\cup(C\cap B)] \cap (B'\cup A)$

$[(C\cap A')\cap(B'\cup A)] \cup [(C\cap B)\cap(B'\cup A)]$

$$= [A\cap B'\cap C'] \cup [B\cap A'\cap C'] \cup [(C\cap A'\cap B')\cup\underbrace{(C\cap A'\cap A')}_{\phi}]\cup[\underbrace{(C\cap B\cap B')}_{\phi}\cup(C\cap B\cap A)]$$

$$= \underline{A\cap B'\cap C'} + B\cap A'\cap C' + C\cap A'\cap B' + \underline{A\cap B\cap C}$$

Asociar:

$$= [A\cap B'\cap C' + A\cap B\cap C] + [B\cap A'\cap C' + C\cap A'\cap B']$$

$$= [A\cap B\cap C + A\cap B'\cap C'] + [B\cap C'\cap A' + C\cap B'\cap A']$$

$$= A\cap[\underbrace{B\cap C + B'\cap C'}_{B\cap C+(B\cup C)'}] + [\underbrace{(B\cap C') + (C\cap B')}_{B\,\Delta\,C}]\cap A'$$

$$= A\cap[\underbrace{(B\cap C)'\cap(B\cup C)}_{B\,\Delta\,C}]' + (B\,\Delta\,C)\cap A'$$

$$= \underbrace{[A\cap(B\,\Delta\,C)'] + [(B\,\Delta\,C)\cap A']}_{A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C)}$$

Demostración de P_6 : $A\cap(B\,\Delta\,C) = (A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C)$

Debo probar que : $A\cap(B\,\Delta\,C) = [(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)]$

1) $A\cap(B\Delta C) \;=\; A\cap[(B-C)\cup(C-B)]$ .... **Propiedad P_1**

2) $= A\cap[(B\cap C')\cup(C\cap B')]$

3) $= [A\cap(B\cap C')]\cup[A\cap(C\cap B')]$

4) $= [(A\cap B)\cap C')]\cup[(A\cap C)\cap B')]$ ♦ Pero: $\begin{cases}(A\cap B)\cap C' = (A\cap B)\cap(A'\cup C')\\(A\cap C)\cap B' = (A\cap C)\cap(A'\cup B')\end{cases}$

5) $= [(A\cap B)\cap(A'\cup C')]\cup[(A\cap C)\cap(A'\cup B')]$

6) $= [(A\cap B)\cap(A\cap C)']\cup[(A\cap C)\cap(A\cap B)']$

7) $= \underbrace{[(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)]}$

8) $= (A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C)$

♦ Probar que: $(A\cap B)\cap C' = (A\cap B)\cap(A'\cup C')$

Partir del 2° miembro: $(A\cap B)\cap(A'\cup C') = [(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$

$$= [A\cap(B\cap A')]\cup[(A\cap B)\cap C']$$

$$= [A\cap(A'\cap B)]\cup[(A\cap B)\cap C']$$

$$= [\underbrace{(A\cap A')}_{\phi}\cap B)]\cup[(A\cap B)\cap C']$$

$$= \phi$$

$$\begin{aligned} &= [\underbrace{\phi \cap B}] \quad \cup \quad [(A \cap B) \cap C'] \\ &= \quad \phi \quad \cup \quad [(A \cap B) \cap C'] \\ &= (A \cap B) \cap C' \end{aligned}$$

2.33 DEMOSTRACIÓN DE ALGUNAS PROPIEDADES

P_7 de la intersección:

Demostrar que: $A \subset B \iff A \cap B = A$

Demostración:

Se demuestra en dos partes: 1) La implicación de "ida" $(\Rightarrow)$
2) La implicación de "venida" $(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$ Para demostrar que: $A \subset B \Rightarrow (A \cap B) = A$, debo demostrar que:
$(A \cap B) \subset A \ \wedge \ A \subset (A \cap B)$ sabiendo que por hipótesis se tiene: $A \subset B$.

Veamos:

1) La proposición $(A \cap B) \subset A$ siempre es verdadera, por la siguiente razón:

$$\text{Si } x \in (A \cap B) \Rightarrow [(\underbrace{x \in A}_{p} \ \wedge \ \underbrace{x \in B}_{q})] \rightarrow (\underbrace{x \in A}_{p})$$

Esto es la tautología: $p \wedge q \rightarrow p$

2) Ahora nos queda por demostrar que: $A \subset (A \cap B)$, sabiendo que $A \subset B$.

Veamos:

Por hipótesis tenemos que: $A \subset B$

Luego: Si $\boxed{x \in A \rightarrow x \in B, \ \forall x \in A}$ .... (i)

En (i) usemos la tautología:
$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) &\equiv [(\underbrace{p \wedge p}) \rightarrow p \wedge q] \\ &\equiv [\quad p \quad \rightarrow p \wedge q] \end{aligned}$$

Entonces: Si
$$\underbrace{[(\underbrace{x \in A}_{p}) \ \wedge \ (\underbrace{x \in A}_{p})]} \rightarrow \underbrace{[(\underbrace{x \in A}_{p}) \ \wedge \ (\underbrace{x \in B}_{q})]}$$

$\iff$ Si $x \in A \rightarrow x \in (A \cap B)$ .... (ii)

3) La proposición (ii) implica que: $A \subset (A \cap B)$, $\forall \underbrace{x \in A}_{p}$

4) Por (1) y (3) se tiene : $A \cap B = A$

$(\Leftarrow)$ Demostrar que : $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$

Queda como ejercicio......

PROBLEMAS

1. Sean A, B, C conjuntos no vacíos; usando elementos demostrar que: $B \in \mathcal{P}(A) \wedge A \Delta B = A \cup B - A \cap B$ implica $A \Delta B = A - B$.

2. Si para los conjuntos A, B, C se tiene: $A \subset B$ y $C \cap A = \phi$, simplificar la expresión: $\{[A \cup (B-C)] \cap [B \cup (C-A)]\} \cup \{(A-B) \Delta C\}$

3. Demostrar usando propiedades de conjuntos que para los conjuntos A, B y C:
$$[\complement A - (\complement B - C)] \subset A \Delta \complement(B - \complement C)$$
implica $A \cup B \cup C \subset A \cup \complement B \cup \complement C$.

4. Para conjuntos A, B demostrar usando propiedades que:
$A \Delta \complement B = B$ implica $B \subset A \vee \complement A \subset B$.
Justifique su desarrollo.

5. Sean A, B, C tres conjuntos cualesquiera. Demostrar:
   a) $A - B = (A \Delta B) - B$
   b) $A \cap B = \phi \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \phi$

6. Sean A, B, C subconjuntos de U.
   a) Demostrar mediante elementos que $A - (A \Delta B) = A \cap B$
   b) Mediante propiedades, demostrar: $(A \Delta B) \subset (A \Delta C \cup B \Delta C)$.

7. En un conjunto universal U, consideremos los subconjuntos A, B, C de U.
   a) Si A, B, C son tales que: $(A \cap C) \subset (B \cap C) \wedge (A \cap \complement C) \subset (B \cap \complement C)$
   Demostrar que $A \subset B$
   b) Si A, B, C son tales que: $A \cap C = B \cap C \wedge A \cap \complement C = B \cap \complement C$ ¿se cumplirá $A = B$?. Justifique su respuesta

8. Demostrar que si A, B, C son subconjuntos de U, se cumple:
$$[(A-B)-C] \subset [A-(B-C)]$$
Verifique con un ejemplo que la igualdad en general no se cumple.

9. Si $A \cap B \cap C = \phi$, simplificar:
$(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$

10. Sean A, B, conjuntos cualesquiera, demostrar que:
$\complement A - (\complement B - A) = B - \complement A$ implica $B \subset A$.

11. Demostrar mediante elementos:
$B \subset A \cup (B - A)$

12. Sean A, B, C tres subconjuntos de U, tales que verifican lo siguiente:
$(A - B) \subset (A \cap C) \wedge (B - C) \subset (B \cap A)$
Mediante propiedades, demostrar que: $A \subset (B \cup C)$.

Sugerencia: Aplicar
$$M \subset N \Longleftrightarrow M \cap \complement N = \phi$$

(D1) Demostrar que: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Para probar la igualdad de conjuntos, debo probar la doble inclusión:

$$\underbrace{A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)}_{I} \quad \wedge \quad \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)}_{II}$$

PARTE I

1) Supongamos que: $\forall\, x \in [A \cap (B \cup C)]$ (Hipótesis)

2) $\Rightarrow$ $x \in A \ \wedge \ x \in (B \cup C)$ (Definición de $\cap$)

3) $\Rightarrow$ $\underbrace{x \in A}_{p} \ \wedge \ [\underbrace{x \in B}_{q} \ \vee \ \underbrace{x \in C}_{r}]$ (Definición de Unión)

4) $\Rightarrow$ $[\underbrace{x \in A}_{p} \ \wedge \ \underbrace{x \in B}_{q}] \ \vee \ [\underbrace{x \in A}_{p} \ \wedge \ \underbrace{x \in C}_{r}]$ (Tautología)

5) $\Rightarrow$ $x \in (A \cap B) \ \vee \ x \in (A \cap C)$ (Definición de $\cap$)

6) $\Rightarrow$ $x \in [(A \cap B) \ \cup \ (A \cap C)]$ (Definición de Unión)

7) Por (1) y (6) se cumple: $A \cap (B \cup C) \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

Para ésta demostración hemos usado la tautología:

$$p \ \wedge \ (q \vee r) \ \Longleftrightarrow \ (p \wedge q) \ \vee \ (p \wedge r)$$

PARTE II *Queda como ejercicio.........*

Sugerencia: Partir de (6) y llegar a (1)

(D2) Demostrar que: $A \ \cup \ (B \cap C) = (A \cup B) \ \cap \ (A \cup C)$

Sugerencia: usar definiciones de unión, intersección y la Tautología: $p \ \vee \ (q \wedge r) \ \Longleftrightarrow \ (p \vee q) \ \wedge \ (p \vee r)$

(M1) Demostrar que: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ Ley de "De Morgan"

Para demost. que: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ debo demostrar que:

$$\underbrace{(A \cup B)' \ \subset \ A' \cap B'}_{\text{I}} \ \wedge \ \underbrace{A' \cap B' \ \subset \ (A \cup B)}_{\text{II}}$$

PARTE I

1) Supongamos que: $x \in (A \cup B)'$ (hipótesis)

2) $\Rightarrow$ $x \notin (A \cup B)$ (definición de complemento)

3) $\Rightarrow$ $x \notin A \ \wedge \ x \notin B$ $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

4) $\Rightarrow$ $x \in A' \ \wedge \ x \in B'$ Def. de complemento

5) $\Rightarrow$ $x \in (A' \cap B')$ Def. de Intersección

6) Por (1) y (5) y definición de inclusión, se cumple que: $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$

PARTE II *Queda como ejercicio.........*

Sugerencia: Partir de (5) y llegar a (1)

(M_2) Demostrar que: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ Ley de "De Morgan"

Demostración:

Debo demostrar que: $\underbrace{(A \cap B)' \subset A' \cup B'}_{\text{I}} \wedge \underbrace{A' \cup B' \subset (A \cap B)'}_{\text{II}}$

PARTE I

1) Supongamos que: $x \in (A \cap B)'$ (hipótesis)
2) $\Rightarrow$ $x \notin (A \cap B)$ (Definición de complemento)
3) $\Rightarrow$ $x \notin A \ \vee \ x \notin B$ (Tautología: $\sim(p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$)
4) $\Rightarrow$ $x \in A' \ \vee \ x \in B'$ (Definición de complemento)
5) $\Rightarrow$ $x \in (A' \cup B')$ (Definición de la Unión)
6) Por (1) y (5) y definición de inclusión, se cumple: $(A \cap B)' \subset (A' \cup B')$

PARTE II *Queda como ejercicio.........*

Sugerencia: Partir de (6) y llegar a (1)

Así habremos demostrado que: $(A' \cup B') \subset (A \cap B)'$,
lo cual indica que: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(C_5) Demostrar que: $(A')' = A$

Demostración: La demostración la haré por definición del complemento de un conjunto.

Veamos:

$$(A')' = \{x \in \Omega / x \notin A'\}$$
$$= \{x \in \Omega / x \in A\} = A$$

(C_7) Demostrar que: $A \subset B \Longleftrightarrow B' \subset A'$

Demostración:

Aplicar la tautología $(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

Así:

Si $A \subset B$ implica que

$$[\forall\, x \in A\ ,\ \underbrace{x \in A}_{p} \rightarrow \underbrace{x \in B}_{q}\,] \longleftrightarrow [\quad x \notin B \quad \rightarrow \quad x \notin A \quad]$$

$$x \in B' \quad \rightarrow \quad x \in A'$$

$$\longleftrightarrow [\ \forall\, x \in B'\ ,\ B' \subset A'\ ]$$

También se puede demostrar del siguiente modo:

($\Rightarrow$)

1) Por hipótesis tenemos que: $A \subset B$

2) Pero $A \subset B \iff A \cup B = B$ .... (*)

3) Aplicando **COMPLEMENTOS** a ambos miembros de (*):

4) $\underbrace{(A \cup B)'}_{} = B'$

$A' \cap B' = B'$ .... Ley de "De Morgan"

5) Pero $\underbrace{A' \cap B'}_{B'} \subset A'$ .... Pues, toda intersección está incluído en cualquier conjunto de la intersección.

6) Luego: $B' \subset A'$ .... Por el paso (4)

—*lqqd*—

($\Leftarrow$) Por demostrar que: $B' \subset A' \Rightarrow A \subset B$

Queda como ejercicio.........

(C_1) $A \cup A' = \Omega$

La demostración se hace aplicando la tautología:

$$p \vee \sim p \equiv T \quad , \; T = \text{tautología}$$

Así: $\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \notin A}_{\sim p} \equiv \underbrace{x \in \Omega \;, \; \forall x}_{T}$

(C_3) $\Omega' = \phi$

Definición: $\Omega = \{x / x = x\}$

La negación de p : $x = x$

es $\sim p$: $x \neq x$

Luego $\Omega' = \{x / x \neq x\} = \phi$

2.34 PROBLEMAS RESUELTOS

(1) Demostrar que: $A \subset B' \iff B \subset A'$

Demostración: **1) Por el ejercicio C_7 se cumple que:**

$$A \subset B' \iff (B')' \subset A'$$

2) $\iff B \subset A'$ .... Pues: $(B')' = B$

(2) Consideremos A y B **subconjuntos del conjunto UNIVERSAL** Ω

Pruebe que: $A' - B' = B - A$

Demostración:

Partiré de $A' - B'$ **para llegar a** $B - A$

Veamos:

1) $A' - B' = A' \cap (B')'$ **(Prop. de la Diferencia)**

$= A' \cap B$ $(B')' = B$

$= B \cap A'$ **(Propiedad conmutativa de $\cap$)**

$= B - A$ **(Propiedad de la Diferencia)**

(3) Demostrar que: $(A-B)' = B \cup A'$

Demostración: La demostración por propiedades, consiste en partir de un miembro para llegar al otro miembro de la relación igual.

Veamos: Partiré de $(A-B)'$ para llegar a $B \cup A'$

1)	$(A-B)' = (A \cap B')'$	Propiedad: $A-B = A \cap B'$
2)	$= A' \cup (B')'$	Ley de "De Morgan"
3)	$= A' \cup B$	Propiedad: $(B')' = B$
4)	$= B \cup A'$	Propiedad conmutativa.

(4) Demostrar que $(A \cap B) - E = A \cap (B-E)$

Demostración: Partiré de $(A \cap B) - E$ para llegar a $A \cap (B-E)$

Veamos:

1)	$(A \cap B) - E$	Hipótesis
2)	$(A \cap B) \cap E'$	Propiedad de la DIFERENCIA
3)	$A \cap (B \cap E')$	Propiedad Asociativa de la $\cap$
4)	$A \cap (B - E)$	Propiedad de la DIFERENCIA

(5) Demostrar que $A - B = A \iff A \cap B = \phi$

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Por demostrar que, si $\underbrace{A-B=A}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{A \cap B = \phi}_{\text{Tesis}}$

Veamos:

1) Partir de $A \cap B$

2) Por hipótesis tenemos que: $\underbrace{A-B}_{A \cap B'} = A$

3) Reemplazar el conjunto $A = A \cap B'$ del paso (2), al paso (1)

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= (A \cap B') \cap B \\
&= A \cap (B' \cap B) && \text{Propiedad asociativa} \\
&= A \cap (\phi) && \text{Porque: } B' \cap B = \phi \\
&= \phi && \text{Porque: } A \cap \phi = \phi
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$)

Por probar: Si $\quad A \cap B = \phi \quad \Rightarrow \quad A - B = A$

1. Por la propiedad P_1 de diferencia de conjuntos que afirma: $A \subset B \iff \begin{array}{r} A - B = \phi \\ A \cap B' = \phi \end{array}$
   podemos deducir de $A \cap B = \phi$, lo siguiente:

   $$A \cap (B')' = \phi \text{, pues } (B')' = B$$

   lo cual implica: $A \subset B'$

2. Como: $A \subset B'$ entonces $\underbrace{A \cap B'}_{A\, -\, B} = A$

   En consecuencia: $A - B = A \iff A \cap B = \phi$

6 Demostrar que: Si $\underbrace{E \subset A}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{A - (B - E) = (A - B) \cup E}_{\text{Tesis}}$

Demostración:

Partiré de: $A - (B - E)$. Para llegar a $(A - B) \cup E$ usando la hipótesis $E \subset A$.

Veamos:

1) $A - (B - E) = A - (B \cap E')$ — Prop.: $B - E = B \cap E'$

$= A \cap (B \cap E')'$ — Prop.: $A - C = A \cap C'$, $C = B \cap E'$

$= A \cap (B' \cup (E')')$ — Ley de "De Morgan"

$= A \cap (B' \cup E)$ — Prop. $(E')' = E$

$= (A \cap B') \cup (\underline{\underline{A \cap E}})$ — Prop. **DISTRIBUTIVA**

2) Pero $\quad E \subset A \iff \underline{\underline{E \cap A}} = E$ — Prop. ya demostrado

3) Reemplazando (2) en (1).........(i)

$= (A \cap B') \cup E$

$= (A - B') \cup E$ — Prop. $A \cap B' = A - B$

7 Demuestre que: $B - A = B - (A \cap B)$

Demostración:

Partiré de $B - (A \cap B)$ para llegar a $B - A$

Veamos:

1) $B-(A\cap B)$	$=$	$B\cap(A\cap B)'$	(Prop. de la Diferencia)
2)	$=$	$B\cap(A'\cup B')$	(Ley de "De Morgan")
3)	$=$	$(B\cap A')\cup(B\cap B')$	(Ley distributiva)
4)	$=$	$(B\cap A')\cup\phi$	(Prop. $B\cap B'=\phi$)
5)	$=$	$B\cap A'$	(Prop. $C\cup\phi=C$)
6)	$=$	$B-A$	(Prop. $B\cap A'=B-A$)

—lqqd—

EJERCICIOS

1. Demuestre que: $(A-B)-C=A-(B\cup C)$
2. Demuestre que: $(A-B)\cup(A\cap C)=A-(B-C)$
3. Demuestre que: $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(C-A)$
4. Demuestre que: $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$
5. Demuestre que: $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$
6. Demuestre que: $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$
7. Demuestre que: $(A\cap B)'\cap(A'\cup B)=A'$
8. Demuestre que: $(A\cap B)\cup(A\cup B')'=B$
9. Demuestre que: $(A-B)\cup(B'-A')=A-B$

2.35 PROBLEMAS RELATIVOS AL CONJUNTO POTENCIA

$$\mathcal{P}(A) \quad \text{ó} \quad 2^A$$

1. Dados los conjuntos $A=\{2\}$ y $B=\{1,2,4\}$

   Determine *i)* $\mathcal{P}(A\cup B)\cup\mathcal{P}(A\cap B)$

   ii) $\mathcal{P}(A\cup B)\cap\mathcal{P}(A\cap B)$

Solución:

1) En primer lugar, hallemos $A\cup B$ y $A\cap B$:

$A\cup B=\{2,1,4\}$; $A\cap B=\{2\}$

2) En segundo lugar, hallemos $\mathcal{P}(A \cup B)$ y $\mathcal{P}(A \cap B)$:

$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\{2\}, \{1\}, \{4\}, \{2,1\}, \{2,4\}, \{1,4\}, A \cup B, \phi\}$

$\mathcal{P}(A \cap B) = \{A \cap B, \phi\}$

3) Entonces:

i) $\mathcal{P}(A \cup B) \cup \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A \cup B)$; pues $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

ii) $\mathcal{P}(A \cup B) \cap \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

2 Demostrar que: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Demostración:

(⊂)

1) Supongamos que: $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ .... (X = conjunto arbitrario)

2) $\Rightarrow$ $X \subset (A \cap B)$ .... (Def. de conjunto potencia)

3) $\Rightarrow$ $(X \subset A) \wedge (X \subset B)$ ...... (Def. de Intersección)

4) $\Rightarrow$ $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ ...... (Def. conjunto potencia)

5) $\Rightarrow$ $X \in (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B))$ .... (Def. de $\cap$)

6) Por lo tanto:

$\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B))$ ...... (Def. inclusión)

(⊃)

7) Supongamos que: $X \in (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B))$ .... (Hipót. auxiliar)

8) $\Rightarrow$ $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$ ...... (Def. de $\cap$)

9) $\Rightarrow$ $(X \subset A) \wedge (X \subset B)$ .... (Def. (A) y (B))

10) $\Rightarrow$ $X \subset (A \cap B)$ .... (Def. de $\cap$)

11) $\Rightarrow$ $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ .... (Def. de Conj. potencia)

12) Luego, por (7) y (11) se cumple:

$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$ .... (Def. de inclusión)

13) Por (6) y (12), tendremos que:

$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ .... (Def. de igualdad)

3 Demostrar que si A y B son dos conjuntos, entonces: $[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)] \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

Demostración:

1) Sea $X \in [\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)]$ .... (Hipot. auxiliar)

2) $\Rightarrow\ X \in \mathcal{P}(A) \ \vee\ X \in \mathcal{P}(B)$ .... (Def. de **UNIÓN**)

3) $\Rightarrow\ [X \subset A] \ \vee\ [X \subset B]$ .... (Def. conj. **POTENCIA**)

4) $\Rightarrow\ X \subset (A \cup B)$ .... (Def. de **UNIÓN**)

5) $\Rightarrow\ X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ .... (Def. conj. **POTENCIAN**)

6) Luego, por **(1)** y **(5)** se cumple: $[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)] \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

Ejemplo 1.- **Sean los conjuntos** $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$

Entonces: *i)* $A \cup B = \{1,2\}$, $A \cap B = \phi$

ii) $\mathcal{P}(A) = \{A, \phi\}$ y $\mathcal{P}(B) = \{B, \phi\}$

iii) $\mathcal{P}(A \cup B) = \{A, B, A \cup B, \phi\}$

iv) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{A, B, \phi\}$

v) Como vemos: $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Ejemplo 2.- Sean los conjuntos: $A = \{\{2,1\},3\}$ y $B = \{\{a,b\},3,\{2,1\}\}$

Hallar: a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $B - A$

d) $\mathcal{P}(A)$ e) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A \cup B)$ f) $\mathcal{P}(A \cap B) \cap \mathcal{P}(A \cup B)$

***Solución*:**

a) $A \cap B = \{\{2,1\},3\} = A$ b) $A \cup B = \{\{a,b\},3,\{2,1\}\} = B$

c$_1$) $A - B = \{\ \}$ c$_2$) $B - A = \{\{a,b\}\}$

d) $\mathcal{P}(A) = \{\{\{2,1\}\},\{3\},A,\phi\}$,

$\mathcal{P}(B) = \{\{\cancel{\{a,b\}}\},\cancel{\{3\}},\{\cancel{\{2,1\}}\},\cancel{\{\{a,b\},3\}},\cancel{\{\{a,b\},\{2,1\}\}},\underbrace{\{3,\{2,1\}\}}_{A},B,\phi\}$

$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(B)$; esto ocurre porque $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \\ A - B = \phi \end{cases}$

Como $A \subset B$; se cumplen $\begin{cases} 1)\ \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \\ 2)\ \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \end{cases}$

e) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A \cup B)$

f) $\mathcal{P}(A \cap B) \cap \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A)$

Observaciones:

1) Si $\left\{\begin{array}{l} i)\ A\cup B=\phi \\ \quad ó \\ ii)\ A\cap B\neq\phi\ ,\ \text{siendo } A\not\subset B\ \wedge\ B\not\subset A \end{array}\right\}$ entonces se cumple $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subset\mathcal{P}(A\cup B)$

2) Si $(A\subset B\ \text{ó}\ B\subset A)\Rightarrow\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cup B)$

2.36 CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

(Ó NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO)

2.36.1 *Definición:*

Entendemos por **CARDINALIDAD** de un conjunto, al número de elementos distintos que forman dicho conjunto.

2.36.2 *Notación:*

$Card(A)$: se lee "el cardinal del conjunto A"

$n(A)$: se lee "el número de elementos del conjunto A"

<u>Ejemplos</u>:

Sean los conjuntos $A=\{a,b,c\}$, $\boldsymbol{B}=\{1,5,1,5,1\}$, $C=\phi$

Se tiene: $n(A)=3$, $n(B)=2$, $n(C)=0$

NOTA:

Según la definición de cardinalidad de un conjunto A, se tiene que $Card(A)$ es un número natural.

2.36.3 AXIOMAS

$N_1)$ $n(A)\geq 0$ "el número de elementos de cualquier conjunto A es positivo o cero"

$N_2)$ Si $A=\phi$, entonces $n(A)=0$

$N_3)$ Si A y B son conjuntos finitos y disjuntos $(A\cap B=\phi)$, entonces:

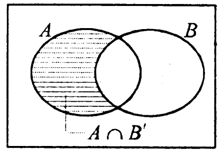
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

2.36.4 TEOREMA:

Si A y B son dos conjuntos finitos, tal que $A \cap B \neq \phi$, entonces

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Demostración:

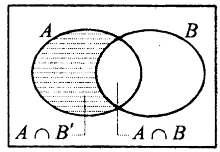


1) Particionar el conjunto $A \cup B$:

$A \cup B = A \cap B' + B$, pues $A \cap B$ y B son disjuntos que al unirlos resulta $A \cup B$.

2) Por N_3, tenemos: $n(A \cup B) = \underline{\underline{n(A \cap B')}} + n(B)$

3) Particionar el conjunto A: $A = A \cap B' + A \cap B$



4) Aplicar N_3: $n(A) = n(A \cap B') + n(A \cap B)$, pues los conjuntos $A \cap B'$ y $A \cap B$ son disjuntos que al unirlos resulta A.

$\underline{\underline{n(A \cap B')}} = n(A) - n(A \cap B)$

5) Reemplazar en 2) $n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B)$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

2.36.5 COROLARIO

Si A, B, C son conjuntos finitos, tal que $A \cap B \cap C \neq \phi$, entonces:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Demostración:

1) $n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C))$

2) $= n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C))$

3) $= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

4) $\quad '' \qquad -[n(A \cap B) + n(A \cap C) - n((A \cap B) \cap (A \cap C))$

5) $\quad '' \qquad -n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

6) $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

En general: Si se tiene k conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ tal que $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \neq \phi$, entonces:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} n(A_i) - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} n(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j \neq k}} n(A_i \cap A_j \cap A_k) +$$

$$\ldots + (-1)^k n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

2.36.6 TEOREMA

Si el número de elementos de un conjunto A es "k", $k \in I\!N$, entonces el número de elementos del conjunto potencia de A es 2^k.

Es decir, si $n(A) = k \Rightarrow n(\mathcal{P}(A)) = 2^k$

Comprobemos con algunos valores de k.

1) Si $k = 0$, se tiene $A = \phi$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\phi\}$; luego $n(\mathcal{P}(A) = 2^0 = 1$.

2) Si $k = 1$, se tiene $A = \{a_1\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A\}$; luego $n(\mathcal{P}(A)) = 2^1 = 2$

3) Si $k = 2$, se tiene $A = \{a_1, a_2\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$, donde $n(\mathcal{P}(A)) = 2^2$

4) Si $k = 3$, se tiene $A = \{a_1, a_2, a_3\}$,

$$\mathcal{P}(A) = \{\underset{\substack{\downarrow \\ 2^3 = C_0^3}}{\phi}, \underbrace{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}}_{+\; C_1^3}, \underbrace{\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}}_{+\; C_2^3}, \underset{\substack{\downarrow \\ +\; C_3^3}}{A}\}$$

La demostración es por inducción matemática, que consiste:

1° Verificar que se cumple para un valor fijo de k, digamos $k = 2$ (ver 2)

2° Si, al suponer que, para $k = h$ se cumple, implica que para $k = h + 1$ también se cumple, entonces se afirma que para todo $n \in I\!N$ se cumple. Veamos:

1. Para $k = 2$, ver 2)
2. Si $k = h$ $\quad 2^h = C_0^h + C_1^h + C_2^h + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_h^h$
3. Si $k = h + 1$, $\mathcal{P}(A)$ tiene: $C_0^{h+1} + C_1^{h+1} + C_2^{h+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_h^{h+1} + C_{h+1}^{h+1}$

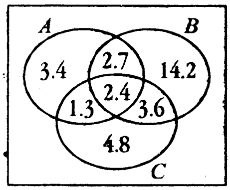
$$2^{h+1} = 2 \cdot 2^h = C_0^h + C_0^h + C_1^h + C_1^h + C_2^h + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{h-1}^h + C_h^h + C_h^h$$

2.37 Problemas Resueltos:

01 Un investigador de mercados efectúa una muestra sobre los hábitos de lectura de revistas de la ciudad de Lima, con los siguientes resultados: 9.8% leen **OIGA**, 22.9% leen **SELECCIONES**, 12.1% leen **CARETAS**, 5.1% leen **OIGA** y **SELECCIONES**, 3.7% leen **OIGA** y **CARETAS**, 6% leen **SELECCIONES** y **CARETAS**, 32.4% leen al menos una de las revistas mencionadas. Calcular el porcentaje de personas que:

a) No leen ninguna de las revistas citadas.
b) Leen exactamente dos de las revistas.

Solución:



A : leen **OIGA**
B : leen **SELECCIONES**
C : leen **CARETAS**

Sean: $n(A) = 9.8\%$ leen **OIGA**

$n(B) = 22.9\%$ leen **SELECCIONES**

$n(C) = 12.1\%$ leen **CARETAS**

$n(A \cap B) = 5.1\%$ leen **OIGA** y **SELECCIONES**

$n(A \cap C) = 3.7\%$ leen **OIGA** y **CARETAS**

$n(B \cap C) = 6\%$ leen **SELECCIONES** y **CARETAS**

$n(A \cup B \cup C) = 32.4\%$ leen al menos una de las revistas mencionadas.

Pero:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow \quad 32.4 = 9.8 + 22.9 + 12.1 - 5.1 - 3.7 - 6 + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow \quad n(A \cap B \cap C) = 32.4 - 30$$

$$= 2.4$$

Por tanto: a) $100\% - 32.4\% = 67.6\%$ no leen ninguna de las revistas citadas.

b) Leen exactamente dos de las revistas, es:

$$\underbrace{2.7}_{n(ABC')} + \underbrace{3.6}_{n(BCA')} + \underbrace{1.3}_{n(ACB')} = 7.6$$

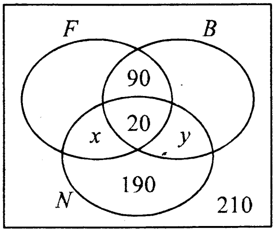
02 La Pontificia Universidad Católica del Perú está organizando las próximas mini olimpiadas en los deportes: fútbol, béisbol y natación. Hay 870 alumnos en la universidad que van a participar en éstas disciplinas deportivas de los cuales:

400	pueden participar en	fútbol
390	" "	béisbol
480	" "	natación
680	" "	fútbol o béisbol.

210 no pueden participar en ninguno de esos deportes.
90 participan en las dos primeros pero no en el tercero.
190 pueden participar solamente en natación.

a) ¿Cuántos alumnos pueden participar en los tres deportes mencionados?
b) ¿Cuántos alumnos pueden participar por lo menos en dos de los deportes?
c) ¿Cuántos alumnos tiene la universidad?

Solución:



Datos:
$$n(F) = 400$$
$$n(B) = 390$$
$$n(N) = 480$$
$$n(F \cup B) = 680$$
$$n(F' \cap B' \cap N') = 210$$
$$n(F \cap B \cap N') = 90$$
$$n(N \cap F' \cap B') = 190$$

Pero
$$n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B)$$
$$680 = 400 + 390 - n(F \cap B)$$
$$\Rightarrow \quad n(F \cap B) = 400 + 390 - 680$$
$$= 110$$

a) Por tanto: $n(A \cap B \cap C) = n(F \cap B) - n(F \cap B \cap N')$
$$= 110 - 90$$
$$= 20$$

b) Por lo menos en dos deportes, es la suma de los que práctican en sólo dos deportes más los que practican tres deportes, es decir:

$$n(F \cap B \cap N') + n(B \cap N \cap F') + n(F \cap N \cap B') + n(F \cap B \cap N)$$
$$= \quad 90 \quad + \quad y \quad + \quad x \quad + \quad 20$$

Falta hallar: $x + y = ?$

Pero: $n(N) = x + 20 + y + 190$ .... ver diagrama
$$480 = x + y + 210 \quad \Rightarrow \quad x + y = 270$$

Reemplazar en b) $90 + 270 + 20 = 380$

c) La universidad tiene: $870 + 210 = 1080$ alumnos.

03 En una investigación hecho en un grupo de 100 personas, la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas fueron las siguientes:

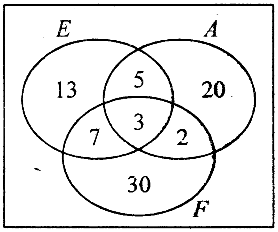
español 28, alemán 30, francés 42,
español y alemán 8,
español y francés 10,
alemán y francés 5, y
los tres idiomas 3.

a) ¿Cuántos alumnos no estudian idiomas?
b) ¿Cuántos alumnos tenían como francés el único idioma de estudios?

Solución:

Para una fácil solución, ilustremos el problema en una digrama de **VENN-EULER**:

La distribución en el diagrama, se hace en el siguiente orden:



1°) $n(E \cap A \cap F) = 3$
2°) $n(A \cap F) = 5$
3°) $n(E \cap F) = 10$
4°) $n(E \cap A) = 8$
5°) $n(F) = 42$
6°) $n(A) = 30$
7°) $n(E) = 28$

Donde:

$$n(E \cup A \cup F) = n(E) + n(A) + n(F) - n(E \cap A) - n(E \cap F) - n(A \cap F) + n(E \cap A \cap F)$$
$$= 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3$$
$$= 80$$

Por lo tanto: a) $100 - 80 = 20$ $\longleftarrow$ no estudian idiomas
b) $(F\,\bar{E}\,\bar{A}) = 30$ $\longleftarrow$ sólo fránces

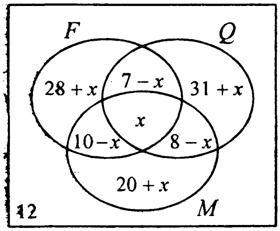
04 En el 1er. año "*E*" del colegio **ALFONSO UGARTE** estudian 120 alumnos, los cuales:

45	aprobaron	física
46	"	química
38	"	matemática
7	"	física y química
8	"	química y matemática
10	"	matemática y física
12	no aprobaron ningún curso	

¿Cuántos alumnos aprobaron los tres cursos?

Solución:

Las distribuciones en el diagrama, se hacen en el siguiente orden:



1) $n(F \cap Q \cap M) = x$
2) $n(M \cap F) = 10$
3) $n(Q \cap M) = 8$
4) $n(F \cap Q) = 7$
5) $n(M) = 38$
6) $n(Q) = 46$
7) $n(F) = 45$
8) $n(\bar{F}\bar{Q}\bar{M}) = 12 = n(\overline{F \cup Q \cup M})$

Pero: $n(F \cup Q \cup M) = n(F) + n(Q) + n(M) - n(FQ) - n(FM) - n(QM) + n(FQM)$

Entonces: $108 = 45 + 46 + 38 - 7 - 10 - 8 + x$

$$108 = 104 + x$$

$$108 - 104 = x \Longleftrightarrow x = 4$$

Respuesta: Aprobaron los tres cursos: 4 alumnos.

05 En una batalla intervinieron 100 hombres, los cuales:

42 fueron heridos en la cabeza
43 " " " el brazo
32 " " " la pierna
8 " " " la pierna y el brazo
5 " " " la cabeza y el brazo
6 " " " la pierna y en la cabeza

Si todos fueron heridos, averiguar cuántos hombres fueron heridos en los tres lugares.

Solución: 2 hombres.

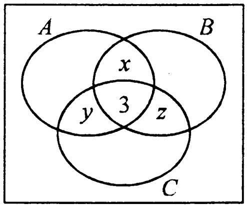
06 En una universidad hay 58 jugadores, de los cuales:

38 juegan fútbol
15 " básquetbol
20 " béisbol
3 " los tres deportes

a) ¿Cuántos jugadores figuraban en dos de los tres deportes?

b) ¿Cuántos al menos en dos deportes?

Solución:



Supongamos que:

A : Jugadores de fútbol
B : " " básquetbol
C : " " béisbol

Donde la distribución en orden, debe ser:
1º) $n(A \cap B \cap C) = 3$
2º) $n(C) = 20$
3º) $n(B) = 15$
4º) $n(A) = 38$
5º) $n(A \cup B \cup C) = 58$

Se pide:

a) $n(AB\overline{C}) + n(BC\overline{A}) + n(AC\overline{B}) = x + z + y$: "figuran sólo en dos deportes"

b) $x + y + z + 3$: "al menos en dos deportes"

Pero se sabe que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AB) - n(AC) - n(BC) + n(ABC)$$

$$58 = 38 + 15 + 20 - (x+3) - (y+3) - (z+3) + 3$$

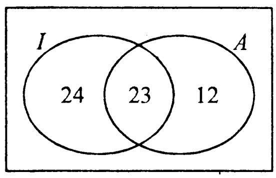
a) $\boxed{x + y + z = 9}$

además: b) $\boxed{x + y + z + 3 = 11}$

07 En un instituto de investigación científico trabajan 67 personas. De éstas, 47 conocen el inglés, 35 el alemán y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas en el Instituto no conocen el inglés ni el alemán?

Solución:

Las distribuciones en orden son:
1º) $n(I \cap A) = 23$
2º) $n(A) = 35$
3º) $n(I) = 47$



I : conocen inglés
A : conocen alemán

Por conocerse: $n(I \cup A)$

Se pide hallar: $n(I' \cap A') = n((I \cup A)')$

$$= n(\Omega) - n(I \cup A)$$

$$= 67 - n(I \cup A)$$

pero: $n(I \cup A) = n(I) + n(A) - n(I \cap A)$

$$= 47 + 35 - 23$$

$$= 59$$

Por lo tanto: $67 - n(I \cup A) = 67 - 59$

$$= 8$$

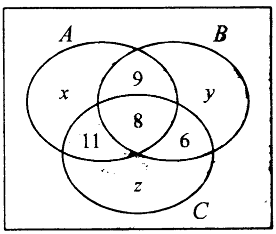
08 100 personas respondieron a un cuestionario formado por 3 preguntas. Cada pregunta debía contestarse por sí o por no y una sóla de estas respuestas es correcta.

Si sabemos que:

a) 8 personas contestaron bien las 3 preguntas
b) 9 " " " sólo la 1ra. y 2da.
c) 11 " " " sólo la 1ra. y la 3ra.
d) 6 " " " sólo la 2da y la 3ra.
e) 55 " " " la 1ra. pregunta por lo menos
f) 32 contestaron a la 2da. por lo menos.
g) 49 respondieron a la 3ra. por lo menos.

¿Cuántas personas no contestaron bien ninguna pregunta?

Solución:



Supongamos que:

A : Respondieron bien la 1ra. pregunta
B : " " " 2da "
C : " " " 3ra "

Las distribuciones en el diagrama, de deben hacerse siguiendo el siguiente orden:

1°) $n(A \cap B \cap C) = 8$

2°) $n(A\,B\,\overline{C}) = 9$

3°) $n(A\,C\,\overline{B}) = 11$

4°) $n(B\,C\,\overline{A}) = 6$

5°) $n(A\,\overline{B}\,\overline{C}) + n(A\,B\,\overline{C}) + n(A\,C\,\overline{B}) + n(ABC) = 55$

$$x \quad + \quad 9 \quad + \quad 11 \quad + \quad 8 \quad = 55$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \quad + \quad 28 \quad = \quad 55$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \quad = \quad 27$$

6°) $n(B\,\overline{A}\,\overline{C})+n(A\,B\,\overline{C})+n(B\,C\,\overline{A})+n(ABC)=32$

$$y \quad + \quad 9 \quad + \quad 6 \quad + \quad 8 \quad = \quad 32$$
$$y \quad = \quad 9$$

7°) $n(C\,\overline{A}\,\overline{B})+n(B\,C\,\overline{A})+n(A\,C\,\overline{B})+n(A\,B\,C)=49$

$$z \quad + \quad 6 \quad + \quad 11 \quad + \quad 8 \quad = \quad 49$$
$$z \quad = \quad 24$$

8°) Entonces:

$$\begin{aligned} n(A) &= x+9+11+8 \\ &= 27+9+11+8 \\ &= 55 \\ n(B) &= y+9+6+8 \\ &= 32 \\ n(C) &= z+11+6+8 \\ &= 49 \end{aligned}$$

9°) Pero: $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(AB)-n(AC)-n(BC)+n(ABC)$

$$= \; 55 + \; 32 + \; 49 \; - \; 17 \; - \; 19 \; - \; 14 \; + \; 8$$
$$= \; 94$$

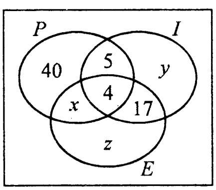
No contestaron bien ninguna pregunta: $100-94=6$ personas.

09 En la edición de un libro han resultado 120 ejemplares con fallas: fallas en el papel, en la impresión y fallas en la encuadernación. Si se sabe que:

a) 68 libros tienen la 1ra. falla por lo menos.
b) 32 tienen la 2da. falla por lo menos.
c) 40 tienen la 1ra. falla solamente.
d) 5 tienen la 1ra. y 2da. pero no la 3ra.
e) 17 tienen la 2da. y 3ra. falla pero no la 1ra.
f) 4 tienen las 3 fallas.

¿Cuántos libros tienen sólo la 3ra. falla?. ¿Cuántos tienen la 3ra. falla por lo menos?

***Solución*:**



Supongamos que:

P : conjunto de libros con falla en el papel.

I : conjunto de libros con falla en la impresión.

E : conjunto de libros con falla en la encuadernación.

La distribución de los datos en el siguiente diagrama, en orden, es:

1°) $n(P\,I\,E) = 4$

2°) $n(I\,E\,\overline{P}) = 17$

3°) $n(P\,I\,\overline{E}) = 5$

4°) $n(P\,\overline{I}\,\overline{E}) = 40$

5°) $n(I) = 32 = n(I\,\overline{P}\,\overline{E}) + n(P\,I\,\overline{E}) + n(I\,E\,\overline{P}) + n(P\,I\,E)$

6°) $n(P) = 68 = n(P\,\overline{I}\,\overline{E}) + n(P\,I\,\overline{E}) + n(P\,E\,\overline{I}) + n(P\,I\,E)$

Se pide hallar: $n(E\,\overline{P}\,\overline{I}) = z$ $\longrightarrow$ *Libros que tienen sólo la 3ª falla.*

y $n(E) = x + z + 4 + 17$ $\longrightarrow$ ***Libros que tienen la 3ª falla por lo menos.***

Veamos:

Mirando el diagrama tenemos:

$$n(P) = x + 40 + 5 + 4$$
$$68 = x + 49$$
$$x = 19$$

Además:

$$n(I) = y + 17 + 4 + 5$$
$$32 = y + 26$$
$$y = 6$$

Pero:

$$n(P \cup I \cup E) = (x + 40 + 5 + 4) + (y + 17) + (z)$$
$$120 = (19 + 40 + 5 + 4) + (6 + 17) + z$$
$$120 = 68 + 23 + z$$
$$29 = z \longleftarrow$$ *N° de libros que tienen sólo la 3ra. falla.*

Por lo tanto:

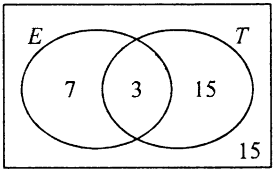
$$n(E) = x + z + 4 + 17$$
$$= 19 + 29 + 4 + 17$$
$$= 69 \longleftarrow$$ *N° de libros que tienen la 3ra. falla por lo menos.*

10 En un conjunto que forman 40 personas, hay algunos que estudian o trabajan y otras que ni estudian ni trabajan.

Si hay:
a) 15 personas que no estudian ni trabajan.
b) 10 personas que estudian.
c) 3 personas que estudian y trabajan.

¿Cuántos trabajan?, ¿cuántos sólo trabajan?, ¿cuántos sólo estudian?

Solución:



Supongamos que:

E : conjunto de personas que estudian.
T : conjunto de personas que trabajan.

Entonces la distribución en el diagrama es:

1°) $n(ET) = 3$ $\qquad ET = E \cap T$

2°) $n(E) = 10$ $\qquad \bar{E}\bar{T} = E' \cap T' = (E \cup T)'$

3°) $n(\bar{E}\bar{T}) = 15$ $\longleftarrow$ *Nº de personas que no estudian ni trabajan.*

Por los datos conocidos, podemos deducir que:

$$\underbrace{n(E' \cap T')}_{15} = n((E \cup T)') = \underbrace{n(\Omega)}_{40} - n(E \cup T)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{n(E \cup T)}} = n(\Omega) - n(E' \cap T') \quad , \quad n(\Omega) = 40 \text{ total de personas}$$

$$= 40 - 15$$

$$= 25$$

Pero: $n(E \cup T) = n(E) + n(T) - n(ET)$

$$25 = 10 + n(T) - 3$$

$$n(T) = 18$$

Por lo tanto:

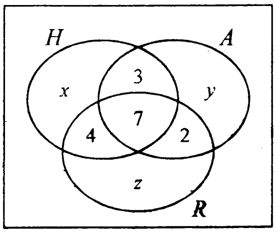
a) $n(T) = 18$ $\longleftarrow$ *nº de personas que trabajan.*

b) $n(T\bar{E}) = 15$ $\longleftarrow$ *nº de personas que sólo trabajan.*

c) $n(E\bar{T}) = 17$ $\longleftarrow$ *nº de personas que sólo estudian.*

11 La **TOYOTA** del **PERÚ**, vendió 47 automóviles antes de la devaluación del mes de julio, 23 de ellos tenían dirección hidráulica; 27 eran de cambios automáticos; 20 tenían radio; 7 con dirección hidráulica, cambios automáticos y radio; 2 tenían cambios automáticos y radio pero no dirección hidráulica; 3 eran con dirección hidráulica, cambios automáticos y sin radio; 4 tenían dirección hidraúlica y radio pero no dirección hidraúlica. ¿Cuántos automóviles se vendieron con solamente uno de éstos accesorios?

***Solución*:**
La distribución de los datos sobre el diagrama, debe seguir el siguiente orden:



1°) $n(H\,A\,R)=7$

2°) $n(A\,R\,\overline{H})=2$

3°) $n(H\,R\,\overline{A})=4$

4°) $n(H\,A\,\overline{R})=3$

5°) $n(R)=20$

6°) $n(A)=27$

7°) $n(H)=23$

8°) $n(H\cup A\cup R)=47$

Se pide hallar: $n(H\,\overline{A}\,\overline{R})+n(A\,\overline{H}\,\overline{R})+n(R\,\overline{H}\,\overline{A})$

$$= \quad x \quad + \quad y \quad + \quad z$$

Si miramos el diagrama, nos daremos cuenta que:

$$n(H\cup A\cup R)=(4+x+3+7)+(y+z)+2$$
$$47=x+y+z+16$$
$$31=x+y+z$$

NOTA:
No es la única forma de resolver, intente resolver de otra manera.

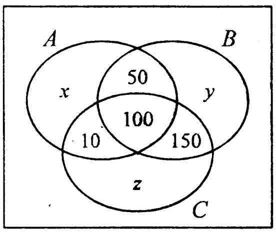
12 El departamento de publicidad de **SAGA** efectúa una encuesta a un grupo seleccionado de 1,000 clientes, de entre todos los que abrieron su cuenta de crédito en el mes pasado de diciembre. Se les pregunta si su crédito fue utilizado para comprar artículos para el hogar, artículos de vestir o juguetes. Los resultados de la encuesta se han tabulado así:

MERCANCÍA	Nº DE PERSONAS
Artículos para el hogar	275
Artículos de vestir	400
Juguetes	550
Artículos para el hogar y de vestir	150
Artículos para el hogar y juguetes	110
Artículos de vestir y juguetes	250
Artículos de vestir, del hogar y juguetes	100

Se pregunta:

a) ¿Cuántas personas no usaron su crédito en ninguna de esas 3 mercancías?
b) ¿Cuántas personas utilizaron su crédito sólo para comprar artículos de vestir? ¿Sólo para artículos del hogar? ¿Sólo para juguetes?

Solución:



Supongamos que: A : conjunto de artículos para el hogar.
B : conjunto de artículos de vestir.
C : conjunto de juguetes

La distribución en el diagrama es:
1º) $n(ABC) = 100$
2º) $n(BC) = 250$
3º) $n(AC) = 110$
4º) $n(AB) = 150$
5º) $n(C) = 550$
6º) $n(B) = 400$
7º) $n(A) = 275$

Se pide hallar:

a) $n(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}) = 1{,}000 - n(A \cup B \cup C)$

b) *i)* $n(B\,\bar{A}\,\bar{C}) = y$ $\longleftarrow$ *Sólo para comprar artículos de vestir.*

ii) $n(A\,\bar{B}\,\bar{C}) = x$ $\longleftarrow$ *Sólo para artículos del hogar.*

iii) $n(C\,\bar{A}\,\bar{B}) = z$ $\longleftarrow$ *Sólo para juguetes.*

Pero: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AB) - n(AC) - n(BC) + n(ABC)$

$= 275 + 400 + 550 - 150 - 110 - 250 + 100$

$= 815$

Entonces: a) $n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1{,}000 - 815 = 185$

Además b)
$$\begin{cases} i) & n(A) = x + 50 + 100 + 10 \\ & 275 = x + 160 \\ & 115 = x \\ ii) & n(B) = y + 150 + 100 + 50 \\ & 400 = y + 300 \\ & 100 = y \\ iii) & n(C) = z + 10 + 100 + 150 \\ & 550 = z + 260 \\ & 290 = z \end{cases}$$

13 En una encuesta realizada por la "*Panificadora Rodríguez*", se entrevistaron a 900 amas de casa sobe su preferencia en los tres productos que fabrica. Se obtuvieron los siguientes datos:

130 personas compran únicamente pan francés.
88 personas compran únicamente pan de maíz.
32 personas compran únicamente pan mantecado.
144 personas compran pan francés y pan de maíz exclusivamente.
86 personas compran pan de maíz y mantecado exclusivamente.
90 personas compran exclusivamente pan francés y mantecado.
205 personas compran los tres productos.

Se pregunta:

a) ¿Cuántas personas consumen al menos pan francés o pan de maíz?
b) ¿Cuántas personas no consumen los productos que fabrica esta panificadora?

***Solución*:**

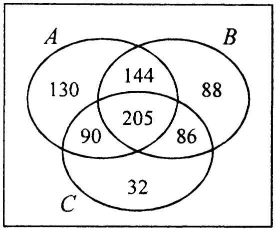
Supongamos que:

A : conjunto de pan francés.

B : conjunto de pan de maíz.

C : conjunto de pan mantecado.

La distribución en el diagrama, es:



1°) $n(ABC) = 205$

2°) $n(AC\overline{B}) = 90$

3°) $n(BC\overline{A}) = 86$

4°) $n(AB\overline{C}) = 144$

5°) $n(C\overline{A}\,\overline{B}) = 32$

6°) $n(B\overline{A}\,\overline{C}) = 88$

7°) $n(A\overline{B}\,\overline{C}) = 130$

Se pide hallar: a) $n(A \cup B)$

b) $900 - n(A \cup B \cup C) = n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$

Mirando el diagrama tendremos:

a) $n(A \cup B) = (130 + 144 + 205 + 90) + (88 + 86)$

$= 743$

b) $n(A \cup B \cup C) = (130 + 144 + 205 + 90) + (88 + 86) + (32)$

$= 775$

Por lo tanto: $n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 900 - 775 = 125$

PROBLEMAS

01. Si A, B y C son conjuntos no disjuntos dos a dos, deducir la fórmula que nos da el número de elementos de $(A \Delta B) \Delta C$.

02. Deducir la fórmula para determinar el número de elementos del conjunto $A \Delta B$

03. Si A es un conjunto que tiene $8z$ elementos, B es un conjunto con $5z$ elementos, los dos conjuntos tienen en común $2z-1$ elementos y se sabe que $n(A \cup B) = 56$, hallar el total de subconjuntos de $(A \cup B) \cap (B \cap A')$.

04. De 30 alumnos de una clase, 18 han aprobado Física y 23 Química y 5 ninguno de los dos cursos. ¿Cuántos alumnos han aprobado sólo uno de los dos cursos?

05. Considere el experimento de lanzar dos dados comunes. Cada resultado del experimento se designa por un par ordenado (x, y), donde x e y pueden tomar valores de 1 a 6.

Si U es el universo de todos los resultados posibles del experimento y:

$$A = \{(x, y) \in U / x + y \leq 4\}$$

$$B = \{(x, y) \in U / 4 < x + y \leq 6\}$$

Calcular el valor de k, si $k = \frac{n(A \cup B)}{n(U)}$

06. Treinta autos fueron ensamblados en una factoría. Las opciones ventajosas fueron un radio, aire acondicionado y juego de llantas adicionales. Se sabe que 15 de los autos tienen radio, 8 de ellos tienen aire acondicionado y 6 de ellos tienen un juego de llantas adicional; además, tres de ellos tienen las tres opciones.

¿Cuántos autos al menos no tienen ninguna de las opciones?

Rpta: 7.

07. En una encuesta entre los alumnos de la universidad, se obtuvieron los siguientes resultados:
El 55% de los encuestados aprobaron Química.
El 30% de los encuestados aprobaron Matemática.
El 50% de los encuestados aprobaron Lengua.
El 10% de los encuestados aprobaron los tres cursos.
El 40% de los que aprobaron Química no aprobaron ningún otro curso y el 20% de

los que aprobaron Química también aprobaron Matemática pero no Lengua.
El 14% de los encuestados no aprobó ninguno de los tres cursos.
Si se sabe que 256 de los encuestados aprobaron Matemática y Lengua, determinar:

a) ¿Cuántos aprobaron los tres cursos?

b) ¿Cuántos aprobaron Matemática o Lengua pero no Química?

08. El número de personas que toman la bebida A es 190.
El número de personas que toman la bebida B es 110.
El número de personas que toman la bebida C es 150.
El número de personas que sólo toman C es la mitad de las que sólo toman B y 1/3 de los que sólo toman A.

El número de personas que sólo toman B y C es la mitad de los que sólo toman A y B. Si el número de personas que toman las 3 bebidas es 1/3 de los que sólo toman A y C. ¿Cuántas personas toman una bebida solamente?

09. María tiene los siguientes datos al comprar garbanzo, maíz y trigo:

El costo total de garbanzo es	22 dólares.
El costo total de maíz es	20 dólares
El costo total de trigo es	38 dólares.

Pero al recoger estos productos se mezclaron y se obtuvieron los siguientes datos:

El costo de sólo garbanzo es 1/2 del costo de sólo maíz y 1/3 del costo de sólo trigo.
Solo la mezcla de trigo y maíz costó el doble de sólo maíz y garbanzo mezclado.
La mezcla de los 3 productos costó 1/5 de solo el garbanzo y trigo mezclado.
¿Cuál es el costo de los productos no mezclados?

Rpta: Sólo garbanzo: 6 ; sólo maíz: 12 ; sólo trigo: 18.

10. Si en una encuesta a 200 estudiantes se halló que:

68	prefieren matemáticas,
138	son inteligentes,
160	son estudiosos,
120	son estudiosos e inteligentes,
20	prefieren matemáticas y no son inteligentes,
13	prefieren matemáticas y no son estudiosos y
15	prefieren matemáticas y son estudiosos pero no so inteligentes.

Utilizando diagramas de Venn, resolver lo siguiente:

a) ¿Cuántos prefieren matemáticas, son estudiosos y son inteligentes?
b) ¿Cuántos son estudiosos e inteligentes pero no prefieren matemáticas?
c) ¿Cuántos no prefieren matemáticas, ni son estudiosos, ni son inteligentes?

2.38 MISCELÁNEA DE PROBLEMAS RESUELTOS

Relaciones de **INCLUSIÓN**, **IGUALDAD**. Complemento. **OPERACIONES** de intersección, unión, diferencia.

01 Usando propiedades demostrar que:

Si $(A-B)\subset(B\,\Delta\,C) \Rightarrow \underbrace{A\subset(B\cup C)}_{I} \wedge \underbrace{(A-C)\subset B}_{II}$

Prueba:

Basado en la propiedad: $M\subset N \iff M\cap N'=\phi$, debo probar $(I)\wedge(II)$.

1. Se cumplirá (I), si pruebo que $A\cap(B\cap C)'=\phi$

Veamos:

2. Por hipótesis: $(A-B)\subset(B\,\Delta\,C)$

3. Pero: $(A-B)\subset(B\,\Delta\,C) \iff (A-B)\cap(B\,\Delta\,C)'=\phi$

4. Reducir: $(A-B)\subset(B\,\Delta\,C)'$

$$= (A\cap B')\cap[(B\cup C)\cap(B\cap C)']'$$

$$= (A\cap B')\cap[(B\cup C)'\cup(B\cap C)]$$

$$= (A\cap B')\cap[(B'\cap C')\cup(B\cap C)]$$

Forma más sencilla:

$$(A\cap B')\cap[(B'\cap C')\cup(B\cup C)]$$

$$\underbrace{\underbrace{[(A\cap B')\cap(B'\cap C')]}_{(A\cap B'\cap C')}\cup\underbrace{[(A\cap B')\cap(B\cap C)]}_{\phi}}_{A\cap B'\cap C'}$$

$$= (A\cap B')\cap\{[(B'\cap C')\cup B]\cap[(B'\cap C')\cup C]\}$$

$$= (A\cap B')\cap\{[\underbrace{(B'\cup B)}_{\Omega}\cap(C'\cup B)]\cap[(B'\cup C)\cap\underbrace{(C'\cup C)}_{\Omega}]\}$$

$$= (A\cap B')\cap\{(C'\cup B)\cap(B'\cup C)\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4^*$$

$$= \{(A\cap B')\cap(C'\cup B)\}\cap(B'\cup C)$$

$$= \{A\cap\underbrace{[B'\cap(C'\cup B)]}\}\cap(B'\cup C)$$

$$= \{A\cap(B'\cap C')\}\cap(B'\cup C)$$

$$= A\cap\{(B'\cap C')\cap(B'\cup C)\}$$

$$= A \cap \{[(B' \cap C') \cap B'] \cup [(B' \cap \underbrace{C') \cap C}_{\phi}]\}$$

$$= A \cap \{[B' \cap C'] \cup \phi\}$$

$$= A \cap (B' \cap C') \text{ .... } (4{**})$$

$$= A \cap (B \cup C)'$$

5. Por 3. $A \cap (B \cup C)' = \phi \;\Rightarrow\; A \subset B \cup C$

   Para probar que $(A - C) \subset B$, debo verificar que $(A - C) \cap B' = \phi$

Veamos:

6. Al partir de la hipótesis en 4. obtuvimos que:

$$\begin{aligned}
(A - B) \subset (B \,\Delta\, C) &\iff (A - B) \cap (B \,\Delta\, C)' = \phi \\
&\iff A \cap (B' \cap C') = \phi \quad \text{........... por } (4{**}) \\
&\iff (A \cap C') \cap B' = \phi \\
&\iff (A - C) \cap B' = \phi \\
&\;\Rightarrow (A - C) \subset B
\end{aligned}$$

NOTA:
En el paso (4*) podemos aplicar la propiedad de absorción.

Así: $(A \cap B') \cap \{(C' \cup B) \cap (B' \cup C)\}$ 4*

$= [A \cap (C' \cup B)] \cap [\underbrace{B' \cap (B' \cup C)}_{B'}]$ .... Prop. asociativa

$= [A \cap (C' \cup B)] \cap B'$

$= A \cap [(C' \cup B) \cap B']$

$= A \cap [(C' \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\phi}] = A \cap [C' \cap B'] = A \cap C' \cap B'$

02 Simplificar, aplicando propiedades:

$$[(A\cap B)\cup(\complement C\cup\complement D\cup\complement E)]\cap[(A\cap B)\cup(C\cap D\cap E)]$$

Solución:

$$[(A\cap B)\cup(C'\cup D'\cup E')]\cap[(A\cap B)\cup(C\cap D\cap E)]=$$

$$=(A\cap B)\cup[(C'\cup D'\cup E')\cap(C\cap D\cap E)]$$

$$=(A\cap B)\cup[\underbrace{(C\cap D\cap E)'\cap(C\cap D\cap E)}_{\phi}]$$

$$=(A\cap B)\cup\phi=A\cap B$$

03 Si $\complement_B A=B-A$, simplificar $[(A'-B)'-(B-A')]\cup[(A'\cap B')\cup(A-B')]$

Solución:

1. Si $\complement_B A=B-A$, entonces $\complement_B A\subset B$
2. A simplificar:

$$[(A'-B)'-(B-A')]\cup[(A'\cap B')\cup(A-B')]=$$

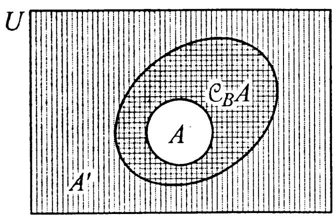
$$=[(A'\cap B')'\cap(B\cap A)']\cup[(A'\cap B')\cup(A\cap B)]$$

$$=[\underbrace{(A\cup B)}_{B}\cap\underbrace{(B\cap A)'}_{A}]\cup[\underbrace{(A\cup B)'}_{B}\cup\underbrace{(A\cap B)}_{A}]$$

$$=[B\cap A']\cup[B'\cup A]$$

$$=(B-A)\cup(B\cap A')'$$

$$=(B-A)\cup(B-A)'=(\complement_B A)\cup(\complement_B A)'=U$$



$A\subset B$, $A'=U-A$

$B'=U-B$

$A\cap B=A$

$A\cup B=B$

$A\cup\complement_B A=B$

$A\cap\complement_B A=\phi$

04 Usando propiedades de conjuntos, demostrar que:

$(A\cup B)\cap \mathcal{C}B=A \iff A\cap B=\phi$

$(\Rightarrow)$ Hipótesis: $(A\cup B)\cap \mathcal{C}B=A$ implica que $A\cap B=\phi$

Veamos:

1) Partimos de $A\cap B$

2) Por hipótesis: $A=(A\cup B)\cap \mathcal{C}B$

3) Reemplazar 2) en 1).

$$A\cap B=[(A\cup B)\cap \mathcal{C}B]\cap B=(A\cup B)\cap[\underbrace{\mathcal{C}B\cap B}_{\phi}]$$

$$=(A\cup B)\cap\phi=\phi$$

$\Rightarrow \quad A\cap B=\phi$

$(\Leftarrow)$ Hipótesis: $A\cap B=\phi$ implica que $(A\cup B)\cap \mathcal{C}B=A$

Veamos:

1. Partimos de $(A\cup B)\cap \mathcal{C}B$
2. Aplicando propiedad distributiva:

$$(A\cup B)\cap \mathcal{C}B=(A\cap \mathcal{C}B)\cup(\underbrace{B\cap \mathcal{C}B}_{})$$

$$=(A\cap \mathcal{C}B)\cup \underbrace{\phi}_{}$$

3. Por hipótesis $\phi=A\cap B \Rightarrow$

$$=(\underbrace{A\cap\mathcal{C}B}_{})\cup(\underbrace{A\cap B}_{})$$

$$=\underbrace{A\cap}_{}(\underbrace{\mathcal{C}B\cup B}_{})$$

$$=A\cap \quad U$$

$$=A$$

OTRA FORMA

$(A\cap\mathcal{C}B)\cup\phi=A\cap\mathcal{C}B$

Pero: $A\cap B=\phi$

$A\cap(B')'=\phi$

esto implica: $A\subset B'$

Por tanto: $A\cap B'=A$

U = conjunto universal

05 Probar que: $(A\cap C)\cap(B'\cup C')=(A\cap C)\cap B'$

Prueba:

1. $(A\cap C)\cap(B'\cup C')=[(A\cap C)\cap B']\cup[(A\cap C)\cap C']$

$$=[(A\cap C)\cap B']\cup\underbrace{[A\cap(\underbrace{C\cap C'}_{\phi})]}_{\phi}$$

$$=(A\cap C)\cap B'$$

06 Probar que:

$(A \,\Delta\, B) \cap C = (A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C)$

Prueba:

Partiré del 1er. miembro para llegar al 2do. miembro.

$(A \,\Delta\, B) \cap C = C \cap (A \,\Delta\, B)$ .... Propiedad conmutativa de la $\cap$

$$= C \cap [(A \cap B') \cup (B \cap A')]$$

$$= [C \cap (A \cap B')] \cup [C \cap (B \cap A')]$$

Pero: $\begin{cases} (A\cap C)\cap B' = (A\cap C)\cap(B'\cup C') \\ (B\cap C)\cap A' = (B\cap C)\cap(A'\cup C') \end{cases}$

$$= [(A \cap C) \cap B'] \cup [(B \cap C) \cap A']$$

$$= [(A \cap C) \cap (B' \cup C')] \cup [(B \cap C) \cap (A' \cup C')]$$

$$= [(A \cap C) \cap (B \cap C)'] \cup [(B \cap C) \cap (A \cap C)']$$

$$= [(A \cap C) - (B \cap C)] \cup [(B \cap C) - (A \cap C)]$$

$$= (A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C)$$

07 Sean A, B, C conjuntos no vacíos diferentes dos a dos tales que:

$\mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A$; $C \cap \mathcal{C}B = \phi$; $A \cap \mathcal{C}C = \phi$

Simplificar: $[B \cap (C - A)] \cap [A \cap (B - C)]$

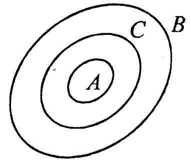
Solución:

1. Si $\mathcal{C}B \subset \mathcal{C}A \Rightarrow \boxed{A \subset B} \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$

2. Si $\boxed{C \cap \mathcal{C}B = \phi \Rightarrow C \subset B} \begin{cases} C \cap B = C \\ C \cup B = B \end{cases}$

3. Si $A \cap \mathcal{C}C = \phi \Rightarrow A \subset C \begin{cases} A \cap C = A \\ A \cup C = C \end{cases}$

$\Big\}\ A \subset C \subset B$



4. Simplificar: $[B \cap (C - A)] \cap [A \cup (B - C)]$

$$= [B \cap (C \cap A')] \cap [A \cup (B \cap C')]$$

$$= [(\underbrace{B \cap C}_{C}) \cap A'] \cap [(\underbrace{A \cup B}_{B}) \cap (A \cup C')]$$

$$= [C\cap A'] \cap [B\cap(A\cup C')]$$

$$= (C\cap B) \cap [A'\cap(A\cup C')]$$ propiedad asociativa de la intersección.

$$= C \cap \underbrace{[\underbrace{(A'\cap A)}_{\phi} \cup (A'\cap C')]}_{A'\cap C'} = C\cap(A'\cap C')$$

$$= C\cap(\underbrace{A\cup C}_{C})'$$

$$= C\cap C' = \phi$$

CONCLUSIÓN: $[B\cap(C-A)] \cap [A\cup(B-C)] = \phi$

08 Usando propiedades de conjuntos, hallar $R\cup S$, si

$R = \complement[A-(B-D)] \cap [\complement A\,\Delta\,(B-D)]$

$S = [(B-A)\cup(D-A)] \cup [A\cup(B\,\Delta\,D)]$

***Solución*:**

1. Simplificar R.

$$R = \complement[A-\underbrace{(B-D)}_{M}] \cap [\complement A\ \Delta\ \underbrace{(B-D)}_{M}]$$, hacer $B-D=M$

$$= \complement[A-M] \cap [\complement A\ \Delta\ M]$$

$$= \complement[A\cap\complement M] \cap [(\complement A\cup M)-(\complement A\cap M)]$$ .... Definición de **DIFERENCIA SIMÉTRICA**

$$[(\complement A\cup M)] \cap [(\complement A\cup M) \cap \complement(\complement A\cap M)]$$

$$= (\complement A\cup M) \cap \complement(\complement A\cap M)$$

$$= (\complement A\cup M) \cap (A\cup\complement M)$$

$$= [(\complement A\cup M)\cap A] \cup [(\complement A\cup M)\cap\complement M]$$

$$= [\underbrace{(\complement A\cap A)}_{\phi}\cup(M\cap A)] \cup [\underbrace{(\complement A\cap\complement M)}_{\complement(A\cup M)} \cup \underbrace{(M\cap\complement M)}_{\phi}]$$

2. $(A\cap M) \cup \complement(A\cup M) = \complement[\underbrace{\complement(A\cap M) \cap (A\cup M)}_{A\cup M\ -\ A\cap M}]$

$$= \complement[A\,\Delta\,M] = \complement[A\,\Delta\,(B-D)]$$

3. De 2: $(A \cap M) \cup \mathcal{C}(A \cup M) =$

$$= \ [A \cap (B - D)] \cup [\mathcal{C}A \cap \mathcal{C}M]$$

$$= \qquad \text{“} \qquad \cup [\mathcal{C}A \cap \mathcal{C}(B - D)]$$

$$= \qquad \text{“} \qquad \cup [\mathcal{C}A \cap \mathcal{C}(B \cap \mathcal{C}D)]$$

$$= \qquad \text{“} \qquad \cup [\mathcal{C}A \cap (\mathcal{C}B \cup D)]$$

$$= \qquad \text{“} \qquad \cup (\mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B) \cup (\mathcal{C}A \cap D)$$

$$= \ [A \cap (B - D)] \cup \mathcal{C}(A \cup B) \cup (D - A)$$

***Simplificar S*:**

$$S = \ [(B - A) \cup (D - A)] \cup [A \cup (B \,\Delta\, D)]$$

$$= \ [(B - A) \cup (D - A)] \cup [\quad '' \quad]$$

$$= [(B \cap A') \cup (D \cap A')] \cup [\quad '' \quad]$$

$$= [(B \cup D) \cap A'] \cup [A \cup (B \,\Delta\, D)]$$

$$= \{[(B \cup D) \cap A'] \cup A\} \cup (B \,\Delta\, D)$$

$$= (B \cup D \cup A) \cap \underbrace{(A' \cup A)}_{\Omega} \cup (B \,\Delta\, D) \ , \quad \Omega = \text{conjunto universal.}$$

$$= (B \cup D \cup A) \cup (B \,\Delta\, D)$$

$$= A \cup B \cup D \ , \text{ pues } \ B \,\Delta\, D \subset (B \cup D \cup A)$$

Hallar $R \cup S$

$$R \cup S = [A \cap (B - D)] \cup \mathcal{C}(A \cup D) \cup (D - A) \cup (A \cup B \cup D) = \Omega$$

es el universo

$= \Omega \cup$ (cualquier conjunto) $= \Omega$, pues el universo unido con otros conjuntos resulta el universo.

(09) Reducir la expresión:

$\{[(A\cup B')\cap(A\cap B)]\cup(A\cap B')\}\cup(C-A)=$

$=[(A\cup B')\cap(A\cap B)]\cup\{(A\cap B')\cup(C\cap A')\}$ ...... **P. Asociativa**

$=[\underbrace{((A\cup B')\cap A)}_{A}\cap B]\cup$ " .... **Prop. Absorción**

$=(A\cap B)\cup\{(A\cap B')\cup(C\cap A')\}$

$=\{(\underline{A\cap} B)\cup(\underline{A\cap} B')\}\cup(C\cap A')$ .... **P. Asociativa**

$=\underbrace{\{\underline{A\cap}\underbrace{(B\cup B')}_{\Omega}\}}_{A}\cup(C\cap A')$

$=A\cup(C\cap A')=(A\cup C)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{\Omega}=A\cup C$

(10) Demostrar que: $(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)=(A\,\Delta\,B)\cup(B\,\Delta\,C)$

Demostración:

Partiré del 2do. miembro y llegar a la expresión del 1er. miembro:

$(A\,\Delta\,B)\cup(B\,\Delta\,C)=$

$=[(A\cup B)-(A\cap B)]\cup[(B\cup C)-(B\cap C)]$ .... **Definición de DIFERENCIA SIMÉTRICA.**

$=[(A\cup B)\cap(A\cap B)']\cup[(B\cup C)\cap(B\cap C)']$

$=[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]\cup[(B\cup C)\cap(B'\cup C')]$

$=\{[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]\cup(B\cup C)\}\cap\{[(A\cup B)\cap(A'\cap B')]\cup(B'\cup C')\}$

$=\{\underbrace{[(A\cup B)\cup(B\cup C)]}_{A\cup B\cup C}\cap\underbrace{[(A'\cup \underline{\underline{B'}})\cup(\underline{\underline{B}}\cup C)]}_{\Omega}\}\cap\{\underbrace{[(A\cup \underline{\underline{B}})\cup(\underline{\underline{B'}}\cup C')]}_{\Omega}\cap\underbrace{[(A'\cup B')\cup(B'\cup C')]}_{A'\cup B'\cup C'}\}$

$=[(A\cup B\cup C)\cap\Omega]\cap[\Omega\cap(A'\cup B'\cup C')]$

$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C')$

$=(A\cup B\cup C)\cap(A\cap B\cap C)'=(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)$

(11) Sean A, B, C subconjuntos del conjunto universal Ω, utilizando propiedades, simplificar: $[A^C-(B^C-C)]^C \cap (C^C-B)^C$.

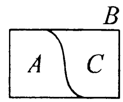
Solución:

$$\begin{aligned}
[A^C-(B^C-C)]^C \cap (C^C-B)^C &= [A^C \cap (B^C \cap C^C)^C] \cap (C^C \cap B^C)^C \\
&= [A \cup (B^C \cap C^C)] \cap (C \cup B) \\
&= [A \cup (B \cup C)^C] \cap (B \cup C) \\
&= [A \cap (B \cup C)] \cup [\underbrace{(B \cup C)^C \cap (B \cup C)}_{\phi}] \\
&= A \cap (B \cup C)
\end{aligned}$$

(12) Si A, B, C son subconjuntos no vacíos tales que A y C son disjuntos y que $A \cup C = B$, simplificar $A \,\Delta\, B \,\Delta\, A \,\Delta\, C$

Solución:

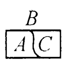
1. Por datos: $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $C \neq \phi$, $A \cap C \neq \phi$, $A \cup C = B$.
2. Según los datos, el diagrama correspondiente es:



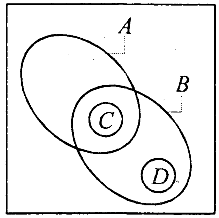
3. Luego: $A \,\Delta\, B \,\Delta\, A \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, A) \,\Delta\, C$

$$\begin{aligned}
&= A \,\Delta\, (A \,\Delta\, C) \,\Delta\, C \quad \text{.................. Propiedad asociativa y conmutativa de la diferencia simétrica.} \\
&= \underbrace{(A \,\Delta\, A)}_{\phi} \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) \\
&= \phi \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) \\
&= B \,\Delta\, C \\
&= \underbrace{(B \cup C)} - \underbrace{(B \cap C)} \quad \text{.................. definición de DIFERENCIA SIMÉTRICA.} \\
&= \underbrace{A \quad - \quad C} \quad , \quad \text{pues } C \subset B \begin{cases} C \cap B = C \\ C \cup B = B \end{cases} \\
&= \quad A \quad , \quad \text{porque } A \cup C = B \text{ y } A \cap C = \phi
\end{aligned}$$

NOTA:

En el diagrama  se opera como un rompecabezas, esto es lo gracioso y atractivo. Se cumplen: $A + C = B$, $B - C = A$, $B - A = C$.

(13) Se acuerdo al diagrama siguiente, simplificar: $\overline{(A\cup\overline{C})}\cup((\overline{A}\cap D)\cup B)$



Solución:

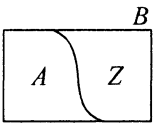
$$\overline{(A\cup\overline{C})}\cup((\overline{A}\cap D)\cup B)=\underbrace{(\overline{A}\cap C)}_{\phi}\cup(\underbrace{(\overline{A}\cap D)}_{D}\cup B)$$

$$=\phi\cup(D\cup B)=D\cup B=B$$

(14) Dados dos conjuntos cualesquiera A y B. Determinar el conjunto Z, expresado en términos de A y B, tal que se cumpla:

$$A\cup Z=A\cup B \quad \wedge \quad A\cap Z\neq\phi$$

Solución:



En este diagrama se cumplen $\begin{cases} A\cap Z=\phi \\ A\cup Z=B=A\cup B \end{cases}$

Luego: $Z=B-A$

(15) Aplicando definiciones, demostrar que: $B\subset A\cup(B-A)$

Demostración:

Debo probar: si $x\in B$ implica que $x\in[A\cup(B-A)] \iff x\in[A\cup(B\cap A')]$

$$\iff x\in[(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{\Omega}]$$

Veamos:

1. $\forall x\in B \Rightarrow \underbrace{x\in A}_{p} \vee \underbrace{x\in B}_{q}$ .... (por: $q \to p \vee q$)

2. $\Rightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge T$ ...... (por: $P \longleftrightarrow P \wedge T$), $T=$ tautología

3. $\Rightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\notin A)$ .... $(T\equiv p\vee\sim p)$
 $\Rightarrow x\in A \vee [x\in B \wedge x\notin A]$
 $\Rightarrow x\in A \vee [x\in(B-A)]$

4. $\Rightarrow x\in[A\cup(B-A)]$

5. Por 1 y 4: $B\subset[A\cup(B-A)]$

> **NOTA:** Se ha usado, paulatinamente, la siguientes **TAUTOLOGÍAS.**
> 1) $P \to p\vee q$
> 2) $p\vee q \equiv (p\vee q) \wedge T$
> $\equiv (p\vee q) \wedge (p\vee\sim p)$
> $\equiv p \vee (q \wedge \sim p)$
> 3) $p \vee \sim p \equiv T$
> $p\equiv x\in A$, $q\equiv x\in B$

(16) Demostrar mediante elementos, que para los conjuntos A, B, C se verifica:

$$(A\cap B\cap C)\cup[(A-B)-(C-B)]=[A-(B-C)]\cap[A-(C-B)]$$

Demostración:

Debo probar que si

$$x\in\{\underbrace{(A\cap B\cap C)\cup[(A-B)-(C-B)]}_{(\mathrm{I})}\}\iff x\in\{\underbrace{[A-(B-C)]\cap[A-(C-B)]}_{(\mathrm{II})}\}$$

Veamos:

Partiré de II para llegar a I.

1) Si $\quad x\in[A-(B-C)]\cap[A-(C-B)]\}$

$\Rightarrow x\in[A-(B-C)]\ \wedge\ x\in[A-(C-B)]$

$\Rightarrow [x\in A\wedge x\notin(B-C)]\ \wedge\ [x\in A\wedge x\notin(C-B)]$

$\Rightarrow [x\in A\wedge(x\notin B\vee x\in C)]\ \wedge\ [x\in A\wedge(x\notin C\vee x\in B)]$

$\Rightarrow [x\in A\wedge(x\notin B\vee x\in C)]\ \wedge\ (x\notin C\vee x\in B)$

$\Rightarrow [(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\notin C)]\ \wedge\ (x\notin C\vee x\in B)$

$\Rightarrow [(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\notin C\vee x\in B)]\ \vee\ [(x\in A\wedge x\in C)\wedge(x\notin C\vee x\in B)]$

$\Rightarrow [(x\in A\wedge x\notin B)\wedge\sim(x\in C\wedge x\notin B)]\vee[(x\in A\wedge x\in C)\wedge x\notin C]\vee[(x\in A\wedge x\in C)\wedge x\in B]$

$''\qquad \underbrace{\wedge\,[x\in A\wedge\underbrace{(x\in C\wedge x\notin C)}_{F}]}_{F}\vee[(x\in A\wedge x\in C)\wedge x\in B]$

$''\qquad \vee\ [x\in A\wedge x\in C\wedge x\in B]$

$\Rightarrow [x\in A\wedge x\in B\wedge x\in C]\ \vee\ [(x\in A\wedge x\notin B)\wedge\sim(x\in C\wedge x\notin B)]$

$\Rightarrow x\in(A\cap B\cap C)\vee[x\in(A-B)\wedge x\notin(C-B)]$

$\Rightarrow x\in(A\cap B\cap C)\ \vee\ x\in[(A-B)-(C-B)]$

2) $\Rightarrow\ x\in\{(A\cap B\cap C)\cup[(A-B)-(C-B)]\}$

3) Por 1) y 2) queda probado:

$[A-(B-C)]\cap[A-(C-B)]\subset(A\cap B\cap C)\cup[(A-B)-(C-B)]$

La otra inclusión queda como ejercicio.

(17) Usando definiciones, demostrar que: $A-(B\cap \complement A)=A$

Demostración:

Debo probar que: $\forall\, x\in[A-(B\cap \complement A)]$ implica $x\in A$

Veamos:

1. $\forall\, x\in[A-(B\cap \complement A)] \Rightarrow x\in A \wedge x\notin(B\cap \complement A)$

$$\Rightarrow x\in A \wedge [x\notin B \vee x\notin \complement A]$$

$$\Rightarrow x\in A \wedge [x\notin B \vee x\in A]$$

$$\Rightarrow \underbrace{x\in A}_{p} \wedge [\underbrace{x\in A}_{p} \vee \underbrace{x\in \complement B}_{p}]$$

$$\Rightarrow p \wedge [p \vee q] \equiv p$$

2. $\Rightarrow \qquad \equiv \overbrace{x\in A}$

3. Por 1 y 2 se cumple: $[A-(B\cap \complement A)]\subset A$

4. Ahora, probar la otra inclusión: $A\subset[A-(B\cap \complement A)]$ ...... *Queda como ejercicio.*

5. Por 3 y 4, debe ser: $A-(B\cap \complement A)=A$.

(18) Demostrar mediante definiciones: $(A\cap B)-(A\cap \complement C)=A\cap(B-\complement C)$

Prueba:

I) $(\subset)$

$\forall\, x\in[(A\cap B)-(A\cap \complement C)]$ debo probar que "$x\in A\cap(B-\complement C)$"

Veamos:

1. $\forall\, x\in[(A\cap B)-(A\cap \complement C)]$

$$\Rightarrow x\in(A\cap B) \wedge x\notin(A\cap \complement C)$$

$$\Rightarrow x\in(A\cap B)\wedge[x\notin A\vee x\notin\complement C]$$

$$\Rightarrow [x\in(A\cap B)\wedge x\notin A]\vee[x\in(A\cap B)\wedge x\notin\complement C]$$

$$\Rightarrow [(\underline{\underline{x\in A}}\wedge x\in B)\wedge\underline{\underline{x\notin A}}]\vee[x\in(A\cap B)\wedge x\in C]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{[\underbrace{(x\in A\wedge x\notin A)}_{F}\wedge x\in B]}_{F}\qquad\qquad ''\qquad\qquad}_{x\in(A\cap B)\wedge x\in C}$$

$$\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\wedge\underbrace{x\in C}_{})$$

$$\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\wedge x\notin\complement C)$$

$$\Rightarrow x\in A\wedge x\in(B-\complement C)$$

2. $\Rightarrow x\in[A\cap(B-\complement C)]$

3. Por 1 y 2 se cumple: $[(A\cap B)-(A\cap\complement C)]\subset[A\cap(B-\complement C)]$

4. (II) **FALTA PROBAR** ($\supset$) para que se cumpla la igualdad. (queda como ejercicio).

CONJUNTO POTENCIA

19 Sean las proposiciones:

p : B es un conjunto unitario.

q : $C=\{B,\phi\}$ es el conjunto potencia de B.

Determinar el valor de verdad de:

i) p es condicional **necesario** y suficiente para q

ii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)))=\{\phi,\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))\}$

Solución:

i) 1. Supongamos que $B=\{a\}$ es el conjunto unitario.

2. Luego $\mathcal{P}(B)=\{B,\phi\}=C$

3. Decir que p es **CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE** para q implica dos **cosas**:

1°) Si la condicional $\boxed{p} \Rightarrow q$ es verdadero, siendo p fijo; indica que p es condición suficiente para q.

2°) Si la condicional $q \Rightarrow \boxed{p}$ es verdadero, indica que p es condición necesaria para q.

Veamos:

4. Como $B = \{ a \}$ es conjunto unitario, implica que $C = \{ B, \phi \}$ es el conjunto potencia de B. Luego $p \longrightarrow q$ es verdadero. Es decir p es condición suficiente para q.

5. Como $\{ B, \phi \}$ es el conjunto potencia de B, cuyos únicos elementos son el mismo B y el conjunto vacío, implica que B tiene un solo elemento; por tanto $q \longrightarrow p$ es V. Es decir, p es condición necesaria para q.

6. Por 4. y 5. concluimos que p es condición necesaria y suficiente para q.

   Luego i) es **VERDADERO**.

ii) Se tiene $\mathcal{P}(\phi) = \{ \phi \}$. Es decir $\mathcal{P}(\phi)$ es unitario.

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) = \{ \mathcal{P}(\phi), \phi \}, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))$ tiene dos elementos.

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))) = \{ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)), \phi, \{ \mathcal{P}(\phi) \}, \{ \phi \} \}$

En consecuencia *ii*) es **FALSO**.

(20) Sea $A = \{ \mathcal{P}(\{ a \}), \mathcal{P}(\phi) \}$. Hallar:

a) $\mathcal{P}(A)$

b) **ANALIZAR** la verdad o falsedad de:

b$_1$) $[\phi \in \mathcal{P}(A) \ \wedge \ \phi \subset \mathcal{P}(A)] \ \Rightarrow \ \{ \{ \phi \} \} \subset \mathcal{P}(A)$

b$_2$) $\{ \phi, \{ a \} \} \in \mathcal{P}(A) \ \Rightarrow \ \{ \phi \} \in \mathcal{P}(A)$

***Solución*:**

a) $\mathcal{P}(A) = \{ A, \phi, \{ \mathcal{P}(\{ a \}) \}, \{ \mathcal{P}(\phi) \} \} = \{ A, \phi, \{ \{ a \}, \phi \}, \{ \{ \phi \} \} \}$

b) b$_1$) $$\underbrace{[\underbrace{\underbrace{\phi \in \mathcal{P}(A)}_{V} \ \wedge \ \underbrace{\phi \subset \mathcal{P}(A)}_{V}}_{V}] \ \Rightarrow \ \underbrace{\{ \{ \phi \} \} \subset \mathcal{P}(A)}_{F}}_{F}$$

b$_2$) $$\underbrace{\underbrace{\{ \phi, \{ a \} \} \in \mathcal{P}(A)}_{V} \ \Rightarrow \ \underbrace{\{ \phi \} \in \mathcal{P}(A)}_{F}}_{F}$$

(21) Demostrar usando propiedades sobre conjuntos que:

si $\mathcal{P}(A-B)\subset(B-C) \Rightarrow A\subset B$

***Prueba*:**

Si pruebo que: $A\cap B'=\phi$, entonces $A\subset B$

***Veamos*:**

1. Por propiedad P_5 de conjunto potencia, se cumple:

   si $\mathcal{P}(A-B)\subset\mathcal{P}(B-C)$ implica $\underbrace{(A-B)}\subset\underbrace{(B-C)}$

2. .... $\underbrace{A\cap B'}_{M} \subset \underbrace{B\cap C'}_{N}$

3. En 2 aplicar la propiedad: $M\subset N \iff M\cap N=M$

   así tendremos: $\underbrace{(A\cap B')\cap(B\cap C')}=A\cap B'$

4. Pero $\underbrace{A\cap\underbrace{(B'\cap B)}_{\phi}\cap C'}=A\cap B'$

   $\phi = A\cap B'$

5. Còmo $A\cap B'=\phi$, entonces $A\subset B$.

(22) Probar que $\underbrace{\mathcal{P}[(A\cap B)\cup C]}_{M}=\underbrace{\mathcal{P}(A\cup C)\cap\mathcal{P}(B\cup C)}_{N}$

***Demostración*:**

Por definición de igualdad: $M=N \iff M\subset N \wedge N\subset M$

Probemos la 1° inclusión: $M\subset N$

***Veamos*:**

1. $\forall X\in\mathcal{P}[(A\cap B)\cup C] \Rightarrow X\subset[(A\cap B)\cup C]$

$$\Rightarrow X\subset[(A\cup C)\cap(B\cup C)]$$

$$\Rightarrow X\subset(A\cup C) \wedge X\subset(B\cup C)$$

$$\Rightarrow X\in \mathcal{P}(A\cup C) \wedge X\in \mathcal{P}(B\cup C)$$

2. .... $\Rightarrow X\in[\mathcal{P}(A\cup C) \cap \mathcal{P}(B\cup C)]$

3. Por 1. y 2. afirmamos que $\mathcal{P}[A \cap B) \cup C] \subset \mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C)$.

4. Probar la 2ª inclusión: $N \subset M$, queda como ejercicio.

5. En conclusión: por 3 y 4 queda probado que la igualdad:
$\mathcal{P}[(A \cap B) \cup C] = \mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C)$

NOTA:
La demostración puede ser directa, si aplicamos el **TEOREMA** DE 2.22.

(23) Dado los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $B = \{m, a, d, f, p, q, t\}$. Si h es el número de subconjuntos propios de A que son disjuntos con B y k es el número de subconjuntos no vacios de B que son disjuntos con A. Hallar $h + k$.

***Solución*:**

1. Se debe quitar a los conjuntos A y B la intersección $A \cap B$.

2. Como $A \cap B = \{a, d, f\}$, entonces:

   $M = A - A \cap B = \{b, c, e\} \Rightarrow h = 2^3 - 1 = 7$

   $N = B - A \cap B = \{m, p, q, t\} \Rightarrow k = 2^4 - 1 = 15$

3. Por tanto: $h + k = 7 + 15 = 22$

2.39 CONJUNTOS EQUIPOTENTES, CONJUNTOS FINITOS e INFINITOS

FUNCIONES:

Definición.- Dados dos conjuntos E y F, se llama función definido en E y con valores en F a toda correspondencia f que asocia a cada elementos $x \in E$ un único elemento $y \in F$

Notación: $f : E \longrightarrow F$
$x \longmapsto y = f(x)$

Definición.- Se dice que f es inyectiva si y sólo si ,

$$f(x) = f(x') \text{ implica } x = x' \quad \forall\, x, x' \in E$$

Definición.- Se dice que f es suryectiva, si y sólo si, para todo $y \in F$, existe $x \in E$ tal que $f(x) = y$ o sea cuando $rang(f) = f(E)$.

rango de f.

Definición.- Se dice que $f : E \to F$ es biyectiva o una biyección, si y sólo si, es **INYECTIVA** y **SURYECTIVA.**

CONJUNTOS EQUIPOTENTES

Definición.- Dados los conjuntos A y B, se dice que A es equipotente a B o que A, B tienen la misma potencia y se denota $A \approx B$, si y sólo si, existe una aplicación

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{biyectiva}$$

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Definición.- Se dice que un conjunto A es finito, si y sólo si, para todo subconjunto propio B de A se tiene que A no es equipotente con B. En caso contrario, se dice que A es infinito.

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 01

Sean A, B, C y D subconjuntos de U. Demostrar que:

01. $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$

02. $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$

03. $A - B = (A \cup B) - B$

04. $A - B = A - (A \cap B)$

05. $A = (A - B) \cup B \Longleftrightarrow B \subset A$

06. $A = B \Longleftrightarrow \phi = (A - B) \cup (B - A)$

07. $A \cup (A \cap B) = A$

08. $A \cap (A \cup B) = A$

09. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

10. $A - (A \cap B) = A - B$

11. $A \cup B = (A \,\Delta\, B) \cup (A \cap B)$

12. $A \cap B = (A \cup B) - (A \,\Delta\, B)$

13. $A - B = (A \,\Delta\, B) - B$

14. $A \,\Delta\, B \subset (A \,\Delta\, C) \cup (B \,\Delta\, C)$

15. $A - (A \,\Delta\, B) = A \cap B$

16. $(A - B) \,\Delta\, (C - D) \subset (A \,\Delta\, C) \cup (B \,\Delta\, D)$

17. $A = B$ y $C = D \Rightarrow A \times C = B \times D$

18. $(A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$

19. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

20. $A \times C = B \times C$ y $C \neq \phi$ implican $A = B$

21. Si $A \subset C$ y $C \subset D$, expresar $\mathcal{C}_{B \times D}(A \times C)$ mediante uniones de productos.

22. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

23. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

24. $\mathcal{P}(A - B) \subset (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)) \cup \{\phi\}$

25. $A \cap B = \phi$ si y sólo si $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\phi\}$

GRUPO 02 DIFERENCIA SIMÉTRICA

01. Probar:

a) $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$

b) $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$

c) $A \,\Delta\, \phi = A$

d) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

e) $A = B \Longleftrightarrow A \,\Delta\, B = \phi$

f) $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$

02. ¿Bajo qué condiciones tiene solución la ecuación $B \,\Delta\, C = A$?

03. Sea A un conjunto. Supongamos $A \cup B = A$ para cada conjunto B. Mostrar que $B = \phi$.

04. Sean A y B dos conjuntos, tal que $A \cap B = \phi$. Demostrar que: $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ y $A \Delta B$ son subconjuntos de $A \cup B$.

05. Sean A y B dos conjuntos:

a) ¿Es $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? , ¿Es $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

b) Resolver la ecuación $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{A}$ para $\mathcal{A}$, obteniendo explícitamente $\mathcal{A}$ en términos de subconjuntos de A y B.

c) Usando (b) para computar: $\mathcal{P}(A \cup \{b\}) - \mathcal{P}(A)$
donde $\{b\}$ es un conjunto con $b \notin A$

06. Sea $A \neq \phi$ y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de partes de A (conjunto potencia)

Definición.- A todo subconjunto de $\mathcal{P}(A)$, lo llamaremos clase o familia de subconjuntos de A.

EJEMPLO.- Dado el conjunto $A = \{a , b , c\}$, el conjunto de partes de A es $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{a\}, \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\}\}$

Los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$:

$\mathcal{F} = \{\phi , A\}$

$\mathcal{G} = \{\phi , A , \{a\} , \{b\} , \{a , b\}\}$

Se llaman **familias** de subconjuntos de A o **clases** de subconjuntos de A.

Halle Ud. cinco clases de subconjunto de A.

07. Sea $A \neq \phi$, $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de partes de A.

Definición.- Sea $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $\mathfrak{I}$ es una topología sobre A si, y solamente si satisface las proposiciones:

1) $A \in \mathfrak{I}$, $\phi \in \mathfrak{I}$

2) Si $M_1 , M_2 , \dots , M_n \in \mathfrak{I}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \in \mathfrak{I}$.

Esto es "la intersección finita de los elementos de $\mathfrak{I}$, también es un elemento de $\mathfrak{I}$".

3) Si $M_\lambda \in \mathfrak{I}$, $\lambda \in I = \{1, 2, \ldots n\}$, entonces $\bigcup_{\lambda \in I} M_i \in \mathfrak{I}$

Esto es, "la unión arbitraria de los elementos de $\mathfrak{I}$ es un elemento de $\mathfrak{I}$ ".

Observación: Los elementos de $\mathfrak{I}$ son subconjuntos de A.

EJEMPLO.- Dado $A = \{a, b, c\}$

La familia $\mathfrak{I} = \{\phi, A, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ es una topología sobre A, porque cumple:

1) $\phi \in$, A son elementos de $\mathfrak{I}$.

2) $\{a\} \cap \{b\} = \phi \in \mathfrak{I}$, $\{a\} \cap \{a,b\} = \{a\} \in \mathfrak{I}$, $\{b\} \cap \{a,b\} = \{b\} \in \mathfrak{I}$
Cada elemento de $\mathfrak{I}$ intersectado con ϕ es $\phi \in \mathfrak{I}$.

Cada elemento de $\mathfrak{I}$ intersectado con A , es un elemento de $\mathfrak{I}$, la intersección finita de los elementos de $\mathfrak{I}$ es un elemento de $\mathfrak{I}$.

3) La unión $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$ es un elemento de $\mathfrak{I}$.
Cualquier unión de dos en dos o de tres en tres elementos de $\mathfrak{I}$, también es un elemento de $\mathfrak{I}$, la unión de cuatro en cuatro de los elementos de $\mathfrak{I}$, es un elemento de $\mathfrak{I}$; además $\phi \cup A \cup \{a\} \cup \{b\} \cup \{a,b\} = A \in \mathfrak{I}$. Todo lo dicho, se refiere a la unión arbitraria de elementos de $\mathfrak{I}$.

PROBLEMA: ¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos de A, constituyen una topología sobre A?

i) $\mathcal{J} = \{\phi, A, \{a\}\}$.

ii) $\mathcal{H} = \{\phi, A\}$.

iii) $\mathcal{E} = \{\phi, A, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$.

iv) $\mathcal{K} = \{\phi, A, \{a\}, \{b\}\}$.

08. Supongamos que a una de las dos caras de una moneda la llamamos "cara" (C) y a la otra "sello" (S). Al acto de lanzar, al aire, una, dos o tres monedas y esperar qué lado de la moneda aparece, en el suelo, mirando hacia arriba; se llama **EXPERIMENTO ALEATORIO**. Al conjunto de todos los resultados obtenidos de cada experimento aleatorio se llama **ESPACIO MUESTRAL**.

PROBLEMAS:

a) Hallar el espacio muestral, si lanzamos una moneda, una sola vez.

b) Hallar el espacio muestral, si lanzamos dos monedas, una sola vez.

c) Hallar el espacio muestral, si lanzamos tres monedas, una sola vez.

d) ¿Cuántos elementos tendrá el espacio muestral, obtenido al lanzar "n" monedas?

e) Halle el conjunto {números posibles de "CARAS" que aparecen arriba cuando se lanzan 5 monedas}.

09. a) Hallar el conjunto potencia del conjunto obtenida de a) del problema 8.

b) Hallar el conjunto potencia del conjunto obtenido de b) del problema 8.

c) ¿Cuántos subconjuntos propios tendrá el espacio muestral obtenido en c)

10. Tirar un dado normal, sobre una superficie lisa se obtiene el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) Hallar el subconjunto de Ω, cuyos elementos sean números pares.

b) Hallar el subconjunto de Ω, cuyos elementos sean números impares.

11. a) Hallar el espacio muestral (Ω), que se obtiene al lanzar un dado dos veces consecutivas.

b) De la parte a) obtener los siguientes subconjuntos de Ω:

i) El conjunto, que al sumar los puntos sea 7.

ii) El conjunto, que se obtiene 6 puntos sólo en la segunda tirada.

iii) $C = \{(x, y) \in \Omega / x = 5\}$

iv) El conjunto de obtener "suma" 6 puntos o 5 puntos.

v) $E = \{(x, y) \in \Omega / x + y > 8\}$

12. Con las cifras 1, 2 y 3 podemos formar números con estas tres cifras. Hallar el conjunto de números que se forman con estas tres cifras.

13. En el colegio "Mariscal Castilla", los padres de familia han formado un Comité Directivo conformado por tres personas : A, B, C. Los cargos a ocupar son : Presidente, Secretario y Tesorero. ¿De cuántas maneras se puede formar el Comité Directivo y cuál es el conjunto de ternas posibles?

14. Una caja contiene una moneda y un dado. Si Ud. extrae, una sola vez, primero la moneda y después el dado. Escriba el conjunto de todas las posibles parejas que se podrían obtener en este experimento aleatorio.

15. El espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado y observar el resultado, es el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Dado los siguientes subconjuntos de Ω :

$A=\{x\in\Omega/x$ es par$\}$; $B=\{x\in\Omega/x$ es múltiplo de $3\}$

Hallar: a) $A\cap B$, b) $A\cup B$, c) $A\,\Delta\,B$

16. Se tiene dos cajas, en la primera caja hay dos bolas numeradas con el 1 y con el 2, respectivamente, en la segunda caja hay tres bolas numeradas con el 1, 3 y 4, respectivamente. Un experimento aleatorio consiste en extraer una bola de la primera caja y luego extraer una bola de la segunda caja, en este orden.

a) Hallar el espacio muestral Ω que resulta de este experimento aleatorio.

b) Dado los conjuntos $A=\{(x,y)\in\Omega/x+y\geq 4\}$,

$B=\{(x,y)\in\Omega/x+y=5\}$. Hallar: $A\cap B$, $A-B$, $B-A$, $A\cup B$, $A\,\Delta\,B$

17. Llamemos a cada lado de una moneda : cara (C) y sello (S). Al tirar tres monedas una sola vez y observar el lado de la moneda que cae sobre una superficie lisa mirando hacia arriba, se obtiene el espacio muestral.

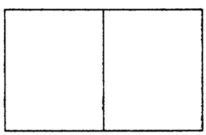
$$\Omega=\{\,CCC\,,CCS\,,CSC\,,SCC\,,CSS\,,SCS\,,SSC\,,SSS\,\}$$

Dados los conjuntos $A=\{\,w\in\Omega:\ w$ tiene una cara $\}$,

$B=\{\,w\in\Omega:\ w$ tiene al menos dos sellos $\}$.

Hallar: A , B , $A\cap B$, $A-B$, $B-A$, $A\cup B$

18. Un niño dispone de tres lápices de colores: azul (A), blanco (B) y rojo (R). Desea pintar



una bandera que tiene dos franjas, cada franja de diferente color. Halle el conjunto de todos los posibles colores diferentes que puede tener la bandera, teniendo en cuenta el orden de los colores diferentes de cada franja.

19. Se lanza un dado 2 veces consecutivas. Hallar:

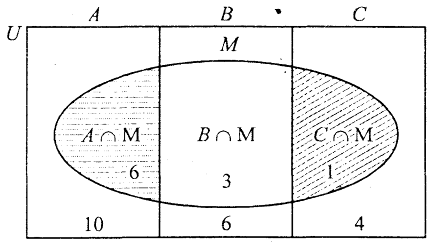
a) El conjunto, que al sumar los números de ambos dados den 7 puntos.
b) El conjunto, que sólo en la segunda tirada se obtiene 6 puntos.
c) El conjunto que se obtiene la suma 7 puntos o 6 puntos sólo en la segunda tirada.
d) El conjunto que se obtiene 7 puntos y 6 puntos sólo en la segunda tirada.

20. Se va a seleccionar un comité de tres miembros, a partir de un grupo de cinco personas A, B, C, D y E. Defina el espacio muestral.

GRUPO 03

21. En un aula de 24 alumnos, 5 de ellos estudian sólo inglés y 12 estudian sólo francés ¿cuántos estudian inglés y francés? si 4 de ellos no estudian ni inglés ni francés.

22. En el siguiente diagrama se tiene: el rectángulo U, que sea el conjunto que represente al territorio nacional. El rectángulo U se divide en tres rectángulos que son tres conjuntos A , B y C, que son disjuntos entre sí. Los conjuntos A, B y C representan a las regiones costa, sierra y selva, respectivamente.



El gobierno dispone de tres partidas presupuestales: M, N y R para financiar los proyectos de desarrollo.

En todo el país existen 20 proyectos diferentes, cada proyecto cuesta 1 millón de dólares.

En la costa existen 10 proyectos, en la sierra 6 proyectos y en la selva 4 proyectos. Según la partida M, se dispone para financiar 6 proyectos en la costa, 3 proyectos en la sierra y 1 proyecto en la selva.

a) Se elige un proyecto al azar, ¿Cuál será el porcentaje de que se financiará con la partida M?
b) Con la partida M, ¿con qué porcentaje se podrá hacer los proyectos en la sierra?

23. En el Club Deportivo Universitario hay dos socios S_1 y S_2 que son candidatos a la presidencia del Club. Del total de 120 socios, luego de una encuesta, han declarado que 48 personas apoyarán al candidato S_1 y 72 socios han declarado que apoyarán al candidato S_2. Todos los socios pagan una cuota mensual. Pero en los socios hay el temor que suban las cuotas mensuales, luego de la elección. Las posibilidades de que aumenten las cuotas mensuales de los socios son de 0.9 si sale elegido S_1 y de 0.2 si sale elegido S_2.

a) ¿Cuál es el porcentaje de que haya un aumento en las cuotas mensuales de los socios?
b) Si se aumenta la cuota mensual, ¿con qué porcentaje saldría elegido el socio S_1 ?¿el socio S_2 ?.

24. El experimento consiste en echar dos monedas sobre una mesa.

a) Hallar el espacio muestral.
Hallar los siguientes subconjuntos del espacio muestral:

b) A : en la primera moneda aparece sello;
B : en la primera moneda aparece cara;
C : en la segunda moneda aparece sello;
D : en la segunda moneda aparece cara;
E : el sello aparece por lo menos una vez;
F : la cara aparece por lo menos una vez;
G : aparecen una vez cara y la otra sello;
H : no aparece ninguna vez sello;
K : aparece dos veces sello.

c) Determinar a cuáles de los acontecimientos citados son equivalentes los acontecimientos siguientes:

1) $A \cup C$; 2) $A \cap C$; 3) $E \cap F$; 4) $G \cup E$
5) $G \cap E$; 6) $B \cap D$; 7) $E \cup K$

25. Se efectúan tres disparos sobre un objetivo. Sean:

A_1 : en el primer tiro da en el blanco.
A_2 : en el segundo tiro da en el blanco.
A_3 : en el tercer tiro da en el blanco.
A_1^C : en el primer tiro no se da en el blanco.
A_2^C : en el segundo tiro no se da en el blanco.
A_3^C : en el tercer tiro no se da en el blanco.

Represéntese, como suma de conjuntos (unión disjunta de conjuntos) y producto de conjuntos (intersección de conjuntos), los siguientes acontecimientos:
A : los tres disparos dan en el blanco;
B : los tres tiros fallan en el blanco;
C : por lo menos un tiro da en el blanco;
D : por lo menos un tiro falla su blanco;
E : por lo menos dos tiros dan en el blanco;
F : no más de un tiro da en el blanco;
G : el primer blanco se consigue en el tercer tiro.

26. Si se tiene tres cajas, la posibilidad de elegir una caja de las tres existentes es $\frac{1}{3}$.

En la primera caja existen "a" bolas blancas y "b" bolas negras; en la segunda caja existen "c" bolas blancas y "d" bolas negras; en la tercera caja solo hay bolas blancas. Alguien saca de una caja, elegido arbitrariamente, una bola. Determinar la posibilidad (expresado como fracción propia) de que esta bola sea blanca.

27. Una clase de Matemática avanzada está formada por 10 estudiantes de segundo año, 30 de cuarto año y 10 graduados. Tres estudiantes de segundo año, 10 del cuarto año y 5 graduados obtuvieron la calificación A. Si se selecciona al azar un estudiante de esta clase y se encuentra que su calificación es A, ¿Cuál es la posibilidad de que sea un graduado?

28. Suponga que de una investigación independiente, encontramos que el 2% (0.02) de todos los clientes que tienen crédito finalmente no pagan sus cuentas y de aquellas que finalmente sí la pagan, el 45% (0.45) se han demorado en por lo menos dos ocasiones. Encuentre la posibilidad (expresado en fracciones) de que un cliente que ya se demoró por lo menos en 2 ocasiones finalmente no pague su cuenta.

29. Supongamos que en la Universidad San Marcos el 60% de estudiantes son hombres y el resto son mujeres. El 40% de los hombres y el 20% de las mujeres fuman.
a) Determine el porcentaje de fumadores.
b) Determine el porcentaje que los estudiantes que fuman sean mujeres.

30. De 200 estudiantes de último año en el Colegio Simón Bolívar, 98 son mujeres, 54 están estudiando inglés avanzado y 20 de estas personas son mujeres. Si un estudiante se toma aleatoriamente del grupo ¿Cuál es el porcentaje de que sea estudiante de inglés avanzado?

GRUPO 04 (Cardinalidad de un conjunto)

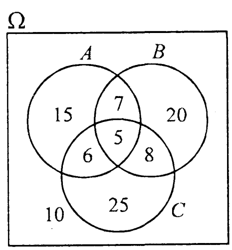
01. Probar que Card $(A \Delta B) = \text{card}(A - B) + \text{card}(B - A)$

02. Probar que Card $(A - B) = \text{Card}(B \cup A) - \text{Card}(B)$

03. Si $A \subset B$, probar que Card $(B \cup A) = \text{Card}(B)$

04. Si $A \cap B \cap C \neq \phi$, probar que Card $(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$.

05. El siguiente diagrama expresa la distribución del número de estudiantes de un colegio que cursan el quinto año de secundaria que estudian inglés (A), francés (B), alemán (C) y los que no estudian ninguno de estos tres idiomas.



Se pregunta:

a) ¿Cuántos estudiantes cursan el quinto año de secundaria?
b) ¿Cuántos estudian inglés?
c) ¿Cuántos estudian sólo inglés?
d) ¿Cuántos estudian francés?
e) ¿Cuántos estudian sólo francés?
f) ¿Cuántos estudian alemán?
g) ¿Cuántos estudian sólo alemán?
h) ¿Cuántos estudian inglés y francés?

i) ¿Cuántos estudian sólo inglés y francés?
j) ¿Cuántos estudian inglés y alemán?
k) ¿Cuántos estudian sólo inglés y alemán?
l) ¿Cuántos estudian alemán y francés?
ll) ¿Cuántos estudian sólo alemán y francés?
m) ¿Cuántos estudian solo un idioma
n) ¿Cuántos estudian sólo dos idiomas?
r) ¿Cuántos estudian al menos un idioma?
s) ¿Cuántos estudian a lo más dos idiomas?
t) ¿Cuántos estudian los tres idiomas?
u) ¿Cuántos estudian por lo menos dos idiomas?
w) ¿Cuántos no estudian idiomas, de los tres mencionados?

06. En una sección de 30 alumnos del Colegio San Agustín se practican dos deportes: básquetbol y fútbol.
10 alumnos no practican ninguno de los dos deportes;
15 alumnos practican sólo un deporte
¿Cuántos alumnos practican los dos deportes?

07. En una sección de 90 estudiantes de la Universidad San Agustín se encuestan a todos acerca de la práctica de tres deportes: fútbol, básquetbol y atletismo. El resultado de la encuesta es: 60 estudiantes practican sólo un deporte;
5 estudiantes practican los tres deportes;
10 no practican ningún deporte.

a) ¿Cuántos estudiantes practican sólo dos deportes?
b) ¿Cuántos estudiantes practican al menos un deporte?

08. De un total de 50 personas, 30 son hombres y 25 personas son casadas. Sabiendo que 15 mujeres son casadas.

a) ¿Cuántos hombres son casados? b) ¿Qué porcentaje de mujeres son casadas?

09. En la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo hay 200 empleados que laboran en calidad de nombrados, contratados y de servicio no personal; de los cuales se tiene:
70 empleados son contratados;
30 empleados son de servicio no personal.
Por el día de la AMISTAD, el rector ha dispuesto sortear 50 regalos, de los cuales :
20 empleados nombrados obtuvieron regalo;
15 empleados contratados obtuvieron regalo; y el resto lo obtuvieron los empleados de servicio no personal.
a) ¿Qué porcentaje de empleados nombrados, obtuvieron regalo?
b) ¿Qué porcentaje de empleados de servicio no personal, obtuvieron regalo?

10. Se encuestan a 60 lectores sobre sus preferencias de leer las revistas: A, B y C. Se obtuvieron los siguientes resultados:

No hay lectores que lean las revistas A y C, pero si hay lectores que leen A y B o B y C. 15 leen sólo A, 10 leen sólo B y 20 leen sólo C, 25 leen B y 30 leen C.

a) ¿Cuántos leen B y C?
b) ¿Cuántos leen A y B?
c) Cuántos leen dos revistas?
d) Cuántos leen sólo una revista?

11. 41 turistas se alojan en el hotel Bolívar y admiten que: hablan inglés 20 turistas, hablan francés 10 turistas y 22 turistas hablan sólo un idioma.

a) ¿Cuántos turistas hablan los dos idiomas?
b) ¿Cuántos turistas no hablan ninguno de los dos idiomas?

12. En la Universidad Católica se dan clases de: inglés, francés y alemán. Se ha elegido un aula, al azar, que tiene 50 alumnos, de los cuales:

30 estudian inglés, 20 estudian francés. Todos los que estudian francés también estudian inglés, 5 no estudian ninguno de los tres idiomas. Un grupo sólo estudian alemán.

a) ¿Cuántos alumnos estudian sólo alemán?
b) ¿Cuántos alumnos sólo inglés?

13. El municipio ha creado 3 impuestos: A, B y C.
En una vecindad de 100 personas se tiene: 30 personas pagan el impuesto B ; todos los que pagan el impuesto B también pagan el impuesto A. Los que pagan sólo el impuesto A son 40; no hay personas que pagan los impuestos B y C; hay 90 personas que pagan A o C.

a) ¿Cuántas personas pagan el impuesto C?
b) ¿Cuántas personas no pagan estos impuestos?
c) Si la diferencia entre los que pagan sólo el impuesto C y los que pagan A y C, es 10, ¿Cuántos pagan sólo C?, ¿Cuántos pagan A y C?

14. En la Universidad Nacional San Marcos se van a dar tres premios : A , B y C a distinguidos profesores. Hay 60 candidatos y luego de una previa calificación se obtuvieron los siguientes resultados :

Todos los que reciben el premio B, también recibirán el premio A. Hay 3 profesores que recibirán los tres premios; 5 profesores recibirán los premios A y C; 18 profesores recibirán el premio C; 35 profesores recibirán por lo menos los premios A y C.

a) ¿Cuántos profesores recibirán el premio A?
b) ¿Cuántos profesores recibirán sólo el premio C?
c) ¿Cuántos profesores no recibirán premios?
d) ¿Cuántos profesores recibirán solo el premio A?

15. De 150 pacientes examinadas en una clínica, se encontró que 60 tenían sólo enfermedades cardiacas; 20 tenían solo diabetes y 40 ninguno de estos males.

a) ¿Cuántos pacientes tenían ambas enfermedades?
b) ¿Cuántos pacientes tenían por lo menos uno de las enfermedades?
c) ¿Cuántos pacientes tenían una sola enfermedad?

GRUPO 05 (Partición de un conjunto)

Definición.- Sea $E_1, E_2, \ldots, E_n$ subconjuntos de un conjunto S. Se dice que estos subconjuntos forman una partición de S si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Cada E_i es un subconjunto propio de S, esto es,
$E_i \subset S \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$ pero $E_i \neq S$

ii) Los subconjuntos E_i son disjuntos en parejas, esto es:
$E_i \cap E_j = \phi \quad , \quad i \neq j \quad ; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$

iii) La unión de todos los subconjuntos E_i es S, esto es,
$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$.

Ejemplo.- Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Entonces $E_1 = \{a, b, c\}$, $E_2 = \{d, e\}$, $E_3 = \{f, g\}$, forman una partición de U, porque:

i) $E_1 \subset U \;,\; E_2 \subset U$ y $E_3 \subset U$

ii) $E_1 \cap E_2 = \phi \;,\; E_1 \cap E_3 = \phi \;,\; E_2 \cap E_3 = \phi$

iii) $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = U$

U

a	d	f
b	e	g
c		
E_1	E_2	E_3

NOTA: La idea de "partición de un conjunto" es, en este caso, como partir una torta en 3 partes.

PROBLEMAS

01. Supongamos que se tiene un club formado por 20 personas adultas.

a) Según el estado civil de los miembros del club, se tiene:

E_1 : 10 personas casadas ; E_2 : 6 mujeres solteras ; E_1 : 4 hombres solteros;

¿Los subconjuntos E_1 , E_2 , E_3 forman una partición de S ?
Justifique.

b) Según el sexo, los miembros del club se clasifican en:

E_1 : 12 hombres ; E_2 : 8 mujeres;

¿ E_1 y E_2 constituyen una partición del conjunto formado por los 20 miembros del club?

c) Según la preferencia política: 10 demócratas, 8 republicanos, 2 independientes ¿existe una partición del club?

02. El resultado de lanzar un dado normal sobre una mesa y observar la cara que mira hacia arriba es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Sean los subconjuntos: $A = \{ x \in \Omega : x \text{ es número par} \}$,

$B = \{ x \in \Omega : x \text{ es un número impar} \}$

¿Los subconjuntos A, B forman una partición de Ω?
Justifique.

03. El intervalo cerrado $S = [1,5]$, dividimos en los subintervalos

$E_1 = [1,2\rangle$, $E_2 = [2,3\rangle$, $E_3 = [3,4\rangle$, $E_4 = [4,5\rangle$.

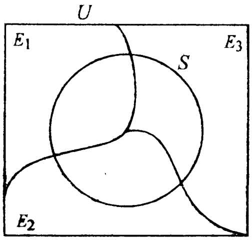
¿Los subconjuntos E_1 , E_2 , E_3 y E_4 forman una partición de S ? Justifique.

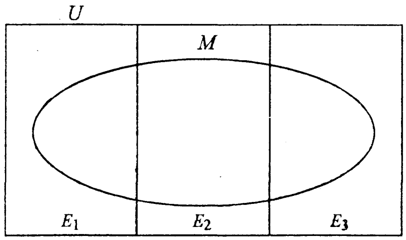
04. De 20 miembros que tiene el club (problema 1a) se tiene que:
6 de las personas casadas; 3 de las mujeres solteras y 1 de los solteros, son demócratas.

Sean D : el conjunto de los demócratas;
E_1 : personas casadas;
E_2 : mujeres solteras;
E_3 : hombres solteros.

¿Cuáles son los subconjuntos propios del conjunto D, que forman una partición del conjunto D?

05. En los siguientes diagramas:

a) 

b) 

i) En a) ¿Cuáles son los subconjuntos propios de U que son partición de U.
ii) ¿Cuáles son los subconjuntos propios de S que son partición de S?
iii) En b) ¿cuáles son los subconjuntos propios de M que son partición de M?

06. En un aula que tiene 30 niños y 20 niñas dieron examen de la asignatura de Matemáticas. El resultado fue: 10 niños aprobaron y 15 niñas desaprobaron.

a) ¿Qué porcentaje del total de alumnos aprobaron el examen de Matemáticas?
b) ¿Qué porcentaje de niñas aprobaron?

07. Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$

a) Hallar el conjunto potencia de A
b) Halle algunas particiones de A

08. Sean los conjuntos:

M : conjunto de personas que viven en Lima.
A : conjunto de personas que viven en Lima y fuman.
B : conjunto de personas que viven en Lima que tienen vivienda propia.
C : personas que viven en Lima y no tienen vivienda.
D : personas que viven en Lima y pagan 100 dólares por alquiler de vivienda mensual.
E : personas que viven en Lima y pagan más de 100 dólares y menos de 200 dólares por alquiler de vivienda mensual.
F : Personas que viven en Lima y pagan más de 200 dólares por alquiler de vivienda mensual. ¿Diga qué conjuntos son partición de otros?

09. Sean $\mathbb{Z}$: el conjunto de los números enteros

Dado los subconjuntos: $A = \{ x \in \mathbb{Z} : x \text{ es número par} \}$
$B = \{ x \in \mathbb{Z} : -3 < x \leq 4 \}$

¿Qué conjuntos forman una partición de $\mathbb{Z}$?

10. Dados dos conjuntos A y B tal que $A \cap B \neq \phi$

Dibuje un diagrama de Venn y señale las partición de los conjuntos A, B y $A \cup B$

GRUPO 06 (Operaciones con conjuntos)

01. Si el universo U es el conjunto de enteros positivos menores que 20, tabule cada una de los siguientes conjuntos:

$$A = \{x / x^2 \in U\} \quad , \quad B = \{x \in U : x^2 - 11x + 28 = 0\} \quad , \quad C = \{x \in \Omega / x \text{ es primo}\}$$

Hallar: a) $B - A$, $A - B$, $A \Delta B$

b) $\mathcal{C}(\mathcal{C}C - A)$

02. Dado los conjuntos:

A : el conjunto de todos los enteros positivos pares que constan de un dígito

B : el conjunto de todos los enteros negativos cuyos cuadrados son menores que 50.

C : el conjunto de los divisores de 6.

Hallar $A \cap B$, $B \cap C$, $B - A$

03. Si $A = \{1,2,3,4\}$, ¿Cuáles son los conjuntos propios de B, tales que $\{1,2\} \subset B$ y $B \subset A$

04. Sea $U = \{-2,0,1,2,3,4\}$ el conjunto universo

Sean $A = \{x \in U : x - x^2 = 0\}$

$B = \{x \in U : (x-1)(x^2-4) = 0\}$

$C = \{x \in U : (x^3-1)(x^2-3x+2) = 0\}$

Hallar: $A \cap B \cap C$, $C - B$, $(A - C) \cup (B - A)$, $\mathcal{C}B \cap \mathcal{C}A$

05. Sean A : conjunto de divisores de 4

B : conjunto de divisores de 6.

Hallar: $A \cap B$, $B - A$

06. Responda con un si o con un no. Justifique su respuesta:

a) ¿Es verdad que $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$?

b) ¿Es verdad que $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$?

c) ¿Es verdad que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$?

07. Dado los siguientes conjuntos:

$A=\{x\in I\!R:\ x^2=4\}$; $B=\{x\in I\!R:\ x^2+4=0\}$; $C=\{x\in I\!R:\ x^4-16=0\}$

Se pide hallar: a) $\mathcal{P}(A)$, b) $\mathcal{P}(B)$, c) $\mathcal{P}(C)$
d) $\mathcal{P}(C)-\mathcal{P}(A)$, e) $\mathcal{P}(C)-\mathcal{P}(B)$

08. Sea $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n\}$ el conjunto universal.
Se dan tres subconjuntos de U: A , B y C , tal que:

$A\cap B=\{a,b,c\}$, $A\cap C=\{d,c\}$,

$B\cap C\cap A^c=\{e\}$; $A\cap B^c\cap C^c=\{f,g\}$

$B\cap A^c\cap C^c=\{h,i\}$; $C\cap A^c\cap B^c=\{j,k,l\}$

Hallar: $A\cap B\cap C$, A,B,C , $A\cup B$, $A^c\cap B^c\cap C^c$.

09. Represente en un diagrama de Venn las siguientes relaciones conjuntistas:

E_1 , E_2 , E_3 son subconjuntos propios no vacíos de U, disjuntos dos a dos.

M es un subconjunto propio de U , tal que $M\cap E_i\neq\phi$, $\forall i=1,2,3$;

Además: $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{3}(M\cap E_i)=M$

10. Sea $U=\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$

Dado los conjuntos $A=\{x\in U:\ (x^2-3x+2)(x^2-7x+12)=0\}$
$B=\{x\in U:\ (x^2-6x+5)(x-2)=0\}$

Hallar: $A\,\Delta\,B$, $\mathcal{C}(A\cup B)$.

SOLUCIONES

02. $B \subset A$, $C \subset A$, $B \cap C = \phi$, $B \cup C = A$

07. (i) , (ii) , (iii) son topologías sobre A.

(iv) no es una topología sobre A.

08. a) $\Omega = \{C,S\}$, b) $\Omega = \{ (C,C) , (C,S) , (S,S) , (S,C) \}$,

c) $\Omega = \{ (C,C,C) , (C,C,S) , (C,S,C) , (S,C,C), (C,S,S), (S,C,S) (C,S,S), (S,S,S) \}$

Nota: Ω es la letra griega omega.

d) 2^n e) si x es el número de caras, entonces $x : 0,1,2,3,4,5$

09. a) $\mathcal{P}(\Omega) = \{ \phi , \Omega , \{C\} , \{S\} \}$

b) $\mathcal{P}(\Omega) = \{\phi , A, \{(C,C)\},\{(C,S)\},\{(S,S)\},\{(S,C)\},\{(C,C),(C,S)\},\{(C,C),(S,S)\},$
$\{(C,C),(S,C)\},\{(C,S),(S,S)\},\{(C,S),(S,C)\},\{(S,S),(S,C)\},\{(C,C),(C,S),(S,S)\},$
$\{(C,C), (C,S), (S,C)\}, \{(C,C),(S,S),(S,C)\},\{(C,S),(S,S),(S,C)\}$

c) $2^3 - 1 = 7$

10. a) $A = \{ 2 , 4 , 6 \}$, b) $B = \{ 1 , 3 , 5 \}$

11. a) $\Omega = \{ (1,1) (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6) , (2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) ,$
$(3,1) (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6) ,$
$(5,1) (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) , (6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6) \}$

b) i) $A = \{ (1,6) , (2,5) , (3,4) , (4,3) , (5,2) , (6,1) \}$
$ii)$ $B = \{ (1,6) , (2,6) , (3,6) , (4,6) , (5,6) \}$
$iii)$ $C = \{ (5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) \}$
$iv)$ $D = \{ (1,5) , (2,4) , (3,3) , (4,2) , (5,1) , (1,6) , (2,5) , (3,4), (4,3) , (5,2), (6,1)\}$
$v)$ $E = \{ (3,6) , (4,6) , (5,6) , (6,3) , (6,4) , (6,5) \}$

12. $A = \{ 123, 132 , 231 , 213 , 312 , 321 \}$

13. $A = \{ ABC , ACB , BCA , BAC , CAB , CBA \}$
Hay 6 maneras de formar el Comité Directivo.

14. $\Omega = \{ (c,1) , (c,2) , (c,3) , (c,4) , (c,5) , (c,6) , (s,1) , (s,2) , (s,3) (s,4) , (s,5), (s,6) \}$
c: cara , s: sello

15. $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}$
a) $A\cap B=\{6\}$, b) $A\cup B=\{2,3,4,6\}$, c) $A\,\Delta\,B=\{2,3,4\}$

16. $\Omega=\{\ (1,1)\ ,\ (1,3)\ ,\ (1,4)\ ,\ (2,1)\ ,\ (2,3)\ ,\ (2,4)\ \}$
$A=\{\ (1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$
$B=\{\ (1,4)\ ,\ (2,3)\}$, $A\cap B=B$, $A-B=\{(1,3),(2,4)\}$, $B-A=\phi$,
$A\cup B=A$, $A\,\Delta\,B=A-B.$

17. $A=\{\ css\ ,\ scs\ ,\ ssc\ \}$, $B=\{\ ssc\ ,\ scs\ ,\ ssc\ ,sss\ \}$,
$A\cap B=A$, $A-B=\phi$, $B-A=\{sss\}$, $A\cup B=B$

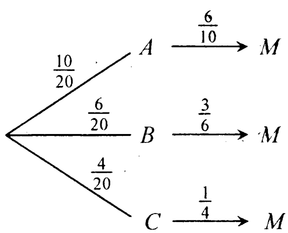
18. $\Omega\ =\{\ AB\ ,BA\ ,AR\ ,RA\ ,BR\ ,RB\ \}$

19. a) $A=\{\ (1,6)\ ,\ (6,1)\ ,\ (2,5)\ ,\ (5,2)\ ,\ (3,4)\ ,\ (4,3)\}$
b) $B=\{\ (1,6)\ ,\ (2,6)\ ,\ (3,6)\ ,\ (4,6)\ ,\ (5,6)\}$
c) $A\cup B=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$
d) $A\cap B=\{\ (1,6)\ \}.$

20. $\Omega\ =\{\ ABC\ ,ABD\ ,ABE\ ,ACD\ ,ACE\ ,ADE\ ,BCD\ ,BCE\ ,BDE\ ,CDE\ \}.$

21. 3

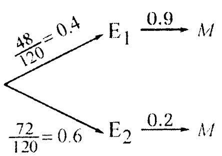
22. a)



$$P(M)=\frac{10}{20}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{20}\cdot\frac{3}{6}+\frac{4}{20}\cdot\frac{1}{4}=0.50\approx 50\%$$

b) $P(B/M)=\dfrac{P(B\cap M)}{P(M)}=\dfrac{\frac{6}{20}\cdot\frac{3}{6}}{0.50}=\dfrac{0.15}{0.50}=0.30\approx 30\%$

23. a)



E_1 : que salga elegido el socio S_1
E_2 : que salga elegido el socio S_2
M : aumento en las cuotas.

$$P(M)=\frac{48}{120}(0.9)+\frac{72}{120}(0,2)=0.48 \text{ o } 48\%$$

b) $P(E_1/M)=\dfrac{P(E_1\cap M)}{P(M)}=\dfrac{(0.4)(0.9)}{0.48}=0.75$ o 75%

24. a) $\Omega = \{ CC , CS , SC , SS \}$

b) $A = \{SC , SS\}$; $B = \{CC,CS\}$; $C = \{CS,SS\}$; $D = \{CC,SC\}$;
$E = \{CS,SC,SS\}$; $F = \{CS,SC,CC\}$; $G = \{CS,SC\}$
$H = \{CC\}$; $K = \{(SS)\}$

c) 1) $A \cup C = E$; 2) $A \cap C = K$; 3) $E \cap F = G$
4) $G \cup E = E$; 5) $G \cap E = G$; 6) $B \cap D = H$; 7) $E \cup K = E$

25. $A = A_1 A_2 A_3$, $B = A_1^C A_2^C A_3^C$

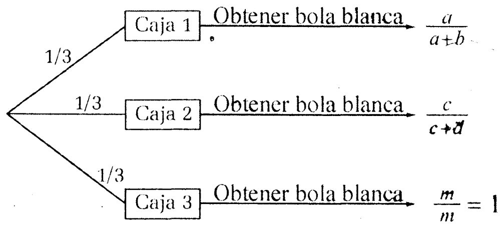
$$C = A_1 A_2^C A_3^C + A_1^C A_2 A_3^C + A_1^C A_2^C A_3 + A_1 A_2 A_3^C + A_1 A_2^C A_3 + A_1^C A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$$

$$D = A_1^C A_2 A_3 + A_1 A_2^C A_3 + A_1 A_2 A_3^C + A_1^C A_2^C A_3 + A_1^C A_2 A_3^C + A_1^C A_2^C A_3^C$$

$$E = A_1 A_2 A_3^C + A_1 A_2^C A_3 + A_1^C A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$$

$$F = A_1 A_2 A_3 \quad , \quad G = A_1^C A_2^C A_3 .$$

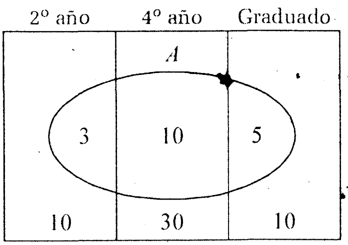
26. Sea
M: evento de obtener bola blanca.

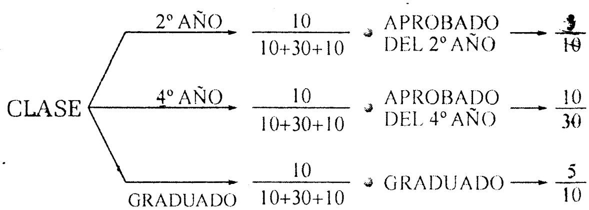


Luego:

$$P(M) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{1}{3}\frac{c}{c+d} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right).$$

27.

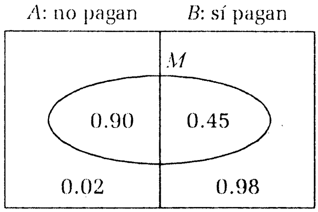




a) P [un estudiante elige sea aprobado] $= \frac{10}{50} \cdot \frac{3}{10} + \frac{30}{50} \cdot \frac{10}{30} + \frac{10}{50} \cdot \frac{5}{10} = \frac{18}{50}$

b) P [el aprobado sea un graduado] $= \dfrac{P(\text{Graduado y aprobado})}{P(\text{un estudiante aprobado})} = \dfrac{\frac{10}{50} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{10}{50}} = \frac{3}{10}$

28. Ver en el siguiente diagrama:



A : los que no pagan

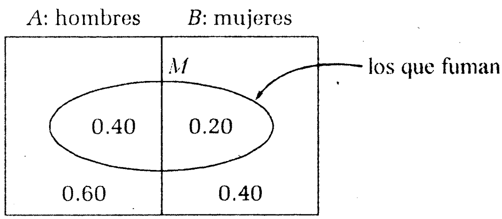
B : los que sí pagan

$A \cap M$: los que en dos ocasiones no pagan

$B \cap M$: los que en una ocasión no pagan

Se pide $P[A/M] = \frac{(0.90)(0.2)}{(0.90)(0.02)+(0.45)(0.98)} = 0.0392$

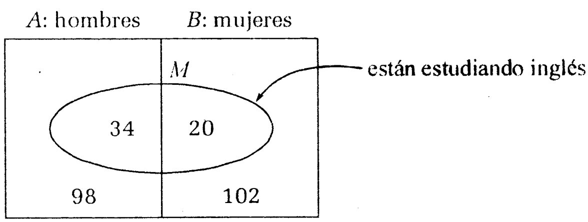
29.



a) $P[M] = (0.40)(0.60) + (0.20)(0.40)$

b) $P[B/M] = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{(0.20)(0.40)}{0.08+0.16} = \frac{0.08}{0.24} = 0.33$

30.



$P(M) = \frac{98}{200} \cdot \frac{34}{98} + \frac{102}{200} \cdot \frac{20}{102}$

GRUPO 3

05. a) 96 ; b) 33 ; c) 15 ; d) 40 ; e) 20 ; f) 44 ; g) 25 ;
h) 12 ; i) 7 ; j) 11 ; k) 5 ; l) 13 ; ll) 8 ; m) 60 ;
n) 21 ; r) 86 ; s) 81 ; t) 5 ; u) 26 ; w) 10

06. 5 alumnos.

07. a) 15 ; b) 80

08. a) 10 ; b) 60%

09. a) 40% ; b) 30%

10. a) 10 ; b) 5 ; c) 15 ; d) 45

11. a) 4 ; b) 15

12. a) 15 ; b) 10

13. a) 20 ; b) 10 ; c) 15 , 5

14. a) 22 ; b) 13 ; c) 25 ; d) 7

15. a) 30 ; b) 120 ; c) 80

GRUPO 4

01. a) Si ; b) Sí ; c) Sí

02. Si ; **03.** Sí **04.** $E_1 \cap D$, $E_2 \cap D$, $E_3 \cap D$.

05. *i)* E_1 , E_2 , E_3 ; *ii)* $E_1 \cap S$, $E_2 \cap S$, $E_3 \cap S$;

iii) $E_1 \cap M$, $E_2 \cap M$, $E_3 \cap M$

06. a) $\frac{3}{10} \times 100$ b) $\frac{1}{3} \times 100$

07. Algunas particiones de A, son: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$
otra: $\{b\}$, $\{a,c\}$, otra : $\{a\}$, $\{a,b\}$

08.

M

A	A^C

M

B	B^C

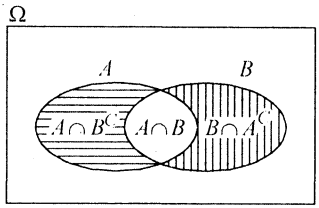
C

D	E	F

09. a) A y A^C forman una partición de $\mathbb{Z}$, siendo
$A^C = \{x \in \mathbb{Z} :\ x \text{ es número impar}\}$.

b) Si definimos: $C = \{x \in \mathbb{Z} :\ x \leq -3\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} : x > 4\}$,
entonces B , C , D forman una partición de $\mathbb{Z}$.

NOTA: Se pueden formar más conjuntos que constituyan una partición de $\mathbb{Z}$.

10. 

a) $A \cap B^C$ y $A \cap B$ es una partición de A.

b) $A \cap B$ y $B \cap A^C$ es una partición de B.

c) $A \cap B^C$, $A \cap B$, $B \cap A^C$ es una partición de $A \cup B$.

d) $A \cap B^C$, B es una partición de $A \cup B$.

e) A , $B \cap A^C$ es una partición de $A \cup B$.

f) A y A^C es una partición de Ω.

g) B y B^C es una partición de Ω.

GRUPO 5

01. $U = \{1,2,3, \ldots , 19\}$

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,7\}$, $C = \{ 2,3,5,7,11,13,17,19 \}$

a) $B - A = \{7\}$, $A - B = \{ 1,2,3\}$

b) $\mathcal{C}(\mathcal{C}C - A) = \{ 1,2,3,4,5,7,11,13,17,19 \}$

02. $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{ -1 , -2 , -3 , -4 , -5 , -6 , -7 \}$

$C = \{ -6 , -3 , -2 , -1 , 1 , 2,3,6\}$, $A \cap B = \phi$

$B \cap C = \{ -1 , -2 , -3 \}$, $B - C = \{ -4 , -5 , -6 , -7 \}$

03. $\{ 1 , 2, 3 \}$; $\{ 1 , 2 , 4 \}$.

04. $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2,-2\}$, $C = \{1,2\}$

$A \cap B \cap C = \{1\}$, $C - B = \phi$, $A - C = \{0\}$,

$B - A = \{2 , -2\}$, $\mathcal{C}B \cap \mathcal{C}A = \{3 , 4\}$

05. $A = \{-4,-2,-1,1,2,4\}$, $B = \{ -6 , -3 , -2 , -1 , 1 , 2,3,6\}$

$A \cap B = \{-2 , -1 , 1 , 2\}$, $B - A = \{-6 , -3 , 2 , 6\}$

06. a) No, porque el conjunto solución para x de la ecuación $x^2 = 4$ es $A = \{-2 , 2\}$, y A no está contenido en $B = \{2\}$, que es el conjunto solución de la ecuación $x = 2$.

b) No, por la misma razón que está explicada en a) otra manera de justificar es:

la igualdad $a^2 = b^2$ implica $a^2 - b^2 = 0$, esto implica $(a-b)(a+b)=0$ y esto, a su vez, implica $a = b \vee a = -b$.

c) Si, porque el conjunto $B = \{b\}$ está incluido en el conjunto $A = \{-b, b\}$, si consideramos que son soluciones de las ecuaciones $a = b$ y $a^2 = b^2$, respectivamente.

07. $A = \{-2, 2\}$, $B = \phi$, $C = \{-2, 2\}$,

a) $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{-2\}, \{2\}\}$

b) $\mathcal{P}(B) = \{\phi\}$

c) $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(A)$

d) $\mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A) = \phi$

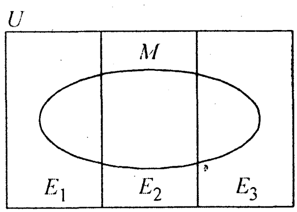
e) $\mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(B) = \{A, \{-2\}, \{2\}\}$.

08. $A \cap B \cap C = \{c\}$, $A = \{a, b, c, d, f, g\}$,

$B = \{a, b, c, e, h, i\}$, $C = \{c, d, e, j, k, l\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $A^C \cap B^C \cap C^C = \{m, n\}$

09.



10. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$

$A \Delta B = \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{A \cup B\} = \{6, 7, 8, 9\}$

GRUPO 07

01. Si el porcentaje de comprar el periódico D es $P(D)=30\%$, la de una revista R es $P(R)=20\%$ y la de comprar ambos $P(D\cap R)=8\%$, calcular los porcentajes de los sucesos siguientes:

a) Comprar un periódico o una revista.
b) Comprar un periódico y no una revista.
c) Una revista y no un periódico.
d) No comprar un periódico y comprar una revista.
e) No comprar un periódico o no comprar una revista.
f) No comprar un periódico y no comprar una revista.

Respuestas: a) 42% b) 22% c) 12%
d) 12% e) 92% f) 58%

02. Determínese el porcentaje de que al lanzar n veces dos dados se obtenga al menos un seis doble.
¿Cuántos lanzamientos habría que realizar para tener un porcentaje de 50% de obtener al menos un seis doble?

Respuesta: $\left[1-\left(\frac{35}{36}\right)^n\right]\times 100\%$; $n\approx 24.6\approx 25$

03. Tenemos dos bolsas, la primera con 10 bolas, 7 blancas y 3 negras; la segunda con 9 bolas, 3 blancas y 6 negras.
Se extrae al azar una bola de la primera bolsa y se pasa a la segunda. De esta bolsa, también al azar, se saca una bola, calcúlese el porcentaje que esta sea blanca.

Respuesta: $\frac{37}{100}$ Nota: $0.37\approx\frac{37}{100}$.

04. Sean tres urnas con las siguientes composiciones de bolas blancas y negras:
$U_1=\{3 \text{ blancas y } 2 \text{ negras}\}$
$U_2=\{4 \text{ blancas y } 2 \text{ negras}\}$
$U_3=\{1 \text{ blanca y } 4 \text{ negras}\}$
Calcúlense:
a) Porcentaje de extraer bola blanca.
b) Porcentaje de que una bola negra que se ha extraído proceda de la segunda urna.

Respuesta: a) $\frac{22}{45}\times 100$ b) $\frac{5}{23}\times 100$

RELACIONES BINARIAS Y FUNCIONES

PRODUCTO DE CONJUNTOS

3.1 PAR ORDENADO

Un conjunto de dos elementos ordenados que se distinguen el primer elemento y el segundo elemento encerrados entre paréntesis y separados por una coma, se llama **PAR ORDENADO.**

Ejemplos:

(a,b) es el par ordenado cuyo 1er elemento es "a" y 2^{do} elemento es "b".

$(1,3)$ es el par ordenado cuyo 1er elemento es "1" y 2^{do} elemento es "3".

$((1,3),4)$ es el par ordenado cuyo 1er elemento es $(1,3)$ y 2^{do} elemento es "4".

3.1.1 DEFINICIÓN

Dados dos conjuntos $A \subset U$, $B \subset U$, definimos el **PAR ORDENADO DE COMPONENTES** a y b, al conjunto:

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\} \quad , \quad \text{tal que } a \in A \ \wedge \ b \in B$$

$$\{a\} \subset A \cup B, \ \{a,b\} \subset A \cup B$$

$$\{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B), \ \{a,b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

3.2 PARES ORDENADOS IGUALES

3.2.1 TEOREMA $(a,b)=(c,d)$ sí, y solo sí $a=c \ \wedge \ b=d$

PRUEBA:

$(\Rightarrow)$ $(a,b)=(c,d)$ implica $a=c \ \wedge \ b=d$

Veamos:

1) Por definición de par ordenado se tiene: $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$
$(c,d)=\{\{c\},\{c,d\}\}$

2) Por hipótesis: $(a,b)=(c,d)$.

3) Por 1) $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\} \iff \{a\}=\{c\} \wedge \{a,b\}=\{c,d\}$
$\iff a=c \wedge (a=c \wedge b=d)$
$\iff a=c \wedge b=d$

($\Leftarrow$) si $a=c \wedge b=d$ entonces $(a,b)=(c,d)$

Veamos:

4) Por hipótesis $a=c \wedge b=d$

5) $a=c \wedge (a=c \wedge b=d)$ ...... por $p \wedge q \equiv p \wedge (p \wedge q)$

6) $\Rightarrow \{a\}=\{c\} \wedge \{a,b\}=\{c,d\}$

7) $\Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

8) $\Rightarrow (a,b)=(c,d)$ .... definición de par ordenado.

3.3 PRODUCTO DE CONJUNTOS

3.3.1 DEFINICIÓN $A\times B=\{(a,b)\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))\,/\,a\in A \wedge b\in B\}$

El producto de A por B, es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b) pertenecientes al conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$ tales que $a\in A$ y $b\in A$.

__Ejemplo__:

Sean los conjuntos $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$

Definimos:

1) $A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$

2) $A^2=A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

3) $B^2=B\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Según la definición del producto $A \times B$, se cumplen:

1. $A\times B \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$
2. $\mu \in A\times B$ sí, y solo si $\mu=(a,b)$, $a\in A \;\wedge\; b\in B$
3. $\mu \notin A\times B$ sí, y solo si $\mu\neq(a,b)$, $a\notin A \;\vee\; b\notin B$

3.3.2 PROPIEDADES

Las propiedades que cumplen el producto de conjuntos son:

P$_1$) $A\times B=\varnothing \iff A=\varnothing \;\vee\; B=\varnothing$

P$_2$) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

P$_3$) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

El producto de conjuntos no es asociativa: $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$.

El producto de conjuntos no es conmutativa: $A\times B\neq B\times A$, si $A\neq B$.

PRUEBA DE P$_2$)

($\subset$) Probar:
$A\times(B\cup C)\subset(A\times B)\cup(A\times C)$

1. Sea $\forall\,(x,y)\in[A\times(B\cup C)]$

2. $\Rightarrow\; x\in A \;\wedge\; [y\in(B\cup C)]$

3. $\Rightarrow\; x\in A \;\wedge\; [y\in B \;\vee\; y\in C)]$

4. $\Rightarrow\; [x\in A \;\wedge\; y\in B]\vee[x\in A \;\wedge\; y\in C]$

5. $\Rightarrow\; [(x,y)\in A\times B] \;\vee\; [(x,y)\in A\times C]$

6. $\Rightarrow\; (x,y)\in[(A\times B)\cup(A\times C)]$

7. Por 1 y 6 afirmamos:
$A\times(B\cup C)\subset(A\times B)\cup(A\times C)$

($\supset$) Probar
$(A\times B)\cup(A\times C)\subset A\times(B\cup C)$

8. $\forall\,(x,y)\in[(A\times B)\cup(A\times C)]$

9. $[(x,y)\in(A\times B)\vee(x,y)\in(A\times C)]$

10. $[\underline{x\in A}\wedge y\in B] \;\vee\; [\underline{x\in A}\wedge y\in C]$

11. $\underline{x\in A} \;\wedge\; [y\in B \;\vee\; y\in C]$

12. $x\in A \;\wedge\; [y\in(B\cup C)]$

13. $(x,y)\in A\times(B\cup C)$

14. Por 8 y 13:
$(A\times B)\cup(A\times C)\subset A\times(B\cup C)$

15. Por 7 y 14:
$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

PRUEBA DE P$_3$)

$(\subset)\ A\times(B\cap C)\subset(A\times B)\cap(A\times C)$

1. $\forall\,(x,y)\in[A\times(B\cap C)]$ (hipótesis)
2. $x\in A\ \wedge\ y\in(B\cap C)$
3. $x\in A\ \wedge\ [y\in B\ \wedge\ y\in C]$
4. $[x\in A\ \wedge\ y\in B]\ \wedge\ [x\in A\ \wedge\ y\in C]$
5. $[(x,y)\in A\times B]\ \wedge\ (x,y)\in A\times C]$
6. $(x,y)\in[(A\times B)\cap(A\times C)]$
7. Por 1 y 6:
   $A\times(B\cap C)\subset(A\times B)$

$(\supset)\ (A\times B)\cap(A\cap C)\subset A\times(B\cap C)$

8. $\forall\,(x,y)\in[A\times B)\cap(A\cap C)]$
9. $(x,y)\in(A\times B)\ \wedge\ (x,y)\in(A\cap C)$
10. $[\underline{x\in A}\ \wedge\ y\in B]\ \wedge\ [\underline{x\in A}\ \wedge\ y\in C]$
11. $x\in A\ \wedge\ [y\in B\ \wedge\ y\in C]$
12. $x\in A\ \wedge\ [y\in(B\cap C)]$
13. $(x,y)\in A\times(B\cap C)$
14. Por 8 y 13: $(A\times B)\cap(A\cap C)\subset A\times(B\cap C)$

    $\therefore$ Por 7 y 14:
    $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

3.4 PRODUCTO CARTESIANO

En 3.3 hemos definido el producto de A por B, donde A y B son conjuntos no vacíos cualesquiera contenidos en un cierto conjunto universal. Pero, si en particular, $A\subseteq I\!R$ y $B\subseteq I\!R$ donde $I\!R$ es el conjunto de los números reales ($\overbrace{-\infty \longleftarrow\!\underset{0}{+}\!\longrightarrow +\infty}^{I\!R}$), entonces $A\times B$ toma el nombre de **PRODUCTO CARTESIANO DE A POR B.**

Así tendremos: $A\times B=\{(a,b)\in I\!R\times I\!R/\,a\in A\ \wedge\ b\in B\}$

Análogamente, se tendrá:

$I\!R\times I\!R=I\!R^2=\{(x,y)/x\in I\!R\ \wedge\ y\in I\!R\}$ es el **PLANO CARTESIANO.**

$I\!R\times I\!R\times I\!R=I\!R^3=\{(x,y,z)/x\in I\!R\ \wedge\ y\in I\!R\ \wedge\ z\in I\!R\}$ es el espacio tridimensional.

$I\!R^n=\{(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)/x_i\in I\!R\}$

<u>Ejemplo</u>:

Sean los conjuntos $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,4\}$.

Se tienen:

1) $A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

2) $B\times B=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4)\}$

3) $\underbrace{\underbrace{(B\times B)}_{B^2}\times B}=\{((1,1),1),((1,1),4),((1,4),1),((1,4),4),((4,1),1),((4,1),4),((4,4),1),((4,4),4)\}$

$B^3=\{(1,1,1),(1,1,4),(1,4,1),(1,4,4),(4,1,1),(4,1,4),(4,4,1),(4,4,4\}$

4) $A\times B=\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

5) $B\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

3.4.1 PROBLEMAS RESUELTOS

01 Demostrar que: $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

La prueba es por doble inclusión:

$(\subset)$ por demostrar que: $A\times(B-C)\subset(A\times B)-(A\times C)$

1. Sea $\mu\in A\times(B-C)$ (hipótesis)

2. $\Rightarrow$ $\mu=(x,y)\in A\times(B-C)$

3. $\Rightarrow$ $x\in A\ \wedge\ y\in(B-C)$

4. $\Rightarrow$ $x\in A\ \wedge\ (y\in B\ \wedge\ y\notin C)$

5. $\Rightarrow$ $\underbrace{[(x\in A\ \wedge\ y\in B)\ \wedge\ y\notin C]}_{m}$

6. $F\ \vee\ m\equiv m$, $F=$ falso

7. $\Rightarrow\overbrace{[(x\in A\ \wedge\ y\in B)\ \wedge\ x\notin A]}\ \vee\ [(x\in A\ \wedge\ y\in B)\ \wedge\ y\notin C]$, donde: $(\underbrace{x\in A}_{[(p}\ \wedge\ \underbrace{y\in B}_{q)})\ \wedge\ \underbrace{x\notin A}_{\sim p]}\equiv F$

8. $\Rightarrow$ $(x\in A\ \wedge\ y\in B)\ \wedge\ [x\notin A\ \vee\ y\notin C]$

9. $\Rightarrow$ $[\underbrace{(x,y)}_{\mu}\in A\times B]\ \wedge\ [\underbrace{(x,y)}_{\mu}\notin A\times C]$

10. $\Rightarrow$ $\underbrace{(x,y)}_{\mu}\in[(A\times B)-(A\times C)]$

11. Por 1 y 10 afirmamos que: $A\times(B-C)\subset(A\times B)-(A\times C)$

$(\supset)$ Por demostrar: $[(A\times B)-(A\times C)]\subset A\times(B-C)$ .... *Queda como ejercicio.*

02 Probar: $\complement A \times \complement B \subset \complement(A \times B)$

1. Sea $\quad \mu \in (\complement A \times \complement B)$ .... hipótesis

2. $\Rightarrow \mu = (x, y) \in (\complement A \times \complement B)$

3. $\Rightarrow \quad x \in \complement A \ \wedge \ y \in \complement B$

4. $\Rightarrow \quad x \notin A \ \wedge \ y \notin B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \ \vee \ y \notin B$

5. $\Rightarrow \quad (x, y) \notin A \times B$

6. $\Rightarrow \quad \underbrace{(x, y)}_{\mu} \in \complement(A \times B)$

7. Por 1 y 6, afirmamos que $\complement A \times \complement B \subset \complement(A \times B)$

Aquí se aplica la tautología:

$(p \wedge q) \Rightarrow p \vee q$

03 Probar: $(\complement A \cup \complement B) \times \complement C \subset \complement\big((A \cap B) \times C\big)$

Demostración:

1. Por ley De Morgan se tiene: $\complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B)$

Por tanto, se debe probar: $\complement(A \cap B) \times \complement C \subset \complement((A \cap B) \times C)$

En consecuencia, la demostración es similar al problema 2.

2. Sea $\quad \mu \in [\complement(A \cap B) \times \complement C]$

3. $\Rightarrow \mu = (x, y) \in [\complement(A \cap B) \times \complement C]$

4. $\Rightarrow \quad x \in \complement(A \cap B) \ \wedge \ y \in \complement C$

5. $\Rightarrow \quad x \notin (A \cap B) \ \wedge \ y \notin C \quad \Rightarrow \quad x \notin (A \cap B) \ \vee \ y \notin C$

6. $\Rightarrow \quad (x, y) \notin [(A \cap B) \times C]$

7. $\Rightarrow \quad \underbrace{(x, y)}_{\mu} \in \complement[(A \cap B) \times C]$

8. Por 2 y 7, implica que: $(\complement(A \cap B) \times \complement C) \subset \complement((A \cap B) \times C)$

04 Demostrar aplicando definiciones que:

$(A \times \complement B) \cup (C \times \complement D) \subset (A \cup C) \times \complement(B \cap D)$

1 $\forall \mu \in [(A \times \complement B) \cup (C \times \complement D)]$

2 $\Rightarrow \mu \in (A \times \complement B) \ \vee \ \mu \in (C \times \complement D)$, donde $\mu = (x, y)$

$$A \downarrow \complement(\complement A) \qquad\qquad C \downarrow \complement(\complement C)$$

3 $\Rightarrow \quad \mu \in (\complement(\complement A) \times \complement B) \quad \vee \quad \mu \in (\complement(\complement C) \times \complement D)$

4 $\Rightarrow \quad \mu \in \complement(\complement A \times B) \quad \vee \quad \mu \in \complement(\complement C \times D)$, pues $\begin{cases} \complement(\complement A) \times \complement B \subset \complement(\complement A \times B) \\ \complement(\complement C) \times \complement D \subset \complement(\complement C \times D) \end{cases}$

5 $\Rightarrow \quad \mu \notin (\complement A \times B) \quad \vee \quad \mu \notin (\complement C \times D)$ Ver el problema 2.

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

6 $\Rightarrow \mu \neq (x, y)$, tal que $\quad \vee \quad \mu \neq (x, y)$ tal que

7 $\Rightarrow \quad \underbrace{x \notin \complement A,\ y \notin B \quad \vee \quad x \notin \complement C,\ y \notin D}_{\text{ASOCIAR ADECUADAMENTE}}$

8 $\Rightarrow x \notin \complement A \quad \vee \quad x \notin \complement C \quad , \quad y \notin B \quad \vee \quad y \notin D$

9 $\Rightarrow \quad x \in A \quad \vee \quad x \in C \quad , \quad y \in \complement B \quad \vee \quad y \in \complement D$

10 $x \in (A \cup C)\ ,\ y \in (\complement B \cup \complement D)$

11 $x \in (A \cup C) \quad \wedge \quad y \in \complement(B \cap D)$ .... Ley de De Morgan

12 $\underbrace{(x, y)}_{\mu} \in (A \cup C) \times \complement(B \cap D)$

13 Por 1 y 12 se cumple: $(A \times \complement B) \cup (C \times \complement D) \subset (A \cup C) \times (\complement B \cap D)$

$\boxed{\textbf{05}}$ Si $A \subset C$ y $\quad D \cap \complement B = \phi$

Demostrar usando propiedades que: $[A \times (D - B)] \cup [A \times D] \cup [(A - C) \times D] = C \times D$

Demostración:

1) Por hipótesis se tiene:

   a) $A \subset C \iff A - C = \varnothing$

   b) $D \cap \complement B = \varnothing \iff D - B = \varnothing \iff D \subset B$

2) Luego: $\underbrace{[A \times \underbrace{(D - B)}_{\varnothing}]}_{\varnothing} \cup [A \times D] \cup \underbrace{[\underbrace{(A - C)}_{\varnothing} \times D]}_{\varnothing} = A \times D$

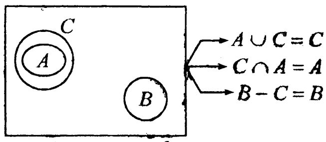
3) Si $\begin{cases} A \subset C \\ D \subset B \end{cases}$ entonces: $A \times D \subset C \times B$

lqqd.

06 Sean los conjuntos A, B, y C. Si $A \subset C$ y $B \subset \complement C$, demostrar aplicando definiciones que: $B \times (A \cup C)] \cap [(B - C) \times A] = B \times A$

Si la demostración es por propiedades, tendríamos lo siguiente:

1) Intuitivamente en un diagrama de Venn obtenemos:



$A \subset C$ $\quad$ $B \subset \complement C$

2) $[B \times \underbrace{(A \cup C)}_{C}] \cap [\underbrace{(B - C)}_{B} \times A] =$

$[B \times C] \cap [B \times A] = B \times \underbrace{(C \cap A)}_{A} = B \times A$

La demostración por definiciones es por doble inclusión ($\subset$)

1 Sea $\mu \in [B \times (A \cup C)] \cap [(B - C) \times A]$

2 $\Rightarrow$ $\mu \in [B \times (A \cup C)] \wedge \mu \in [(B - C) \times A]$, donde $\mu = (x, y)$ tal que:

$[x \in B \wedge y \in (A \cup C)] \wedge [x \in (B - C) \wedge y \in A]$

3 $\Rightarrow [x \in B \wedge (y \in A \vee y \in C)] \wedge [(x \in B \wedge x \notin C) \wedge y \in A]$

$\Downarrow$

$\underbrace{y \in C \vee y \in C}_{y \in C}$ $\qquad$ $\underbrace{\underbrace{(x \in B \wedge x \in \complement C)}_{x \in (B \cap \complement C)}}_{x \in B}$, pues $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset \complement C \end{cases}$

4 $\Rightarrow [\underline{\underline{x \in B}} \wedge y \in C] \wedge [\underline{\underline{x \in B}} \wedge y \in A]$

5 $\Rightarrow$ $x \in B \wedge [y \in C \wedge y \in A]$

6 $\Rightarrow$ $x \in B \wedge \underbrace{y \in (C \cap A)}$

7 $\Rightarrow$ $x \in B \wedge y \in A$, pues $A \subset C$

8 $\Rightarrow \underbrace{(x, y)}_{\mu} \in (B \times A)$

9 Por 1 y 8 afirmamos que $[B \times (A \cup C)] \cap [(B - C) \times A] \subset B \times A$

($\supset$) La 2ª inclusión queda como ejercicio.
Demostrando ambas inclusiones, queda demostrado la igualdad.

07 Demostrar que: $\mathcal{P}(A \times (B \cap C)) = \mathcal{P}(A \times B) \cap \mathcal{P}(A \cap C)$

$(\subset)$

1 Sea $X \in \mathcal{P}(A \times (B \cap C))$

2 $\Rightarrow$ $X \subset A \times (B \cap C)$

3 $\Rightarrow$ $X \subset (A \times B) \cap (A \times C)$

4 $\Rightarrow$ $X \subset A \times B \ \wedge \ X \subset A \times C$

5 $\Rightarrow$ $X \in \mathcal{P}(A \times B) \ \wedge \ X \in \mathcal{P}(A \times C)$

6 $\Rightarrow$ $X \in [\mathcal{P}(A \times B) \cap \mathcal{P}(A \times C)]$

7 Por 1 y 6: $\mathcal{P}(A \times (B \cap C)) \subset \mathcal{P}(A \times B) \cap \mathcal{P}(A \times C)$

$(\supset)$ ***Queda como ejercicio***...

08 Demostar que: $[(M - A) \times N] \cup [M \times (N - B)] \subset [(M \times N) - (A \times B)]$

09 Demostrar que: $\mathcal{C}(C \times D) \subset (\mathcal{C}C \times D) \cup (C \times \mathcal{C}D) \cup (\mathcal{C}C \times \mathcal{C}D)$

10 Sean X y Y conjuntos no vacios. Si A_1 y A_2 son subconjuntos de X y B_1 y B_2 subconjuntos de Y, demostrar que:

a) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

b) $(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = (A_1 - A_2) \times (B_1 - B_2) \cup (A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2) \cup (A_1 - A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

3.5 RELACIONES BINARIAS

En el mundo que nos circunda observamos diversas relaciones entre, los elementos de dos conjuntos A y B.

Por ejemplo:

1) Si A es el conjunto de los países {Perú, Ecuador, Colombia} y B es el conjunto de ciudades capitales {Lima, Quito, Bogotá}, entonces existe una relación entre cada país y su respectiva capital.

Formalizando esta relación tendremos:

$R = \{$(Perú, Lima), (Ecuador, Quito), (Colombia, Bogotá)$\} \subset A \times B$

Decimos que R es una relación de A en B. Es decir R es un subconjunto del producto $A \times B$.

2) Entre los elementos de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ se pueden establecer relaciones de menor, mayor o igualdad.

Ejemplos:

a) El conjunto $S = \{(x,y) \in I\!N \times I\!N \,/\, x < y\}$ es una relación de $I\!N$ en $I\!N$ o simplemente decimos que S **es una relación en** $I\!N$.

b) El conjunto $T = \{(x,y) \in I\!R^2 \,/\, 2x - y \leq 3\}$ **es una relación en** $I\!R$.

3.5.1 DEFINICIÓN

Dados dos conjuntos A y B, llamamos **RELACIÓN BINARIA** de A en B a todo subconjunto R de $A \times B$.

Es decir: $\boxed{R \text{ es una relación de } A \text{ en } B, \text{ si y sólo si } R \subseteq A \times B}$

o $R = \{(a,b) \in A \times B \,/\, a\, R\, b\}$

indica que los elementos a y b están en la relación R.

ACLARACIONES:

1) Los elementos de una **RELACIÓN** son pares ordenados, según la misma definición.
2) La notación $a\,R\,b$ indica que entre a y b existe una relación, ésta relación se presenta de diversas maneras.

   Por ejemplo:

   a) $x\,R\,y \Longleftrightarrow x < y$

   b) $x\,R\,y \Longleftrightarrow 2x + 3y \leq 6$

   c) $X\,R\,Y \Longleftrightarrow X \neq Y$

   d) $x\,R\,y \Longleftrightarrow$ 2 divide a $(x - y)$

   e) $a\,R\,b \Longleftrightarrow b\,R\,a$

   f) si $a\,R\,b \;\wedge\; b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$

   g) $(a,b)\,R\,(c,d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$

   h) $(a,b)\,R\,(c,d) \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

3) En la notación $a\,R\,b$, tener en cuenta que "a" y "b" son elementos que pueden ser números $(I\!N, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, I\!R)$, pero también pueden ser pares ordenados , tal como los ejemplos g) y h); pueden ser conjuntos como el ejemplo c). En fin, pueden ser de diversa naturaleza. Todo dependerá del tipo de conjuntos con que se trabajan.

4) Escribir $a\,R\,b$ es equivalente cuando se escribe $(a,b) \in R$

   NOTA: Se cumplen $\begin{cases} 1) \ \varnothing \subset A \times B, \text{ se dice que } \varnothing \text{ es la relación vacio de } A \times B \\ 2) \ A \times B \subset A \times B, \ A \times B \text{ es la relación total de } A \times B. \end{cases}$

   si en la definición 3.5.1, hacemos $B = A$ tendremos:

   R es una relación de A en A sí, y solo si $R \subseteq A \times A$. En este caso hacemos la siguiente definición:

3.5.2 DEFINICIÓN: Se dice que un conjunto R es una **RELACIÓN EN** A, sí y sólo sí, $R \subseteq A \times A$.

EJEMPLO 1 Sea $A = \{1,2,3,4\}$. Dadas las relaciones T y S en A, tal que,
$T = \{(x,y)/x < y\}$, $S = \{(x,y)/x + y = 4\}$
Hallar: $T \cup S$, $T \cap S$, $T - S$, $S - T$, $T \Delta S$.

Solución:

1) Tabular. los conjuntos T y S.

$T = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$
$S = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$

2) $T \cup S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (3,1), (2,2)\}$

$T \cap S = \{(1,3)\}$

$T - S = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

$S - T = \{(3,1), (2,2)\}$

$T \Delta S = (T - S) \cup (S - T) = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (3,1), (2,2)\}$

EJEMPLO 2 Sea $A = \{0,2,3,4,5,6\}$. Definimos en A una relación R mediante:

$$(x,y) \in R \iff \frac{x+y}{2} \in A \quad \wedge \quad x \neq y$$

y sea $S = \{(x+1,y) \in A^2 / (y+1,x) \in R\}$

Determinar, por extensión el conjunto $(R - S)$.

Solución:

1. Tabulemos los conjuntos R y S.

$$R = \{(0,4),(4,0),(0,6),(6,0),(2,4),(4,2),(2,6),(\underline{6,2}),(\underline{3,5}),(5,3),(4,6),(6,4)\}$$

2. Para tabular S, trabajamos con los elementos de R:
1^{ros} componentes en R.

$x+1=0 \to x=-1 \longleftarrow$ descartamos porque $-1 \notin A$

$x+1=2 \to x=1 \longleftarrow$ descartamos porque $1 \notin A$

$x+1=3 \to x=2 \Rightarrow (3,3) \in S$ porque $(4,2) \in R$; $(3,5) \in S$ porque $(6,2) \in R$

$x+1=4 \to x=3 \Rightarrow (4,4) \in S$ porque $(5,3) \in R$

$x+1=5 \to x=4 \Rightarrow (5,5) \in S$ porque $(6,4) \in R$

$x+1=6 \to x=5 \Rightarrow (6,2) \in S$ porque $(3,5) \in R$

3. Luego: $S = \{ (3,3), \underline{(3,5)}, (5,5), \underline{(6,2)}, (4,4) \}$

4. Por tanto: $R - S = \{ (0,4), (4,0), (0,6), (6,0), (2,4), (4,2), (2,6), (5,3), (4,6), (6,4) \}$

EJEMPLO 3 Sea $A = \{ 0, -1, 1 \}$

Si $R = \{ ((x,y),z) \in A^2 \times A / z = x + y - 1 \}$

$S = \left\{ ((x,y),z) \in A^2 \times A \Big/ z = \frac{x}{y} \right\}$

Hallar $R \Delta S$.

Solución:

1. Tabular R y S que son relaciones de A^2 en A es decir: $R \subset A^2 \times A$ y $S \subset A^2 \times A$.

2. TABULAR R

$A^2 \ni (0,0) \to Z = 0 + 0 - 1 = -1 \in A$

$A^2 \ni (0,-1) \to Z = 0 - 1 - 1 = -2 \notin A$

$A^2 \ni (0,1) \to Z = 0 + 1 - 1 = 0 \in A$

$A^2 \ni (-1,0) \to Z = -1 + 0 - 1 = -2 \notin A$

$A^2 \ni (-1,-1) \to Z = -1 - 1 - 1 = -3 \notin A$

$A^2 \ni (-1,1) \to Z = -1 + 1 - 1 = -1 \in A$

$A^2 \ni (1,0) \to Z = 1 + 0 - 1 = 0 \in A$

$A^2 \ni (1,-1) \to Z = 1 - 1 - 1 = -1 \in A$

$A^2 \ni (1,1) \to Z = 1 + 1 - 1 = 1 \in A$

TABULAR S

$A^2 \ni (0,0) \to z = \frac{0}{0} \nexists$

$A^2 \ni (0,-1) \to z = \frac{0}{-1} = 0 \in A$

$A^2 \ni (0,1) \to z = \frac{0}{1} = 0 \in A$

$A^2 \ni (-1,0) \to z = \frac{-1}{0} \nexists$

$A^2 \ni (-1,-1) \to z = \frac{-1}{-1} = 1 \in A$

$A^2 \ni (-1,1) \to z = \frac{-1}{1} = -1 \in A$

$A^2 \ni (1,0) \to z = \frac{1}{0} \nexists$

$A^2 \ni (1,-1) \to z = \frac{1}{-1} = -1 \in A$

$A^2 \ni (1,1) \to z = \frac{1}{1} = 1 \in A$

Luego:

$S = \{ ((0,-1),0), ((0,1),0), ((-1,-1),1),$
$((-1,1),-1), ((1,-1),-1), ((1,1),1) \}$

$S = \{ (0,-1,0),0), (0,1,0), (-1,-1,1), (-1,1,-1)$
$(1,-1,-1), (1,1,1) \}$

3. $R = \{ ((0,0),-1), ((0,1),0), ((-1,1),-1), ((1,0),0), ((1,-1),-1), ((1,1),1) \}$
$R = \{ (0,0,-1), (0,1,0), (-1,1,-1), (1,0,0), (1,-1,-1), (1,1,1) \}$

4. $R \Delta S = (R - S) \cup (S - R) = (R \cup S) - (R \cap S)$
$R \Delta S = \{(0,0,1),(1,0,0),(0,-1,0),(-1,-1,1)\}$

3.6 DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

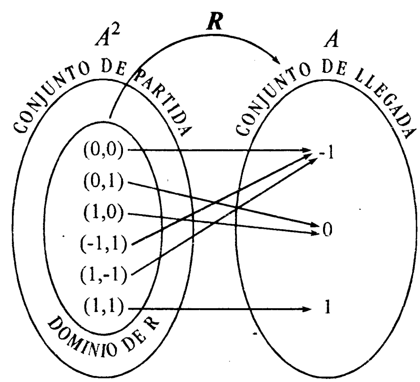
3.6.1 CONJUNTO DE LLEGADA Y CONJUNTO DE PARTIDA

Al definir una relación binaria, decíamos: R es una relación de $\underline{A \text{ en } B}$, si $R \subseteq A \times B$

Pues bien, la frase "de A en B" nos conlleva a intuir dos cosas:

1) Que A es el conjunto de partida y B es el conjunto de llegada.
2) Que las primeras componentes de los pares $(\underset{\uparrow}{a},b) \in R$ están en el conjunto de partida y que las segundas componentes de los pares $(a,\underset{\uparrow}{b}) \in R$ están en el conjunto de llegada.

Al representar en un diagrama el ejemplo 3 tendremos:



3.6.2 DOMINIO DE UNA RELACIÓN

Si R es una relación de A en B, definimos el **DOMINIO** de R, al conjunto:

$Dom(R) = \{x \in A / \exists\, y \in B, (x,y) \in R\}$

el dominio de R es el conjunto de todas las primeras componentes de las parejas ordenadas (x,y) pertenecientes a la relación R.

Luego: $\boxed{x \in Dom(R) \Longleftrightarrow \exists\, y \in B \wedge (x,y) \in R}$

2.6.3 RANGO DE UNA RELACIÓN

Si R es una relación de A en B, definimos el **RANGO** de R, al conjunto:

$$\text{Rang }(R) = \{ y \in B \,/\, \exists x \in A\,,\, (x,y) \in R \}$$

el rango de R es el conjunto de todas las segundas componentes de los pares $(x,y) \in R$.

Luego: $\boxed{y \in Rang(R) \iff \exists\, x \in A \;\wedge\; (x,y) \in R}$

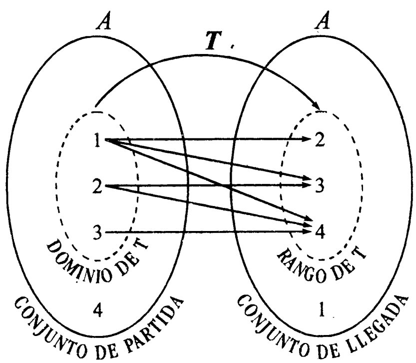
EJEMPLO 4

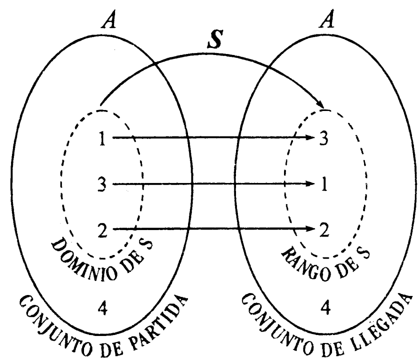
1) En el ejemplo 1, se tiene:

$D\hat{o}m(T) = \{1,2,3\}$, $Rang(T) = \{2,3,4\}$

$Dom(S) = \{1,3,2\}$, $Rang(S) = \{3,1,2\}$

Representando en un diagrama, tenemos:





2) En el **EJEMPLO** 3, tenemos:

$Dom(R) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$

$Rang(R) = A$

$Dom(S) = \{(0,-1),(0,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1),(1,1)\}$

$Rang(S) = A$

3.6.4 PROPIEDADES DEL DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

Sean R y S dos relaciones de A en B, se cumplen las siguientes propiedades:

$$\text{DOMINIOS}\left\{\begin{array}{ll} P_1) & Dom(R\cup S)=Dom(R)\cup Dom(S) \\ P_2) & Dom(R\cap S)\subset Dom(R)\cap Dom(S) \\ P_3) & Dom(R-S)\supset Dom(R)-Dom(S) \end{array}\right.$$

$$\text{RANGOS}\left\{\begin{array}{ll} P_4) & Rang(R\cup S)=Rang(R)\cup Rang(S) \\ P_5) & Rang(R\cap S)\subset Rang(R)\cap Rang(S) \\ P_6) & Rang(R-S)\supset Rang(R)-Rang(S) \end{array}\right.$$

Para la demostración de éstas propiedades se aplican las definiciones de dominio y rango.

si se tienen $R:\ A \longrightarrow B$

$$x\in Dom(R) \iff \exists\, y\in B/(x,y)\in R$$

$$\iff x\notin Dom(R) \iff \forall\, y\in B\,,(x,y)\notin R$$

$S:\ A\longrightarrow B$, definimos:

$$y\in Rang(R) \iff \exists\, x\in A/(x,y)\in R$$

$$\iff y\notin Rang(R) \iff \forall\, x\in A\,,(x,y)\notin R$$

NOTA:
Los elementos de una relación son parejas ordenadas (x,y) tal que $x\,R\,y$.

DEMOSTRAR P$_1$) Se demuestra por doble inclusión.

($\subset$) Por demostrar que: $Dom(R\cup S)\subset Dom(R)\cup Dom(S)$

Veamos:

1. Supongamos que: $x\in Dom(R\cup S)$ .... hipótesis
2. $\Rightarrow\ \exists\, y\in B/(x,y)\in(R\cup S)$
3. $\Rightarrow\ [\exists\, y\in B/(x,y)\in R]\ \vee\ [\exists\, y\in B/(x,y)\in S]$
4. $\Rightarrow\ x\in Dom(R)\ \vee\ x\in Dom(S)$
5. $\Rightarrow\ x\in[Dom(R)\ \cup\ Dom(S)]$
6. Por 1 y 5 afirmamos: $Dom(R\cup S)\subset Dom(R)\cup Dom(S)$

($\supset$) Por demostrarse que: $Dom(R)\cup Dom(S)\subset Dom(R\cup S)$

Veamos:

1. Suponer que: $x \in [Dom(R) \cup Dom(S)]$

2 $\Rightarrow$ $x \in Dom(R) \ \vee \ x \in Dom(S)$

3. $\Rightarrow$ $[\exists\, y \in B/(x,y) \in R] \ \vee \ [\exists\, y \in B/(x,y) \in S]$

4. $\Rightarrow$ $\exists\, y \in B/(x,y) \in (R \cup S)$

5. $\Rightarrow$ $x \in Dom(R \cup S)$

6. Por 1 y 5 afirmamos que: $Dom(R) \cup Dom(S) \subset Dom(R \cup S)$
   En consecuencia: $Dom(R) \cup Dom(S) = Dom(R \cup S)$

DEMOSTRACIÓN DE P$_2$) $Dom(R \cap S) \subset Dom(R) \cap Dom(S)$

Debo probar que $x \in Dom(R \cap S) \Rightarrow x \in [Dom(R) \cap Dom(S)]$

Veamos:

1) si $x \in Dom(R \cap S) \Rightarrow \exists\, y \in B/(x,y) \in (R \cap S)$

2) $\Rightarrow \underbrace{\exists\, y \in B/(x,y) \in R} \ \wedge \ \underbrace{\exists\, y \in B/(x,y) \in S}$

3) $\Rightarrow x \in Dom(R) \ \wedge \ x \in Dom(S)$

4) $\Rightarrow x \in [Dom(R) \cap Dom(S)]$

5) Por tanto: $Dom(R \cap S) \subset Dom(R) \cap Dom(S)$, puesto que el paso 1 implica al paso 4.

DEMOSTRACIÓN DE P$_3$) $Dom(R - S) \supset Dom(R) - Dom(S)$.

Prueba ($\subset$) Debo probar que: $x \in [Dom(R) - Dom(S)] \Rightarrow x \in Dom(R - S)$

Dicho de otra forma: Debo probar que:

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in [Dom(R) - Dom(S)] &\Rightarrow x \in Dom(R - S) \\ &\Rightarrow \exists\, y \in B/(x,y) \in (R - S) \\ &\quad\ \exists\, y \in B/(x,y) \in R \ \wedge \ (x,y) \notin S \end{aligned}$$

Veamos:

1) Si $x \in [Dom(R) - Dom(S)]$

2) $\Rightarrow x \in Dom(R) \ \wedge \ \underbrace{x \notin Dom(S)}$

3) $\Rightarrow \exists\, y \in B/(x,y) \in R \ \wedge \ \boxed{\forall\, y \in B \ , \ (x,y) \notin S}$

Como esta proposición se cumple para todo y en B, en particular existe algún $y \in B$; tal que $(x, y) \notin S$.

4) $\Rightarrow\ \exists\, y \in B / (x,y) \in R \quad \wedge \quad \exists\, y \in B\ ,\ (x,y) \notin S$

5) $\Rightarrow\ \exists\, y \in B / (x,y) \in (R - S)$

6) $\Rightarrow\ x \in Dom(R - S)$

7) $\therefore$ Por 1) $\wedge$ 6): $[Dom(R) - Dom(S)] \subset Dom(R - S)$

DEMOSTRACION DE P_4) $\quad Rang(R \cup S) = Rang(R) \cup Rang(S)$

I) $(\subset)$

1) Sea $y \in Rang(R \cup S) \quad \Rightarrow\ \exists\, x \in A / (x,y) \in (R \cup S)$

2) $\Rightarrow\ [\exists\, x \in A / (x,y) \in R] \quad \vee \quad [\exists\, x \in A / (x,y) \in S]$

3) $\Rightarrow\ y \in Rang(R) \quad \vee \quad y \in Rang(S)$

4) $\Rightarrow\ y \in [Rang(R) \quad \cup \quad Rang(S)]$

5) $\therefore$ Por (1) y (4), se cumple: $Rang(R \cup S) \subset Rang(R) \cup Rang(S)$

II) $(\supset)$

1) Sea $y \in [Rang(R) \cup Rang(S)] \quad \Rightarrow\ y \in Rang(R) \quad \vee \quad y \in Rang(S)$

2) $\Rightarrow\ \underline{\exists\, x \in A} / (x,y) \in R \quad \vee \quad \underline{\exists\, x \in A} / (x,y) \in S$

3) $\Rightarrow\ \exists\, x \in A / (x,y) \in (R \cup S)$

4) $\Rightarrow\ y \in Rang(R \cup S)$

5) Por (1) y (4): $Rang(R) \cup Rang(S) \subset Rang(R \cup S)$

6) $\therefore\ Rang(R \cup S) = Rang(R) \cup Rang(S)$

DEMOSTRACIÓN DE P_5) $\quad Rang(R \cap S) \subset Rang(R) \cap Rang(S)$

$(\subset)$

1) Sea $\quad y \in Rang(R \cap S)$

2) $\Rightarrow\ \exists\, x \in A / (x,y) \in (R \cap S)$

3) $\Rightarrow\ \exists\, x \in A / [(x,y) \in R \quad \wedge \quad (x,y) \in S]$

4) $\Rightarrow\ \exists\, x \in A / (x,y) \in R \quad \wedge \quad \exists\, x \in A / (x,y) \in S$

5) $\Rightarrow\ y \in Rang(R) \quad \wedge \quad y \in Rang(S)$

6) $\Rightarrow\ y \in [Rang(R) \cap Rang(S)]$

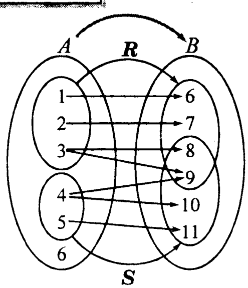
7) Por (1) $\wedge$ (6): $\boxed{Rang(R \cap S) \subset Rang(R) \cap Rang(S)}$

P$_6$) Sean R y S dos relaciones de A en B, demostrar que:
$Rang\,(R-S) \supset [\,Rang\,(R) - Rang\,(S)\,]$

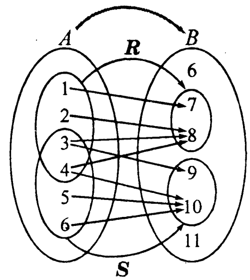
Prueba:

1. Sea $\quad y \in [\,Rang\,(R) - Rang\,(S)\,]$ (hipótesis)
2. $\Rightarrow \quad y \in Rang\,(R) \quad \wedge \quad y \notin Rang\,(S)$ (definición de diferencia de conjuntos)
3. $\Rightarrow \ \exists\, x \in A/(x,y) \in R \quad \wedge \quad \boxed{\forall\, x \in A\ ,\ (x,y) \notin S}$
4. $\Rightarrow \ \exists\, x \in A/(x,y) \in R \quad \wedge \quad \exists\, x\ ,\ (x,y) \notin S$ ésta proposición es verdadero para todo x en A, en particular será verdadero para algún $x \in A$.
5. $\Rightarrow \ \exists\, x \in A/(x,y) \in (R-S)$
6. $\Rightarrow \ y \in (R-S)$
7. Por 1 y 5 afirmamos: $[\,Rang(R) - Rang(S)\,] \subset (\,Rang R - S\,)$

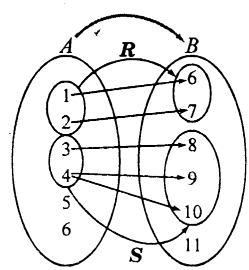
EJEMPLO 5



1. $R \cap S = \varnothing$
2. $Rang(R \cap S) \subset Rang(R) \cap Rang(S)$
   $\varnothing \quad \subset \quad \{8,9\}$



1. $R \cap S = \varnothing$
2. $Dom(R \cap S) \subset Dom(R) \cap Dom(S)$
   $\varnothing \quad \subset \quad \{3,4\}$

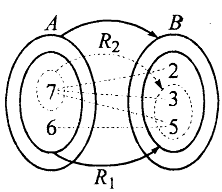


1. $R \cap S = \varnothing$
2. $Dom(R) \cap Dom(S) = \varnothing$
3. $Rang(R) \cap Rang(S) = \varnothing$

EJEMPLO 6 Sean las relaciones de A en B.

$$R_1 = \{(7,3),(7,2),(6,5)\}$$

$$R_2 = \{(7,3),(7,5)\}$$



Se tiene:

a) $R_1 \cap R_2 = \{(7,3)\}$

b) $R_1 - R_2 = \{(7,2),(6,5)\}$

Se cumplen:

1 $Dom\,(R_1 \cap R_2) = Dom\,(R_1) \cap Dom\,(R_2)$

2 $Dom\,(R_1 - R_2) \supset Dom\,(R_1) - Dom\,(R_2)$

3 $Rang\,(R_1 \cap R_2) \subset Rang\,(R_1) \cap Rang\,(R_2)$

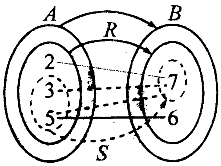
4 $Rang\,(R_1 - R_2) \supset Rang\,(R_1) - Rang\,(R_2)$

EJEMPLO 7

Sean R y S dos relaciones de A en B, definidas del siguiente modo:

$$R = \{(2,7),(3,7),(5,6)\}$$

$$S = \{(3,7),(5,7)\}$$



Se tiene: a) $R \cap S = \{(3,7)\}$

b) $R - S = \{(5,6),(2,7)\}$

Se cumplen:

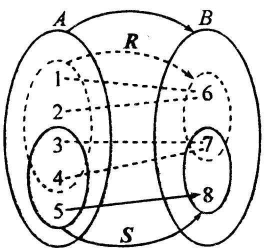
1. $Dom(R \cap S) \subset Dom(R) \cap Dom(S)$
2. $Dom(R - S) \supset Dom(R) - Dom(S)$
3. $Rang(R \cap S) = Rang(R) \cap Rang(S)$
4. $Rang(R - S) \supset Rang(R) - Rang(S)$

EJEMPLO 8

Sean R y S dos relaciones de A en B definidas del siguiente modo:

$$R = \{(1,6),(2,6),(3,7),(4,7)\}$$

$$S = \{(3,7),(4,7),(5,8)\}$$



Se tiene:

a) $R \cap S = \{(3,4),(4,7)\}$

b) $R - S = \{(1,6),(2,6)\}$

Se cumplen:

1. $Dom(R \cap S) = Dom(R) \cap Dom(S)$
2. $Dom(R - S) = Dom(R) - Dom(S)$
3. $Rang(R \cap S) = Rang(R) \cap Rang(S)$
4. $Rang(R - S) = Rang(R) - Rang(S)$

EJEMPLO 9

Sean R y S dos relaciones de A en B definidas del siguiente modo:

$$R = \{(2,7),(3,8)\}$$

$$S = \{(1,6),(2,7),(3,8),(4,9)\}$$

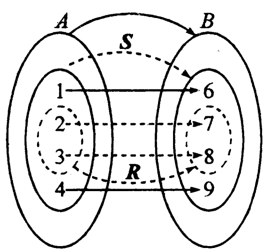
Se tiene:

a) $R \subset S$ →

- $R \cap S = R$
- $R - S = \varnothing$
- $S - R = \{(1,6),(4,9)\}$

se cumple:

1. $Dom(R \cap S) = Dom(R) = \{2,3\}$
2. $Dom(R - S) = Dom(R) - Dom(S) = \varnothing$
3. $Rang(R \cap S) = Rang(R) = \{7,8\}$
4. $Rang(R - S) = Rang(R) - Rang(S) = \varnothing$



3.7 TIPOS DE RELACIONES

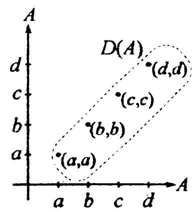
3.7.1 RELACIÓN REFLEXIVA

Sea R una relación en A (es decir $R \subset A \times A$), se dice que R es una relación **REFLEXIVA** en A sí, y sólo si:

$\boxed{\forall\, x \in A \quad \text{implica} \quad (x,x) \in R}$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\forall\, x \in A \quad \text{implica} \quad x\,R\,x}$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{D(\Delta) \subset R\text{ , } D(A) \text{ es el conjunto diagonal}}$



EJEMPLO 1 Dado el conjunto $A = \{a,b,c,d\}$, se tiene que la relación $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$ es REFLEXIVA porque $D(A) \subset R$.

3.7.2 RELACIÓN SIMÉTRICA

Sea R una relación en $A\,(R \subset A \times A)$, se dice que R es una relación simétrica si, y sólo si:

$\boxed{(x,y) \in R \quad \text{implica} \quad (y,x) \in R\text{ , } \forall\,(x,y) \in R}$

que es equivalente a:

$\boxed{x\,R\,y \quad \text{implica} \quad y\,R\,x\text{ , } \forall\,(x,y) \in R}$

EJEMPLO 2 En el ejemplo 1 se cumple que R es simétrica.

EJEMPLO 3 La relación S en $B = \{1,2,3,4\}$ definida por:

$S = \left\{ (x,y) \in B^2 / x + y = 5 \right\}$ es simétrica.

Donde $S = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$

3.7.3 RELACIÓN TRANSITIVA

Sea R una relación en $A\,(R \subset A \times A)$, se dice que R es una relación **TRANSITIVA** sí, y sólo si:

$$\begin{array}{ccccc} [\underbrace{(x,y)\in R}_{} & \wedge & \underbrace{(y,z)\in R}_{}] & \text{implica} & \underbrace{(x,z)\in R}_{} \\ [\quad x\,R\,y & \wedge & y\,R\,z \quad] & \Rightarrow & x\,R\,z \end{array}$$

EJEMPLO 4 En el ejemplo 1, la relación R es transitiva.

3.7.4 RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Sea R una relación en A, diremos que R es una relación de equivalencia si, y sólo si R es: reflexiva, simétrica y transitiva.

En el ejemplo 1, la relación R es de equivalencia.

3.7.5 RELACIÓN ASIMÉTRICA

Sea R una relación en A, se dice que R es **ASIMETRICA** sí, y sólo si: $(x,y)\in R$ implica $(y,x)\notin R$.

EJEMPLOS

1) Sea $A = \{\text{distritos de Lima}\}$ y $R = \{\,(x,y)\in A\times A\,/\,x$ tiene más habitantes que $y\,\}$
En este caso R es asimétrica.

2) Si $B = \{\text{hombres}\}$ y $S = \{\,(x,y)\in B\times B\,/\,x$ es hijo de $y\}$, entonces S es asimétrica.

3.7.6 RELACIÓN ANTISIMÉTRICA

Sea R una relación binaria en A

R es **ANTISIMETRICA**, Si $[(x,y)\in R \;\wedge\; (y,x)\in R] \Rightarrow x = y \;,\; \forall\,(x,y)$.

EJEMPLOS

1) Si $A = \{\text{distritos de Lima}\}$ y $R = \{\,(x,y)\in A\times A/x$ tiene igual o mayor número de habitantes que $y\}$

2) La relación de inclusión.

3.7.7 RELACIÓN DE ORDEN PARCIAL

Sea R una relación binaria en A.

R es de **ORDEN PARCIAL**, si es reflexiva, antisimetrica y transitiva.

EJEMPLO:

La relación de inclusión de conjuntos.

3.7.8 RELACIÓN CONEXA (O COMPARABLE)

Sea R una relación binaria en A

R es **CONEXA** si $[\forall\, x \in A \;\wedge\; \forall\, y \in A] \;\Rightarrow\; [(x,y) \in R \;\vee\; (y,x) \in R]$

EJEMPLO:

Sea $L = \{$puntos de una recta horizontal$\}$

y $R = \{(x,y) \in L \times L / x$ está a la derecha o coincide con $y\}$

3.7.9 RELACIÓN DE ORDEN TOTAL

Sea R una relación binaria en A.

R es de orden total, si es de orden parcial y conexa.

EJEMPLO:

La relación "a la izquierda de o coincide con" para puntos de una recta (que es la relación "$\leq$" en IR).

3.7.10 RELACIÓN DE PRE-ORDEN

Sea R una relación binaria en A.
R es de **PRE-ORDEN**, si es reflexiva y transitiva

EJEMPLO:

Si $\mathbb{Z} = \{\text{enteros}\}$ y $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, x \neq 0 \;\wedge\; x \text{ divide a } y\}$

3.7.11 PARTICIONES Y RELACIONES DE EQUIVALENCIA

a) *Noción de Partición.*
Dando un conjunto A, llamaremos **PARTICIÓN DE A** a una familia de subconjuntos de A, denotado por $\{A_i\}_{i \in I}$, cuyos elementos A_i cumplen tres condiciones:

P₁) $A_i \neq \varnothing \ \ \forall i \in I$,

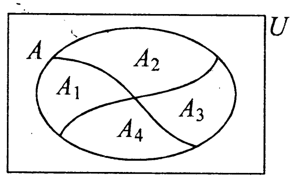
es decir ningún conjunto de la familia debe ser el conjunto vacío.

P₂) $A_i \cap A_j = \phi \ , \ \forall i \neq j$,

esto es los conjuntos de la familia deben ser disjuntos dos a dos.

P₃) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$,

es decir, la unión de todos los conjuntos que forman la familia debe ser el conjunto A.



La familia $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es una participación de A.

Pues:

P₁) $A_1 \neq \varnothing,\ A_2 \neq \varnothing,\ A_3 \neq \varnothing,\ A_4 \neq \varnothing$

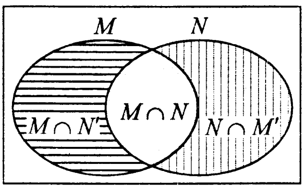
P₂) $A_1 \cap A_2 = \varnothing \ , \ A_1 \cap A_3 = \varnothing$

$A_1 \cap A_4 = \varnothing \ , \ A_2 \cap A_3 = \varnothing$

$A_2 \cap A_4 = \varnothing,\ A_3 \cap A_4 = \varnothing$

P₃) $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

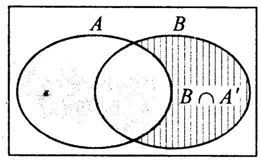
EJEMPLO 1:



La familia

$F = \{M \cap N', M \cap N, N \cap M'\}$

es una participación de $M \cup N$

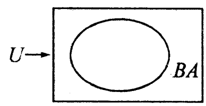


EJEMPLO 2:

La familia $\mathcal{G} = \{A, B \cap A'\}$ es una participación de $A \cup B$.

EJEMPLO 3:

La familia $\mathcal{H} = \{A, \complement A\}$ es una participación del conjunto universal U.



EJEMPLO 4:

Sea $A = \{a,b,c\}$ y $\mathcal{P}(A) = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\varnothing, A\}$

La familia $\mathfrak{F} = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

es una **PARTICIPACIÓN** de A.

La familia $\mathcal{G} = \{\{a\},\{b,c\}\}$

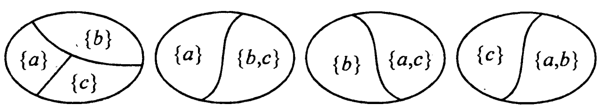
es una **PARTICIPACIÓN** de A.

La familia $\mathcal{H} = \{\{b\},\{a,c\}\}$

es una **PARTICIPACIÓN** de A.

La familia $\mathcal{Y} = \{\{c\},\{a,b\}\}$

es una **PARTICIPACIÓN** de A.

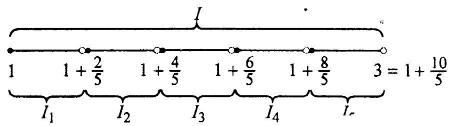


EJEMPLO 5:

Sea el intervalo $I=[1,3\rangle$ en el que:

1. Dividimos en 5 subintervalos de igual longitud: $\frac{3-1}{5}=\frac{2}{5}$
2. Los 5 subintervalos son de la forma

   $I_i=\left[1+\frac{2}{5}(i-1)\,,1+\frac{2}{5}i\right\rangle$, $i=1,2,3,4,5$



3. Se cumplen: P$_1$) $I_i\neq\varnothing$, $\forall i$

   P$_2$) $I_i\cap I_j=\varnothing$ $\forall i\neq j$

   P$_3$) $\bigcup_{i=1}^{5} I_i=I$

4. Por tanto, la familia $\mathfrak{F}=\{I_1,I_2,I_3,I_4,I_5\}$ es **UNA PARTICIÓN** de I.

b) ***Clases de Equivalencia y Conjunto Cociente***

Partiremos del siguiente ejemplo:

$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$ es una relación de equivalencia en $A=\{a,b,c,d\}$, es decir R es reflexiva, simétrica y transitiva.

NOTACIÓN

Teniendo en cuenta que R es una relación de equivalencia en A, la notación "$x\equiv y$ (mod R)" nos indica que "$(x\,,y)\in R$"

se lee "x equivalente con y, módulo R"

De modo que en la relación R, del ejemplo dado, se tendrá:

$a\equiv a(\text{mod}\,R)$ indica que $(a,a)\in R$

$b\equiv d(\text{mod}\,R)$ indica que $(b,d)\in R$, como R es de equivalencia también $(d,b)\in R$ luego $d\equiv b(\text{mod}\,R)$.

De acuerdo a la notación $x\equiv y(\text{mod}\,R)$ que significa $(x,y)\in R$, diremos que R es una relación de equivalencia en A, si cumple las tres siguientes condiciones:

E$_1$) $\underbrace{x\equiv x(\text{mod}\,R)}_{(x,x)\in R}$ $\quad\forall\, x\in A$

E$_2$) Si $x\equiv y(\text{mod}\,R)$ entonces $y\equiv x(\text{mod}\,R)$, $\forall\,(x,y)\in R$

E$_3$) Si $[x\equiv y(\text{mod}\,R)\ \wedge\ y\equiv z(\text{mod}\,R)]$ entonces $x\equiv z(\text{mod}\,R)$

Si R es una relación de equivalencia en A, para cada elemento $x \in A$ queda determinado un nuevo conjunto: el conjunto formado por todos los elementos de A que son equivalentes con x módulo R.

A este conjunto se le llama **CLASE DE EQUIVALENCIA** de $x \in A$ **CON RESPECTO** a R y se denota por el símbolo $[x]$

De modo que: $$[\boldsymbol{x}] = \{ y \in A / \underbrace{y \equiv \boldsymbol{x} (\text{mod } R)}_{(y,\boldsymbol{x}) \in R} \} \quad \boldsymbol{x} \text{ es fijo}$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia de A toma el nombre de **CONJUNTO COCIENTE** A **CON RESPECTO** a $\boldsymbol{R}$, y se denota A/R.

EJEMPLO 6: Dado $A = \{ a,b,c,d \}$ y
$R = \{ (a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a),(b,d),(d,b) \}$
una relación de equivalencia en A.

Se tiene:

$$[\boldsymbol{a}] = \{ a,c \} = \{ y \in A / \underbrace{y \equiv \boldsymbol{a} (\text{mod } R)}_{(y,a) \in R} \}$$

$$[\boldsymbol{b}] = \{ b,d \} = \{ y \in A / \underbrace{y \equiv \boldsymbol{b} (\text{mod } R)}_{(y,b) \in R} \}$$

clase de equivalencia de c con respecto a R

$$[\boldsymbol{c}] = \{ c,a \} = \{ y \in A / \underbrace{y \equiv \boldsymbol{c} (\text{mod } R)}_{(y,c) \in R} \}$$

$$[\boldsymbol{d}] = \{ d,b \} = \{ y \in A / \underbrace{y \equiv \boldsymbol{d} (\text{mod } R)}_{(y,d) \in R} \}$$

El **CONJUNTO COCIENTE** A con respecto a R es $A/R = \{ [a],[b],[c],[d] \}$

PROPIEDADES IMPORTANTES

Si R es una **relación de equivalencia** en A y $x \equiv y (\text{mod } R)$, se cumplen las propiedades:

P_1) Las clases de equivalencia de $x \in A$ con respecto a R son iguales o son disjuntos.

EJEMPLO: $[a] = [c]$, $[a] \cap [b] = \varnothing$
$[b] = [d]$, $[a] \cap [d] = \varnothing$

P_2) Toda relación de equivalencia R en A, determina una partición de A cuyos elementos son las clases de equivalencia que forman el conjunto cociente A/R.

EJEMPLO 7: $A/R = \{ [a],[b],[c],[d] \}$

La familia

$\mathfrak{F} = \{ [a],[b] \}$ es una partición de A

$\mathfrak{G} = \{ [a],[d] \}$ es una partición de A.

3.7.12 PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE RELACIONES DE EQUIVALENCIA

EJEMPLO 8: Sea R una relación en $I\!N \times I\!N$ definida por:

$((a,b),(c,d)) \in R \iff a+d=b+c$ ¿Es R de equivalencia?

Solución:

RECOMENDACIONES: Antes de resolver un problema de equivalencia, recomiendo al estudiante tres cosas concretas que debe plantearse:

1° ¿En qué clase de conjunto está definida la relación dada?

2° ¿Qué forma tienen los elementos de la relación dada?

3° ¿Cómo está definido la relación?

Para el presente problema tenemos:

1° R es una relación en $I\!N \times I\!N$, esto quiere decir que $R \subset (I\!N \times I\!N) \times (I\!N \times I\!N)$.

2° Luego los elementos de R son de la forma $((a,b),(c,d))$.

3° R está definido de la siguiente manera $\underbrace{((a,b),(c,d)) \in R}_{(a,b)\,R\,(c,d)} \iff a+d=b+c$

Teniendo claro esta idea, se empieza a demostrar si la relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

1. REFLEXIVA.

La definición dice: $x\,R\,x \quad , \quad \forall\, x \in A$

Para el problema será; $\underbrace{(a,b)}_{x}\, R\, \underbrace{(a,b)}_{x} \iff a+b=b+a \quad , \quad \forall\,(a,b) \in I\!N \times I\!N$

$$=a+b$$

2. SIMÉTRICA.

La definición dice: $x\,R\,y$ implica $y\,R\,x \quad , \quad \forall\,(x,y) \in R$

Probar que: $\underbrace{(a,b)}_{x}\, R\, \underbrace{(c,d)}_{y}$ implica $\underbrace{(c,d)}_{y}\, R\, \underbrace{(a,b)}_{x}$, $\forall\,(\underbrace{(a,b)}_{x},\underbrace{(c,d)}_{y}) \in R$

Veamos:

$(a,b)\,R\,(c,d) \iff a+d=b+c$

$d+a=c+b$ la suma de números es conmutativa.

$\underbrace{c+b=d+a}_{(c,d)\,R\,(a,b)}$ la igualdad es simétrica.

Luego afirmamos que R es simétrica.

3. TRANSITIVIDAD.

La definición dice: Si [$x R y \wedge y R z$] $\Rightarrow$ [$x R z$]

Para el problema debo probar: Si [$\underbrace{(a,b)}_{x} R \underbrace{(c,d)}_{y} \wedge \underbrace{(c,d)}_{y} R \underbrace{(p,q)}_{z}$] $\Rightarrow$ ¿[$\underbrace{(a,b)}_{x} R \underbrace{(p,q)}_{z}$]?

Veamos: Si $(a,b) R (c,d)$ implica $a+d=b+c$ ¿ $a+q=b+p$?

Si $(c,d) R (p,q)$ implica $c+q=d+p$

Sumar adecuadamente: $(a+q)+(c+d)=(b+p)+(c+d)$

cancelar $(c+d)$: $\underbrace{a+q=b+p}_{(a,b)\,R\,(p,q)}$ lo cual prueba que R es transitiva.

Como R es reflexiva, simétrica y transitiva, afirmamos que R es una relación de equivalencia.

EJEMPLO 9. Sea S una relación definida por:
$S=\{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} / 3 \text{ divide a } (x-y)\}$, ésta definición es equivalente a: "$x S y \iff x \equiv y (\text{mod} 3)$" y se leerá "$x$ es congruente con y, módulo 3". Analizar si la congruencia módulo 3 es una relación de equivalencia.

Solución:

Tener en cuenta:

1) $S \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
2) Los elementos de S son (x,y), tal que, $x\in\mathbb{Z} \wedge y\in\mathbb{Z}$
3) S está definido de la siguiente manera: $x S y \iff x\equiv y$ (mód 3)
$\iff$ 3 divide a $(x-y)$

Ahora, probemos:

1. REFLEXIVA. La definición dice: $x R x$, $\forall x\in A$

Para el problema: $x S x \iff$ 3 divide a $(x-x)$
$\iff$ 3 divide a "0" $\iff \exists m\in\mathbb{Z}/0=3m$ que se cumple sólo para $m=0$. Lo cual es verdadero.

Por tanto, S es reflexiva.

2. SIMÉTRICA. La definición dice: $x R y$ implica $y R x$

Se debe responder la pregunta: ¿3 divide a $(y-x)$?

Para el problema: $x S y \iff$ 3 divide a $(x-y) \iff \exists n\in\mathbb{Z}/x-y=3n$

$$-(y-x)=3n$$

$$(y-x)=3(-n)$$

$$\Longleftrightarrow 3 \text{ divide a } -(y-x)$$
$$\Rightarrow 3 \text{ divide a } (y-x)$$
$$\Rightarrow y\,S\,x$$

Por tanto, S es simétrica.

3. TRANSITIVA. La definición dice: si $x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$

   Para el problema: si $x\,S\,y \wedge y\,S\,z \Rightarrow x\,S\,z$

   Se debe responder la pregunta: ¿3 divide a $(x-z)$?

   Veamos:

   Si $x\,S\,y \Longleftrightarrow 3$ divide a $(x-y) \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \,/\, x-y=3k$
   Si $y\,S\,z \Longleftrightarrow 3$ divide a $(y-z) \Longleftrightarrow \exists\, p \in \mathbb{Z} \,/\, y-z=3p$
   sumar: $x-z=3(k+p)$ implica que:
   3 divide a $(x-z)$

   Por tanto S es transitiva.
4. Como S es reflexiva, simétrica y transitiva, afirmamos que S es una relación de equivalencia.

EJEMPLO 10. Sea R una relación reflexiva en A. Demostrar que R es una relación de equivalencia si, y sólo si $(a,b)\in R$ y $(a,c)\in R$, entonces $(b,c)\in R$.

Prueba:

1. Si R es una relación reflexiva en A; implica dos cosas $\begin{cases} i)\ R \subset A\times A \\ ii)\ \underbrace{(a,a)\in R}_{a\,R\,a}\ ,\ \forall\, a\in A \end{cases}$

   La demostración se hace con dos implicaciones:

La 1ª implicación ($\Rightarrow$)

Si R es una relación de equivalencia, implica que $[\text{si } \overbrace{(a,b)\in R \ \wedge\ (a,c)\in R}^{p}] \Rightarrow [\overbrace{(b,c)\in R}^{q}]$

Veamos:

2. Si R es una relación de equivalencia en A, entonces R es reflexiva, simétrica y transitiva.

   La premisa es p: $(a,b)\in R \wedge (a,c)\in R$; por demostrar que $\overbrace{(b,c)\in R}^{q}$

3. Si $(a,b)\in R$ implica que $\underline{\underline{(b,a)\in R}}$ .... porque R es simétrica.

4. Ahora, si $\underline{\underline{(b,a)}}\in R \wedge \underline{(a,c)\in R}$, implica que $(b,c)\in R$ .... porque R es transitiva.

La 2ª implicación ($\Leftarrow$)

[si $(a,b)\in R \wedge (a,c)\in R$ entonces $(b,c)\in R$] implica [que R es una relación de equivalencia].

Por probar que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Veamos:

5. Por hipótesis: R es reflexiva.

Ahora, sólo debemos probar la simetría y la transitividad.

6. La Simetría: si $\underline{(a,b)\in R} \wedge (a,a)\in R$ implica $\underline{(b,a)\in R}$ ...... por **HIPÓTESIS**.

7. La transitividad: si $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R$ debo probar que $(a,c)\in R$

i) Si $\underline{(a,b)\in R} \wedge (a,c)\in R \Rightarrow \underline{\underline{(b,c)}}\in R$ por hipótesis.

ii) Si $\underline{(b,a)\in R} \wedge (b,c)\in R \Rightarrow \underline{\underline{(a,c)}}\in R$ por hipótesis.

8. Por *i*) y *ii*) hemos deducido: si $\underline{(a,b)}\in R \wedge \underline{\underline{(b,c)}}\in R \Rightarrow \underline{\underline{(a,c)}}\in R$.

EJEMPLO 11 Sea R una relación definida en $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$, por:
$(a,b)\ R\ (c,d) \iff a\cdot d=b\cdot c$

a) Analizar si R es una relación de equivalencia.

b) Hallar los pares (c,d) que cumplen $(2,3)\ R\ (c,d)$.

Prueba de a)

Si R es una relación en $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ implica que $R\subset(\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+)\times(\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+)$, por tanto, los elementos de R son de la forma $((a,b),(c,d))$.

R está definido de la siguiente forma: $((a,b),(c,d))\in R \iff a\cdot d=b\cdot c$

Ahora, debo probar que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

1. REFLEXIVA: $((a,b),(a,b))\in R \iff a\cdot b=b\cdot a$, lo cual es verdadero.

2. SIMÉTRICA: si $((a,b),(c,d))\in R$, debo probar que $\underbrace{((c,d),(a,b))\in R}_{c\cdot b=d\cdot a}$

Veamos:

si $((a,b),(c,d))\in R \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$

$\iff d\cdot a=c\cdot b$ porque el producto de números enteros es conmutativo.

$\iff c\cdot b=d\cdot a$ La igualdad de números enteros es simétrico.

$\Rightarrow \overbrace{((c,d),(a,b))\in R}$

3. TRANSITIVA:

Si $((a,b),(c,d)) \in R \quad \wedge \quad ((c,d),(m,n)) \in R$ debo probar que $\underbrace{((a,b),(m,n)) \in R}_{a \cdot n = b \cdot m}$

Veamos:

Si $((a,b),(c,d)) \in R \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c$ por definición de R.

Si $((c,d),(m,n)) \in R \;\Rightarrow\; c \cdot n = d \cdot m$ por definición de R.

multiplicar: $(ad)(cn) = (bc)(dm)$

$\Rightarrow \; (an)\underline{(dc)} = (bm)\underline{(dc)}$ propiedad asociativa.

$\Rightarrow \; \underbrace{an = bm}$ propiedad cancelativa.

$\Rightarrow \; ((a,b),(m,n)) \in R$

$\therefore$ R es una relación de equivalencia.

Solución de b)

Si $(2,3)\, R\, (c,d) \;\Rightarrow\; 2d = 3c$

$$\Longleftrightarrow \; \tfrac{2}{3} = \tfrac{c}{d}$$

$$\Longleftrightarrow \; \tfrac{2k}{3k} = \tfrac{c}{d} \;,\; \forall\, k \in \mathbb{Z} \;,\; k \neq 0$$

$$\Rightarrow \; \begin{cases} c = 2k \;,\; \forall\, k \in \mathbb{Z} \;,\; k \neq 0 \\ d = 3k \end{cases}$$

3.8 RELACIÓN INVERSA

3.8.1 Definición.

Si R es una relación de A en B, es decir $R = \{(x,y) \in A \times B / x\; R\; y\} \subset A \times B$, entonces R^{-1} es una relación de B en A, llamado **RELACIÓN INVERSA** de R y definimos: $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A / (x,y) \in R\} \subset B \times A$.

De modo que	$(y,x) \in R^{-1} \iff (x,y) \in R$
o equivalentemente	$(y,x) \notin R^{-1} \iff (x,y) \notin R$

3.8.2 DOMINIO Y RANGO DE R^{-1}

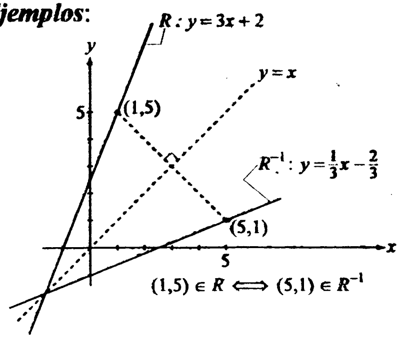
Si R es una relación de A en B, se cumplen:

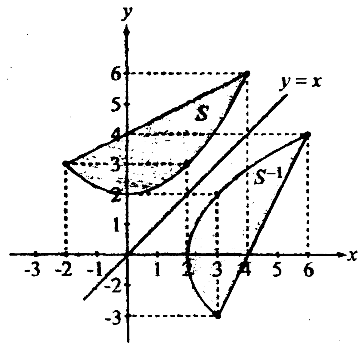
$$\boxed{\begin{array}{l} Dom(R^{-1}) = Rang(R) \\ Rang(R^{-1}) = Dom(R) \end{array}}$$

3.8.3 PROPIEDAD:

Si R es una relación en $I\!R$, se cumple que la gráfica de R^{-1} es simétrica a la gráfica de R con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplos:





$$R = \{(x,y) / y = 3x+2\}$$

$$R^{-1} = \{(y,x) / y = 3x+2\}$$

$$= \{(3x+2, y) / x \in I\!R\}$$

$$(0,2) \in R \iff (2,0) \in R^{-1}$$

$$(1,5) \in R \iff (5,1) \in R^{-1}$$

$$(2,8) \in R \iff (8,2) \in R^{-1}$$

$$S = \{(x,y) / x^2 \leq 4(y-2) \ \wedge \ x - 2y + 8 \geq 0\}$$

$$S^{-1} = \{(y,x) / x^2 \leq 4(y-2) \ \wedge \ x - 2y + 8 \geq 0\}$$

$$= \{(x,y) / y^2 \leq 4(x-2) \ \wedge \ y - 2x + 8 \geq 0\}$$

Como podemos apreciar la relación inversa R^{-1}, se obtiene intercambiado x con y en R. Es decir $(x,y) \in R \iff (y,x) \in R^{-1}$.

NOTA

Si $R = \{(x,y) / y = 3x+2\} = \{(x, 3x+2) / x \in I\!R\}$ entonces R^{-1} se puede expresar de tres formas:

$R^{-1} = \{(3x+2, x) / x \in I\!R\}$

o $R^{-1} = \{(y,x) / y = 3x+2\}$

o $R^{-1} = \{(x,y) / x = 3y+2\} = \left\{(x,y) \middle/ y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right\}$

3.8.4 PROPIEDADES DE LA RELACIÓN INVERSA.

Sean $R : A \to B \;\; \wedge \;\; S : A \to B$ **dos relaciones de** A **en** B, se cumplen:

P$_1$) $\quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

P$_2$) $\quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

P$_3$) $\quad (R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

P$_4$) $\quad (R \,\Delta\, S)^{-1} = R^{-1} \;\Delta\; S^{-1}$

Prueba de P$_1$ $\quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

$(\subset)$

Por probar: Si $\forall\,(y,x) \in (R \cup S)^{-1}$ implica $(y,x) \in (R^{-1} \cup S^{-1})$

Veamos:

1. $\quad \forall\,(y,x) \in (R \cup S)^{-1}$

2. $\Rightarrow\; (x,y) \in (R \cup S)$

3. $\Rightarrow\; (x,y) \in R \quad \vee\; (x,y) \in S$

4. $\Rightarrow\; (y,x) \in R^{-1} \;\vee\; (y,x) \in S^{-1}$

5. $\Rightarrow\; (y,x) \in (R^{-1} \cup S^{-1})$

6. $\therefore$ Por 1. y 5. $(R \cup S)^{-1} \subset R^{-1} \cup S^{-1}$

$(\supset)$

Por probar: Si $\forall\; (y,x) \in (R^{-1} \cup S^{-1})$ implica $(y,x) \in (R \cup S)^{-1}$

Veamos:

7. Si $\forall\,(y,x) \in (R^{-1} \cup S^{-1})$

8. $\Rightarrow \quad (y,x) \in R^{-1} \;\vee\; (y,x) \in S^{-1}$

9. $\Rightarrow \quad (x,y) \in R \quad \vee\; (x,y) \in S$

10. $\Rightarrow \quad (x,y) \in (R \cup S)$

11. $\Rightarrow \quad (y,x) \in (R \cup S)^{-1}$

12. Por 6. y 11, $(R^{-1} \cup S^{-1}) \subset (R \cup S)^{-1}$

$\therefore$ Por 6. y 12. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

Prueba de P_3 $(R-S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

$(\subset)$

Por probar: Si $\forall (y,x) \in (R-S)^{-1}$ implica $(y,x) \in (R^{-1} - S^{-1})$

Veamos:

1. $\forall\ (y,x)(R-S)^{-1}$
2. $\Rightarrow \quad (x,y) \in (R-S)$
3. $\Rightarrow \quad (x,y) \in R \quad \wedge\ (x,y) \notin S$
4. $\Rightarrow \quad (y,x) \in R^{-1} \ \wedge\ (y,x) \notin S^{-1}$
5. $\Rightarrow \quad (y,x) \in (R^{-1} - S^{-1})$
6. Por 1. y 5. se cumple: $(R-S)^{-1} \subset (R^{-1} - S^{-1})$

$(\supset)$

Por probar: Si $\forall (y,x) \in (R^{-1} - S^{-1})$ implica $(y,x) \in (R-S)^{-1}$

Veamos:

7. $\forall \quad (y,x) \in (R^{-1} - S^{-1})$
8. $\Rightarrow \quad (y,x) \in R^{-1} \ \wedge\ (y,x) \notin S^{-1}$
9. $\Rightarrow \quad (x,y) \in R \quad \wedge\ (x,y) \notin S$
10. $\Rightarrow \quad (x,y) \in (R-S)$
11. $\Rightarrow \quad (y,x) \in (R-S)^{-1}$
12. Por 7 y 11 : $(R^{-1} - S^{-1}) \subset (R-S)^{-1}$

$\therefore$ Por 6 y 12: $(R-S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$

Prueba de P_4 $(R \,\Delta\, S)^{-1} = R^{-1} \,\Delta\, S^{-1}$

$(\subset)$

Por probar: $\forall\ (y,x) \in (R \,\Delta\, S)^{-1}$ implica $(y,x) \in (R^{-1} \,\Delta\, S^{-1})$

1. $\forall \quad (y,x) \in (R \,\Delta\, S)^{-1}$
2. $\Rightarrow (x,y) \in (R \,\Delta\, S)$
3. $\Rightarrow (x,y) \in (R-S) \quad \vee\ (x,y) \in (S-R)$
4. $\Rightarrow [(x,y) \in R \quad \wedge \quad (x,y) \notin S] \quad \vee \quad [(x,y) \in S \quad \wedge \quad (x,y) \notin R]$
5. $\Rightarrow [(y,x) \in R^{-1} \quad \wedge \quad (y,x) \notin S^{-1}] \quad \vee \quad [(y,x) \in S^{-1} \quad \wedge \quad (y,x) \notin R^{-1}]$

6. $\Rightarrow\ (y,x)\in(R^{-1}-S^{-1}) \quad \vee \quad (y,x)\in(S^{-1}-R^{-1})$

7. $\Rightarrow\ (y,x)\in(R^{-1}\,\Delta\,S^{-1})$

8. Por 1. y 7: $(R\,\Delta\,S)^{-1}\subset(R^{-1}\,\Delta\,S^{-1})$

$(\supset)$

Por probar: $\forall\,(y,x)\in(R^{-1}\,\Delta\,S^{-1})$ implica $(y,x)\in(R\,\Delta\,S)^{-1}$

Queda como ejercicio……

3.9 COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Sean: R una relación de A en B (R: $A\to B$ o $R\subset A\times B$) y
S una relación de B en C (S: $B\to C$ o $S\subset B\times C$)

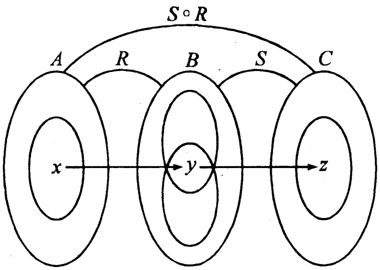
Definimos una nueva relación "S o R" de A en C del siguiente modo:

$$S\circ R=\{(x,z)\in A\times C\,/\,\exists\,y\in B,(x,y)\in R \quad \wedge \quad (y,z)\in S\}$$

recibe el nombre de "RELACIÓN COMPUESTA DE R y S" o simplemente "R compuesta con S".

Es decir: $\boxed{(x,z)\in S\circ R \iff \exists\,y\in B\,/\,(x,y)\in R \wedge (y,z)\in S}$

según la definición de S o R nos permite hacer el siguiente diagrama



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend left, "S\circ R"] & B \arrow[r, "S"] & C \end{tikzcd}$$

Donde: $R\subset A\times B$ o R: $A\to B$
$S\subset A\times B$ o S: $B\to C$

NOTA

La relación "$S\circ R$" existe si y sólo si, $Rang(R)\cap Dom(S)\neq\varnothing$

Por tanto, si $Rang(R)\cap Dom(S)\neq\varnothing \Rightarrow S\circ R\neq\varnothing$

3.9.1 EJEMPLOS

EJEMPLO 1. Sean $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,4,6,8,9\}$, $C = \{1,2,3,5,7\}$ definimos las relaciones:

$R = \{(1,2),(1,4),(3,4),(4,6)\}$ de A en B.

$S = \{(1,2),(1,3),(2,3),(4,7),(4,1)\}$ de B en C.

Hallar a) $S \circ R$, b) $R \circ S$

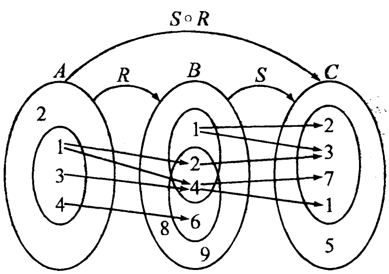
Solución de a)

$$R = \{(1,2),(1,4),(3,4),(4,6)\}$$

$$S = \{(1,2),(1,3),(2,3),(4,7),(4,1)\}$$

$\Rightarrow$ $S \circ R = \{(1,3),(1,7),(1,1),(3,7),(3,1)\}$ que es una relación de A en C.

El diagrama correspondiente es:



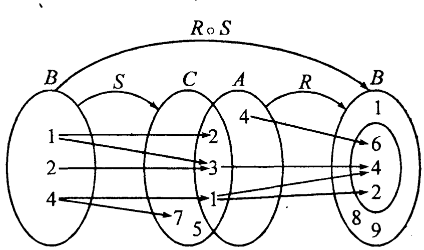
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[rr, bend left, "S \circ R"] & B \arrow[r, "S"] & C \end{tikzcd}$$

Solución de b) $S = \{(1,2),(1,3),(2,3),(4,7),(4,1)\}$

$$R = \{(1,2),(1,4),(3,4),(4,6)\}$$

Entonces: $R \circ S = \{(1,4),(2,4),(4,2),(4,4)\}$ que es una relación de $\boldsymbol{B}$ en B.

El diagrama es:



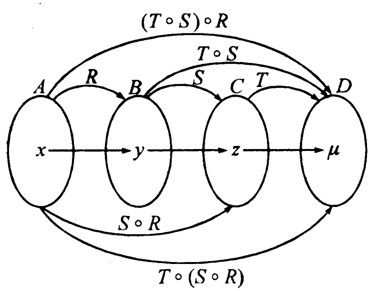
EJEMPLO 2. Sea R una relación de A en B y S una relación de B en C.
Definimos la relación compuesta de R y S, que se denota $S \circ R$ mediante
$S \circ R = \{(x,z) / x \in A \ \wedge \ z \in C, \exists\, y \in B / (x,y) \in R \ \wedge \ (y,z) \in S\}$

a) Dadas tres relaciones cualesquiera: $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$ y $T \subset C \times D$
Demostrar que $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$ .... prop. asociativa de la composición.

b) Si $A = B = C = D = \{a,b,c,d\}$
$R = \{(a,a),(a,b),(c,b),(d,d)\}$
$S = \{(a,a),(b,c)\}$
$T = \{(a,b),(c,c),(c,d)\}$
verificar la parte a)

Prueba de a)

1. Hagamos un diagrama para intuir como es $(T \circ S) \circ R$ y $T \circ (S \circ R)$



Se debe probar que: $\forall\, (x,u) \in [(T \circ S) \circ R]$ implica $(x,u) \in [T \circ (S \circ R)]$

Veamos:

2. Sea:

$$(x,u) \in [(T \circ S) \circ R] \iff \exists\, (y,z) \in B \times C / (x,y) \in R \ \wedge \ (y,u) \in T \circ S$$

$$\iff \exists\, (y,z) \in B \times C / (x,y) \in R \ \wedge \ \exists\, z \in C / (y,z) \in S \ \wedge \ (z,u) \in T$$

$$\iff \exists\, y \in B \wedge \exists\, z \in C / [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S] \wedge (z,u) \in T$$

$$\iff \exists\, y \in B \ \wedge \ \exists\, z \in C / (x,z) \in S \circ R \ \wedge \ (z,u) \in T$$

$$\iff \exists\, (y,z) \in B \times C / (x,u) \in [T \circ (S \circ R)]$$

Solución de b)

1°) Hallaremos $(T \circ S) \circ R$

$$S = \{(a,a), (b,c)\} \longrightarrow T \circ S = \{(a,b),(b,c),(b,d)\}$$

$$T = \{(a,b), (c,c), (c,d)\}$$

$$R = \{(a,a),(a,b),(c,b),(d,b)\}$$

$$(T \circ S) \circ R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(c,d),(c,c)\}$$

2°) Hallemos $T \circ (S \circ R)$

$$R = \{(a,a),(a,b),(c,b),(d,d)\}$$

$$S \circ R = \{(a,a),(a,c),(c,c)\}$$

$$S = \{(a,a),(b,c)\}$$

$$T = \{(a,b),(c,c),(c,d)\}$$

$$(T \circ S) \circ R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(c,d),(c,c)\}$$

3.10 FUNCIONES O APLICACIONES

Introducción:

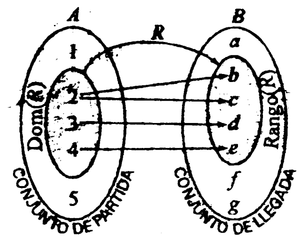
En el título 3.5.1, hemos definido una relación de A en B y definimos:

"R es una relación de A en B, si $R \subset A \times B$"

donde: A = conjunto de **PARTIDA**

B = conjunto de **LLEGADA**

$Dom(R) \subset A$, $Rang(R) \subset B$



<u>Ejemplo</u>: Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

donde $R = \{(2,b),(2,c),(3,d),(4,e)\}$ es una relación de A en B, porque $R \subset A \times B$

RELACIONES ESPECIALES

Existen dos relaciones de A en B muy especiales llamados funciones de A en B y aplicaciones de A en B, cuyas definiciones la damos a continuación.

FUNCIÓN DE A EN B

3.10.1 DEFINICIÓN 1

Dado dos conjuntos A y B, diferentes del vacío, se dice que f es una función definida en A con valores en B, si f hace corresponder a cada elemento de A un ***único*** elemento de B.

NOTACIÓN: $f : A \longrightarrow B$ $\Leftarrow$ se lee "f es una función de A en B"

$x \longmapsto y = f(x)$ $\Leftarrow$ se lee "y es la imagen de x mediante f" o "y es el valor de la función f en x"

GRAFO DE UNA FUNCIÓN

Definición. Sea $f : A \longrightarrow B$ definida por $y = f(x)$, el **GRAFO de f** es el subconjunto de $A \times B$ denotada por $Gr(f)$ y definida por $Gr(f) = \{ (x, f(x)) \in A \times B : x \in A \}$

Según esta definición el $Gr(f)$ es una relación de A en B, es decir $Gr(f) \subset A \times B$. La representación gráfica del grafo de una función, cuando sea posible, se llama **gráfica de la función**.

3.10.2 DEFINICIÓN 2.

Si el $Gr(f)$, que es una relación de A en B, goza de las siguientes propiedades:

1) $Dom(Gr(f)) = A$

2) Si $(x, y) \in Gr(f) \quad \wedge \quad (x, z) \in Gr(f) \quad \Rightarrow \quad y = z$

Entonces decimos que f es una función de A en B.

Según 2): si en el $Gr(f)$ hay dos pares ordenados cuyas primeras componentes son iguales, entonces las segundas componentes deben ser iguales. Caso contrario f no es una función de A en B.

Ejemplo 1: Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, donde:

$$Gr(f) = \{ (1,2), (2,6), (3,10), (4,4) \}$$

$$Gr(g) = \{ (1,2), (2,6), (2,8), (3,10), (4,4) \}$$

$$Gr(h) = \{ (2,6), (3,2), (3,8), (3,10), (1,2), (4,10) \}$$

En este caso tenemos:

i) f, si es una función de A en B.

ii) g, no es una función de A en B, porque los pares ordenados (2,6) y (2,8) son diferentes que tienen las primeras componentes iguales. Dicho en otra forma: al elemento $2 \in A$ le corresponde (asocia) dos elementos 6 y 8 de B, lo cual contradice a la definición 1.

iii) h, no es función de A en B, porque a $3 \in A$ le corresponde tres elementos: 2, 8, 10 de B. Contradice a la definición 1.

Ejemplo 2: Dado $Gr(f) = \{(1,2),(2,4),(2,8x-4y),(3,8),(3,-4x+4y)\}$

Hallar los valores "x" e "y" si se sabe que f es una función de $\{1,2,3\}$ en $I\!N$.

Solución.

Según la definición 2, deben cumplirse $\begin{cases} 8x-4y=4 \\ -4x+4y=8 \end{cases}$

de donde se obtiene que $x=3$, $y=5$.

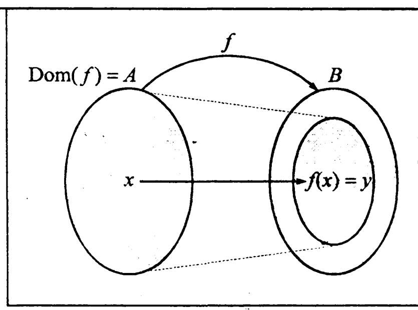
3.10.3 DEFINICIÓN DE APLICACIÓN

Una función f, se llama **APLICACIÓN** de A en B si, y sólo si $Dom(f) = A$ (conjunto de partida)

Simbólicamente, escribimos:

f es una **APLICACIÓN** de A en B,

si, y sólo si $\forall\, x \in A, \exists!\, y \in B \,/\, y = f(x)$



Por cuestiones didácticas, trataremos a las funciones como aplicaciones. En adelante, cada vez que nos referimos a las funciones, vamos a concebir que su dominio es el **CONJUNTO DE PARTIDA**.

3.10.3.1 NOTACIÓN

Si f es una función (APLICACIÓN) de A en B, las siguientes notaciones son equivalentes:

1) $f : A \longrightarrow B$ se lee "f es una función de A en B"

2) $A \xrightarrow{f} B$ se lee "f es una función de A en B"

3) $x \longmapsto f(x)$ se lee "a cada x le corresponde $f(x)$"

4) $y = f(x)$ se lee "y es imagen de x mediante f"
o "y es el valor de la función f en x"

5) $Gr(f) = \{(x, f(x)) \,/\, x \in A\}$

6) $Gr(f) = \{(x, y) \,/\, y = f(x)\,,\, x \in A\}$

Grafo de f

7) $f(A)$ es la imagen del conjunto A, mediante f.

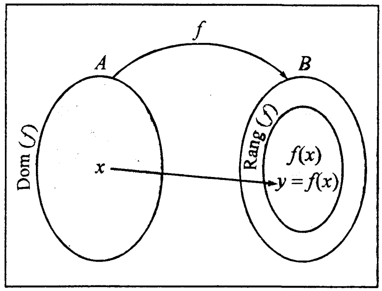
3.10.4 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN o APLICACIÓN

Si f es una función de A en B, definimos:

$$A = Dom(f) = \{x \in A \,/\, \exists!\, y \in B \ \wedge \ y = f(x)\}$$

$$f(A) = Rang(f) = \{y = f(x) \in B / x \in A\} \subset B$$

El rango de f es un subconjunto de B.



3.10.4.1 ACLARACIONES BÁSICAS

La definición de función, es quizás, uno de los temas de gran trascendencia en las matemáticas. Parecería que todo lo que nos rodea es función de algo.

Por ejemplo:

1. El costo de vida es función del precio de los productos, de la inflación, de las medidas económicas que dicta un gobierno, etc.
2. La demanda de un producto es función del precio, del ingreso, etc.
3. La conducta de una persona es función de la educación, del estado de ánimo, de la estación, etc.
4. El rendimiento escolar es función de la alimentación, del medio ambiente, del estatus económico, de la dedicación en el estudio, etc.

En las ciencias sociales, existen relaciones funcionales que expresan determinados fenómenos económicos, sociales o psicológicos, cuya formulación matemática no son exactas, matemáticamente hablando, pero pueden ser una buena aproximación para inferir determinado fenómeno o conducta del área en estudio.

En economía, es la **ECONOMETRÍA** la disciplina que se encarga de formular relaciones funcionales entre las variables económicas. La psicología se apoya en la **ESTADISTICA**, para formular algunas relaciones funcionales que tienen que ver con la conducta humana.

En las ciencias naturales (biología, física, química) es donde se han encontrado relaciones funcionales que rigen el universo y la vida misma.

Cada vez que la ciencia y la tecnología va avanzando será posible descubrir nuevas y más complejas relaciones funcionales cuya validez tiene ahora mayor garantía con la incursión de las veloces y modernas computadoras.

En las matemáticas, que es una ciencia exacta y abstracta, es donde el hombre ha podido desarrollar una amplia gama de disciplinas teóricas y abstractas que hoy día, todas las demás ciencias se apoyan en ella para explicar alguna relación funcional que se halle.

Gran parte de los estudiantes, pasan desapercibido el concepto de función, grave error que se incurre; será quizás porque no encuentra aun su inmediata aplicación. Pero, debo decir, que el concepto de función es el tema más importante que debe tenerse en cuenta con la mayor paciencia y el mejor espíritu de imaginación e intuición. Voy a partir de la definición dada en 3.10.1, para después ir formalizando dichas funciones.

En 3.10.1 definimos: f es una función de A en B, si a todo elemento $x \in A$ le corresponde un único $y \in B$, tal que, $y = f(x)$.

ACLARACIONES:

1. El conjunto de **PARTIDA** A, puede ser de diversa naturaleza: numérica o no numérico.
   Si es numérico, pueden ser: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ o un subconjunto de éstos.
   Si no es numérico, pueden ser: colores, gustos, sabores o cualquier cualidad, etc.
2. El conjunto de **LLEGADA** B, igualmente puede ser un conjunto numérico o no numérico.
3. Los elementos del **GRAFO** de f son PARES ORDENADOS (x, y) donde la 1ª componente "x" es un elemento del conjunto de partida y la 2ª componente "y" es un elemento del conjunto de llegada.
4. La segunda componente "y" es el resultado de alguna operación que se hace con cada elemento del conjunto de partida (sumar, multiplicar, inclusión, ordenar, etc), por eso decimos que "y" es imagen de algún elemento $x \in A$ y denotamos $y = f(x)$ para indicar que "y" es función de "x" mediante f.

3.10.4.2

Ejemplos:

1. Si el conjunto de PARTIDA es $A = \{P/P$ es una proposición$\}$ y el conjunto de llegada es $B = \{0,1\}$, podemos definir la siguiente función:

$$f(P)=\begin{cases} 0\text{ , si } P \text{ es FALSO} \\ 1\text{ , si } P \text{ es VERDADERO} \end{cases}$$

2. Si el conjunto de Partida es $I\!R^4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)/x_i \text{ es la nota de un curso}\}$ y el conjunto de llegada es $I\!R$, definimos la siguiente función:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$$

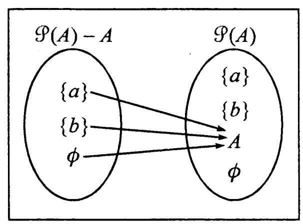
que es el promedio obtenido por un estudiante matriculado en cuatro cursos.

3. Si el conjunto de partida es $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y el conjunto de llegada es $\mathbb{Z}$, podemos definir las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \xrightarrow{\;+\;} \mathbb{Z} & \qquad \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \xrightarrow{\;\bullet\;} \mathbb{Z} & \qquad h:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a,b) \longmapsto a+b & \qquad (a,b) \longmapsto a\cdot b & \qquad (a,b) \longmapsto a-b \\ & & \qquad h(a,b)=a-b\,. \end{array}$$

4. Sea $A=\{a,b\}$, si el conjunto de partida es $\mathcal{P}(A)-A$ y el conjunto de llegada $\mathcal{P}(A)$, definimos la siguiente función:

$Gr(f)=\{(X,Y)/X \subsetneq Y\}$ cuyo diagrama es:



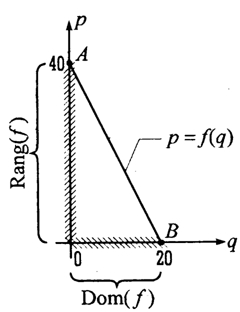
Donde: $Dom(f)=\{\{a\},\{b\},\phi\}=\mathcal{P}(A)-A$

$Rang(f)=\{A\}\subset\mathcal{P}(A)$

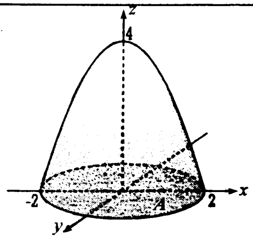
Por extensión $Gr(f)=\{(\{a\},A),(\{b\},A),(\phi,A)\}$

5. Sea $A=\{q\in I\!R\ ,\ 0\le q\le 20\}$ el conjunto de partida y $I\!R$ el conjunto de llegada, definimos la función $f:A\longrightarrow I\!R$ del siguiente modo $p=f(q)$, donde $f(q)=40-2q$.
Si p expresa el precio por unidad de un artículo y q la cantidad de artículos que se puede comprar por cada precio p, entonces f se llama **FUNCIÓN DE DEMANDA** de un consumidor.

La gráfica de f es el segmento de recta $\overline{AB}$.



6



$A = \{(x,y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

$A \subset I\!R^2$, $B = I\!R^2$

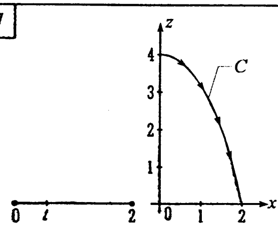
Definimos: $f : A \longrightarrow I\!R$

por $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

Dominio de f es A.

Rango de f es $[0,4]$

7



Sea $f : [0,2] \longrightarrow I\!R^2$

definido por $f(t) = (t, 4 - t^2)$

Dominio de f es: $[0,2]$

El rango de f es la **TRAZA** de f.

TRAZA de $f = \{(t, f(t)) : t \in [0,2]\}$

$= curva\ C$

8

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, Si\ \ i \neq j \\ 1.\,, Si\ \ i = j \end{cases}$$

se llama función **DELTA DE KRONECKER.**

$\Uparrow$

muy usual en matemática.

9. Si el conjunto de partida es $I\!R^n$ **y el conjunto de llegada es** $I\!R$ definimos las funciones $\bar{x} = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ y $s^2 = g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ del siguiente modo:

$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$ $\Leftarrow$ media aritmética muestral.

$s^2 = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$ $\Leftarrow$ **VARIANZA** muestral.

10. Si el conjunto de partida es $I\!N^+$ y el conjunto de llegada es $I\!R$, se define la función $\begin{array}{l} a : N \longrightarrow I\!R \\ \quad n \longrightarrow a_n \end{array}$ que asocia cada número $n \in N^+$ un único número real a_n llamado "**SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES**".

<u>Ejemplos</u>: $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ o $f(n) = \frac{1}{n}$, $n \in N^+$

$(b_n) = \left(\frac{n}{n+2}\right)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \ldots\right)$ o $g(n) = \frac{n}{n+2}$, $n \in N^+$

3.10.5 EJEMPLOS DE GRAFOS Y GRÁFICAS DE UNA FUNCIÓN.

1

Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{m, n, p, q, r\}$

Definimos la función $f : A \longrightarrow B$ del siguiente modo.

$$a \xmapsto{f} m$$
$$b \xmapsto{f} n$$
$$c \xmapsto{f} p$$

El grafo de f es $Gr(f) = \{(a,m), (b,n), (c,p)\}$.

El $Gr(f)$ no se puede representar gráficamente.

2

Sea la función: $f : [1,2] \longrightarrow [-1,1]$

definido por $f(x) = 3 - 2x$.

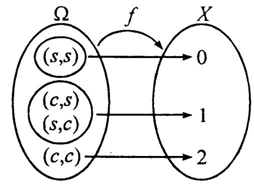
El grafo de f es: $Gr(f) = \{(x, 3-2x) / x \in [1,2]\}$

La gráfica de f es un segmento de recta en el plano bidimencional.

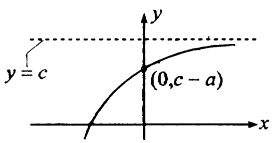
3. Si usted tira, una sóla vez, dos monedas obtendrá como resultado el siguiente conjúnto:
$\Omega = \{(c,c),(c,s),(s,c),(s,s)\}$ c: cara, s: sello

Si definimos la variable X: número de caras, tendremos que: $X = 0,1,2$.

Definimos la función $f : \Omega \longrightarrow X$ según el siguiente diagrama.



4.

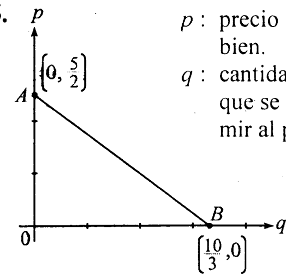


La curva de aprendizaje es la gráfica de la función.

$$f : I\!R \longrightarrow \,]-\infty, c[$$

definido por $f(x) = c - e^{-kx}$ c y k son constantes positivas.

5.

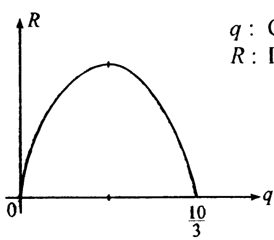


p : precio unitario de un bien.
q : cantidad de un bien que se puede consumir al precio p.

El segmento $\overline{AB}$ es la gráfica de la función demanda.

$$p = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}q \quad , \quad 0 \le q \le \frac{10}{3}$$

6.

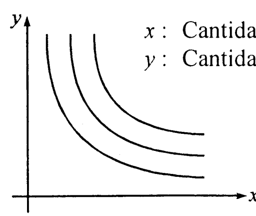


q : Cantidad
R : Ingreso

Este arco de parábola, es la gráfica de la función ingreso.

$$R = p \cdot q \quad , \quad 0 \le q \le \frac{10}{3}$$
$$= \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4}q\right)q$$
$$= \frac{5}{2}q - \frac{3}{4}q^2$$

7.



x : Cantidad de un bien A.
y : Cantidad de un bien B.

Cada uno de estas curvas son las gráficas de las funciones de indiferencias de un consumidor que consume dos bienes: A (papa) y B (camote).

TEOREMA

Sean A y B dos conjuntos no vacios. Si $f : A \longrightarrow B$ es una función o aplicación de A en B, entonces el GRAFO de f, es una relación de A en B que cumple las siguientes propiedades:

i) $Dom(Gr(f)) = A$

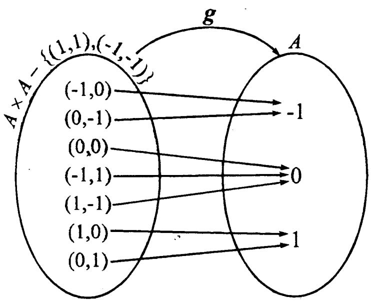
ii) $(x,y) \in Gr(f) \;\wedge\; (x,z) \in Gr(f) \;\Rightarrow\; y = z$

Recíprocamente, si R es una relación de A en B que cumple las propiedades *i*) y *ii*), entonces existe una función o aplicación $f : A \longrightarrow B$, tal que $Gr(f) = R$.

<u>Ejemplo</u>: En el siguiente diagrama se tiene:

i) $Dom(Gr(g)) = A \times A - \{(1,1),(-1,-1)\}$

ii) Como, $g(x,y) = x + y$, entonces:



$$g(-1,0) = -1 + 0 = -1 \iff ((-1,0),-1) \in Gr(g)$$
$$g(0,-1) = 0 + (-1) = -1 \iff ((0,-1),-1) \in Gr(g)$$
$$g(0,0) = 0 + 0 = 0 \iff ((0,0),0) \in Gr(g)$$
$$g(-1,1) = -1 + 1 = 0 \iff ((-1,1),0) \in Gr(g)$$
$$g(1,-1) = 1 + (-1) = 0 \iff ((1,-1),0) \in Gr(g)$$
$$g(1,0) = 1 + 0 = 1 \iff ((1,0),1) \in Gr(g)$$
$$g(0,1) = 0 + 1 = 1 \iff ((0,1),1) \in Gr(g)$$

3.10.6 IGUALDAD DE FUNCIONES

Sean f y g funciones de A en B, decimos que f y g son iguales si, y sólo si

$$\boxed{g(x) = g(x) \quad , \quad \forall\, x \in A}$$

<u>Ejemplo</u>: sean $f(x) = \sqrt{2-x} \quad , \quad \forall\, x \in A =]-\infty, 2]$

$g(x) = (2-x)^{1/2} \quad , \quad \forall\, x \leq 2$

$h(x) = \sqrt{2-x} \quad , \quad x \in]-\infty, 0]$

se tienen: a) $f(x) = g(x)$

b) $f(x) \neq h(x)$

3.10.7 FUNCION RESTRINGIDA

Sea la función $f : A \longrightarrow B$, definida por $y = f(x)$. Si definimos la función $g : E \longrightarrow B$, $E \subsetneq A$ de tal modo que $g(x) = f(x)$ $\forall\, x \in E$; decimos que **g es la restricción de f al conjunto E**. La restricción de f al conjunto E se denota por $f\big|_E$.

<u>Ejemplos</u>:

1) Sean los conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{0, 1, 4\}$, $E = \{0, 1, 2\} \subset A$ y sea la función $f : A \longrightarrow B$, definido por $f(x) = x^2$, $\forall\, x \in A$.

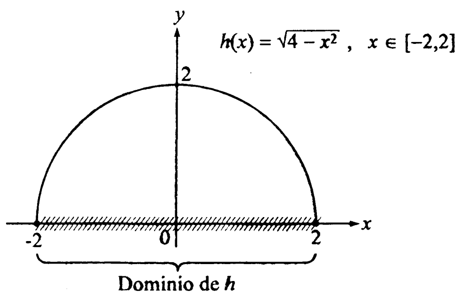
   Definimos la función $g : E \longrightarrow B$, tal que $g(x) = f(x) = x^2$, $\forall\, x \in E$.

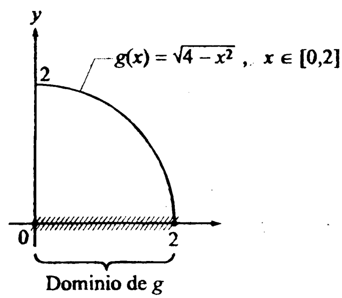
   Decimos que g es la restricción de f al conjunto E.

2) Sea la función $h : [-2, 2] \longrightarrow [0, 2]$, definido por $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

   La función $g : [0, 2] \longrightarrow [0, 2]$ definido por $g(x) = h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es la restricción de $h(x)$ al conjunto $[0, 2]$.

   Ver sus correspondientes graficas:





Nota:
Restringir funciones tiene una gran importancia para obtener funciones inyectivas e inversas de funciones. También para definir funciones implícitas.

Definición: Si $f : A \longrightarrow B$ tiene una restricción $g : E \longrightarrow B$, $E \subset A$ decimos que f es una extensión de $g : E \longrightarrow B$ al conjunto A.

En el ejemplo 1 : f es una extensión de $g : E \longrightarrow B$ al conjunto A

En el ejemplo 2 : h es una extensión de $g : [0, 2] \longrightarrow [0, 2]$ al conjunto $[-2, 2]$.

3.11 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES (APLICACIONES)

3.11.1 DEFINICIÓN

Sean las aplicaciones $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ tales que para cada $x \in A$ la aplicación f le hace corresponder $f(x) \in B$ y para $f(x) \in B$ la aplicación g le hace corresponder $g(f(x)) \in C$.

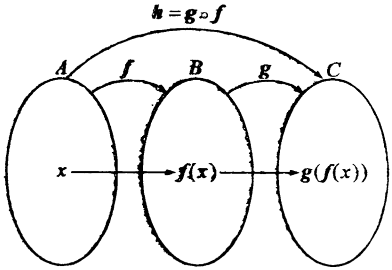
Si para cada $x \in A$ le hacemos corresponder el elemento $g(f(x)) \in C$ se obtiene la aplicación.

$$h: A \longrightarrow C$$

que recibe el nombre de aplicación o función **COMPUESTA** de f y g, y se denota con $g \circ f$.

Así queda definida la aplicación:

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \longrightarrow C \\ x &\longrightarrow (g \circ f)(x) \end{aligned}$$



donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

<u>Ejemplo</u>:

Sean las aplicaciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$, tal que:

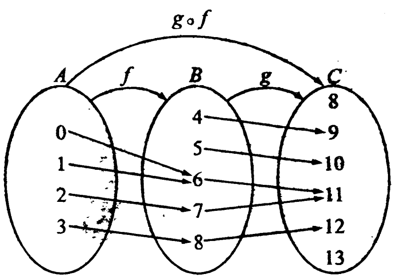
$$Gr(f) = \{(0,6), (1,6), (2,7), (3,8)\}$$

$$Gr(g) = \{(4,9), (5,10), (6,11), (7,11), (8,12)\}$$

$$Gr(g \circ f) = \{(0,11), (1,11), (2,11), (3,12)\}$$

se cumple la definición de FUNCION COMPUESTA de f y g:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(0) &= g(f(0)) = g(6) = 11 \\ (g \circ f)(1) &= g(f(1)) = g(6) = 11 \\ (g \circ f)(2) &= g(f(2)) = g(7) = 11 \\ (g \circ f)(3) &= g(f(3)) = g(8) = 12 \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (g \circ f)(0) &= 11 \leftrightarrow (0,11) \in Gr(g \circ f) \\ (g \circ f)(1) &= 11 \leftrightarrow (1,11) \in Gr(g \circ f) \\ (g \circ f)(2) &= 11 \leftrightarrow (2,11) \in Gr(g \circ f) \\ (g \circ f)(3) &= 12 \leftrightarrow (3,12) \in Gr(g \circ f) \end{aligned} \right.$$



NOTACIONES:

1) La notación $g \circ f$ se lee "f **compuesto con** g"
o "**función compuesta de** f **y** g"

2) La notación $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ se le "f **compuesta con** g **aplicado** en x **es igual a** g **aplicado en** f **de** x".

3) Si denotamos **cada función** por una **FLECHA**, entonces la **composición de** dos **o más funciones** se **denotan por una sucesión de flechas**.

Por ejemplo:

a) $g \circ f$ represent**ado por flechas será**:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

o también por

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

b)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rrr, bend right, "h \circ g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

c)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^{-1} \circ f"] & B \arrow[d, "f^{-1}"] \\ B \arrow[u, "f^{-1}"] \arrow[ur, "f \circ f^{-1}"'] & A \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

3.11.2 PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES:

P$_1$) Sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$

Se cumple: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ ... (propiedad asociativa)

P$_2$) En general: $f \circ g \neq g \circ f$ .... (La composición de funciones no es conmutativa)

Si f, g, h son funciones reales de variable real e $I(x) = x$, $\forall\, x \in I\!R$ es la **FUNCIÓN IDENTIDAD**, se cumplen las siguientes propiedades:

P$_3$) $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$ .... (ley distributiva de la composición respecto de la suma)

P$_4$) $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$ .... (ley distributiva de la composición respecto de la multiplicación)

P$_5$) $f \circ I = I \circ f$, $\forall\, f$

P$_6$) $I^n \circ I^m = I^{mn}$, n , $m \in \mathbb{Z}^+$; donde $I^n(x) = x^n$, $\forall\, x \in I\!R$.

$I^m(x) = x^m$, $\forall\, x \in I\!R$.

P$_7$) $I^n \circ (f+g) = (f+g)^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$

P$_8$) $I^{1/n} \circ I^n = |\ |$, para $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$

valor absoluto

P$_9$) $I^{1/n} \circ I^n = I^n \circ I^{1/n} = I$, para $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}^+$

Demostración de P$_1$:

$(h \circ g) \circ f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

1) Para cada $y \in B$ la aplicación g le hace corresponder $g(y) \in C$ y para cada $g(y) \in C$ la aplicación h le hace corresponder $h(g(y)) \in D$.

2) Si para cada $y \in B$ le hacemos corresponder el elemento $h(g(y)) \in D$ se obtiene la aplicación:

$$h \circ g : B \longrightarrow D$$

donde: $(h \circ g)(y) = h(g(y))$ 2*

3) Por otro lado:

$(h \circ g) \circ f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "(h \circ g) \circ f"] & B \arrow[r, "h \circ g"] & D \end{tikzcd}$$

Para cada $x \in A$ la aplicación f hace corresponder $f(x) = y \in B$ y para cada $f(x) \in B$ la aplicación h o g hace corresponder $[h \circ g](f(x)) \in D$.

4) Si para cada $x \in A$ le hacemos corresponder el elemento $[h \circ g](f(x)) \in D$ se obtiene una aplicación.

$$(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow D$$

$h \circ (g \circ f)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

1) Para cada $x \in A$ la aplicación f le hace corresponder $f(x) \in B$ y para cada $f(x) \in B$ la aplicación g le hace corresponder $g(f(x)) \in C$.

2) Si para cada $x \in A$ le hacemos corresponder el elemento $g\big(f(x)\big) \in C$ se obtiene la aplicación.

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

donde: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 2*

3. De igual manera tenemos:

$h \circ (g \circ f)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[rr, bend left, "h \circ (g \circ f)"] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

Para cada $x \in A$ la aplicación $g \circ f$ le hace corresponder $(g \circ f)(x) \in C$ y para cada $(g \text{ o } f)(x) \in C$ la aplicación h le hace corresponder $h((g \circ f)(x)) \in D$.

4) Si para cada $x \in A$ le hacemos corresponder el elemento $h((g \circ f)(x)) \in D$ se obtiene la aplicación:

$$h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow D$$

donde:

$$\begin{aligned}[(h\circ g)\circ f](x) &= [h\circ g](f(x))\\ &= [h\circ g](y),\ f(x)=y\\ &= h(g(y)) \ \ldots\ldots \text{ Por } 2^*\\ &= h(g(f(x)))\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}[h\circ(g\circ f)](x) &= h((g\circ f)(x))\\ &= h((g(f(x))) \text{ Por}\ldots 2^*\end{aligned}$$

Como podemos apreciar, se cumple: $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

Demostración de P_8

Si consideramos $I^{2k}(x) = x^{2k}$, $x\in I\!R$, $k\in\mathbb{Z}^+$

y $I^{\frac{1}{2}k}(x) = x^{\frac{1}{2k}}$, $x\geq 0$, $k\in\mathbb{Z}^+$

entonces:

$$\begin{aligned}\left(I^{\frac{1}{2k}}\circ I^{2k}\right)(x) &= I^{\frac{1}{2k}}(I^{2k}(x))\\ &= I^{\frac{1}{2k}}(x^{2k})\\ &= (x^{2k})^{\frac{1}{2k}}\\ &= \left[[x^{2k}]^{\frac{1}{k}}\right]^{1/2} = \sqrt{x^2} = |x|\end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01. Sean A y B los conjuntos $\{1,2,3,4\}$ y $\{5,6,7\}$ respectivamente.

a) Definir una función f, con $Dom(f)=A$ y $Rang(f)=B$

b) ¿Existe alguna función cuyo dominio sea B y cuyo rango sea A?

02. Sean los conjuntos $A=C=\{-1,0,1,2\}$ y $B=\{-1,0,1\}$. R una relación de A en B y S una relación de B en C, dadas por: $R=\{(x,y)/(x+y)\in A\}$, $S=\{(x,y)/y^2=x\}$

Determinar por extensión: a) $S\circ R$

b) $(rang(S\circ R))\cap(dom\ R)$

03. Sean $A=\{x\in I\!N/x \text{ no es mayor que } 12\}$ y $f:A\longrightarrow I\!N$, una función tal que $f(x)=$ máximo del conjunto $\{1,x\}$

[Así por ejemplo: $f(2)=$ máximo del conjunto $\{1,2\}$ es 2]

Se define en A la relación R mediante: $(x,y)\in R \Longleftrightarrow f(y)=3f(x)$

Determinar todos los pares de R.

04. Demostrar que si $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow A$ son funciones tales que $(g \circ f)(x) = x$, $\forall\, x \in A$, entonces f es inyectiva y g es suryectiva.

05. Sean $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $c \in B$ fijo. Una función $f: A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = c$, $\forall\, x \in A$ se denomina "función constante". ¿Una función constante puede ser inyectiva y suryectiva?

06. Sea $A = \{6,5,4,3,2,0\}$. Definimos en A una relación R mediante:

$(x,y) \in R \Longleftrightarrow \frac{x+y}{2} \in A \wedge x \neq y$ y sea $S = \{(x+1,y) \in A \times A \,/\, (y+1,x) \in S\}$

Determinar por extensión el conjunto $R \,\Delta\, S$

07. Sea R una relación en $\mathbb{Z}$ definida por: $x \,R\, y \Longleftrightarrow x \equiv y$ (mód 5)

¿es R una relación de equivalencia ?

08. Dada una relación R de un conjunto A en un conjunto B, se define una relación $\overline{R}$ de B en A, del modo siguiente: $(y,x) \in \overline{R} \Longleftrightarrow (x,y) \notin R$:

Según esto:

a) Si R y S son dos relaciones de A en B , demostrar que: $(\overline{R-S})^{-1} = (\overline{R})^{-1} \cup S$

b) Si $A = \{-1,0,1,2\}$, $B = \{-2,0,-1,1\}$ y consideramos las relaciones binarias siguientes:

$R = \{(x,y) \in A \times B : xy$ es un número par positivo$\}$ y

$S = \{(x,y) \in B \times A : x + y = 0\}$

Determinar: $\overline{A \times A - S \circ R}$.

09. Sean R y S relaciones de A en B, probar que $\left(Rang\ R \,\Delta\, Rang\ S\right) \subset Rang(R \,\Delta\, S)$

10. Dado los conjuntos $A = \{0,1,2\}$ y $B = \{2,3,5,7\}$, se define una función f de A en B, tal que $f(2x+3) = 4x+9$. Hallar $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$

11. Sea R una relación en $I\!N$, definida por $R = \{(x,y) \in I\!N \times I\!N \,/\, 3x + 4y \leq 12\}$, determinar el conjunto $\mathcal{P}(Dom\ R \,\Delta\, Rang\ R)$.

12. Sea f una función definida en $I\!R$ por la regla: $f(x) = \frac{3x-2a}{2}$.

Si $f^{-1}(2) = a - b$ y $f^{-1}(3) = a + b$. Hallar $f^{-1}(9b - a)$.

13. Sea la relación $S = \{ (x, y) \in I\!N \times I\!N \,/\, x^2 - y^2 > 4 \}$

a) Determinar el dominio y rango de S.

b) ¿Es S reflexiva? ¿Es S simétrica? ¿Es S transitiva?

c) ¿S es una función en el $Dom(S)$?

14. Sea $I\!N^+$ el conjunto de los números naturales no nulos y sea R una relación en $I\!N^+ \times I\!N^+$ definida por: $(r, s)\, R\, (t, \mu)$ si, y sólo si $r + \mu = s + t$.

Demostrar

a) $(r, s)\, R\, (r, s)$, para todo $(r, s) \in I\!N^+ \times I\!N^+$

b) $(r, s)\, R\, (t, \mu)$, implica $(t, \mu)\, R\, (r, s)$

c) $(r, s)\, R\, (t, \mu)$ y $(t, \mu)\, R\, (v, w)$ implica $(r, s)\, R\, (v, w)$

d) Hallar cinco pares ordenados (a, b) de $I\!N^+ \times I\!N^+$ tales que $(a,b)\, R\, (1,6)$.

15. Sean $U = \{ a, b, c \}$ y $A = \mathcal{P}(U)$. Definir en forma explícita una función $f : A \longrightarrow I\!N$. Dar la forma general de $f(x)$, $\forall\, x \in A$.

16. Probar los siguientes teoremas:

T_1. Si R es una relación de equivalencia en A y si $x \equiv y (mód\ R)$, entonces $[x] = [y]$.

T_2. Toda relación de equivalencia R en A, determina una partición de A cuyos elementos son las clases de equivalencia que forman el conjunto cociente A/R.

T_3. Toda partición $\{ A_i \}_{i \in I}$ de un conjunto A determina una relación de equivalencia en A, de modo tal que si A_i es un elemento de la partición $x \equiv y (\text{mód } R)$ $s.s.s$, $x \in A_i \wedge y \in A_i$, en otras palabras: dos elementos de A son equivalentes si, y sólo si ambos están en el mismo conjunto de partición.

3.12 FUNCION INYECTIVA, SURYECTIVA Y BIYECTIVA

3.12.1 FUNCION INYECTIVA

Definicion:

Sean los conjuntos A y B y $f: A \longrightarrow B$ una función de A en B, decimos que f es una **FUNCIÓN INYECTIVA** si, y sólo si, para todo $a \in A$ y todo $b \in A$,

1. $\boxed{\underbrace{f(a)=f(b)}_{p} \ \underbrace{\text{implica}}_{\Rightarrow} \ \underbrace{a=b}_{q}}$

o equivalente: sí y sólo si, para todo $a \in A$ y todo $b \in A$,

2. $\boxed{\underbrace{a \neq b}_{\sim q} \ \underbrace{\text{implica}}_{\Rightarrow} \ \underbrace{f(a) \neq f(b)}_{\sim p}}$

Observaciones:

1) Cuando se trata de demostrar la inyectividad de una función, tener sumo cuidado en aplicar las definiciones ① y ②.

Por ejemplo, si Ud. afirma que: $a=b \Rightarrow f(a)=f(b), \forall\ a,b \in A$ ya está totalmente mal porque la definición no es así.

Igualmente, si Ud. afirma que $f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b$, también está muy mal. Se debe respetar el sentido de la implicación, caso contrario se estará procediendo inadecuadamente.

Pues, si la condicional $p \to q$ es verdadero, no necesariamente su recíproco $q \to p$ es verdadero.

2) Interpretemos el significado de la definición de función inyectiva:

i) La definición ① indica: si en el grafo de la función f existen dos parejas ordenadas, digamos: $(\bullet\,, m), (\bullet\,, m)$ cuyas segundas componentes son iguales, entonces necesariamente las primeras componentes deben ser iguales, caso contrario f no es inyectiva.

<u>Ejemplo</u>:

$Gr(f) = \{(1,2),(3,\overset{\downarrow}{5}),(8,\overset{\downarrow}{5}),(4,3)\}$; **NO** es inyectiva, porque en las parejas ordenadas (3,5), (8,5) las segundas componentes son iguales, pero las primeras componentes son diferentes, contradice a la definición ①.

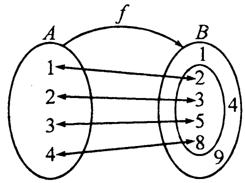
ii) Otra forma de interpretar, lo dicho en (*i*) es:

f es una función inyectiva si, y sólo si a cada elemento del rango de f le corresponde un único elemento del dominio de f.

<u>Ejemplo</u>:

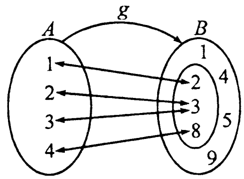
$Gr(f) = \{(1,2),(2,3),(3,5),(4,8)\}$

f es inyectiva



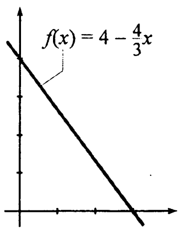
$Gr(g) = \{(1,2),(2,3),(3,3),(4,8)\}$

g no es inyectiva, porque a $3 \in Rang(g)$ corresponde dos pre imágenes 2 y 3.

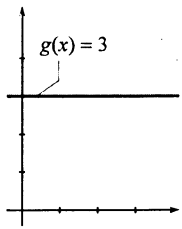


iii) Si f es una función real de variable real y su gráfica es una recta o curva , entonces f es inyectiva si, y sólo si, cualquier recta paralela al eje x; corta en un sólo punto a la gráfica de f.

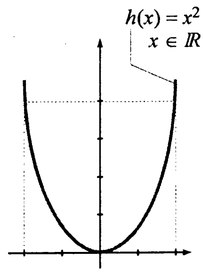
<u>Ejemplos</u>:



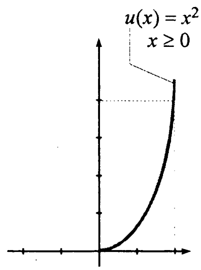
f es inyectiva



g **NO** es inyectiva



h **NO** es inyectiva



u es inyectiva

iv) **CASO ESPECIAL.** Si f es una función real de variable real y está expresado como la unión de dos o más funciones (función definida por trozos).

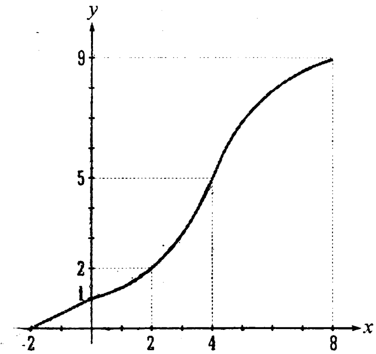
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \ , \ x \in Dom(f_1) \\ f_2(x) \ , \ x \in Dom(f_2) \\ f_3(x) \ , \ x \in Dom(f_3) \end{cases}$$

Diremos que f es inyectiva sí, y sólo si $\begin{cases} 1) \ cada \ f_i \text{ es } \textbf{INYECTIVA} \\ 2) \ Rang\,(f_1) \cap Rang\,(f_2) = \phi \end{cases}$

$$Rang(f_1) \cap Rang(f_3) = \phi$$

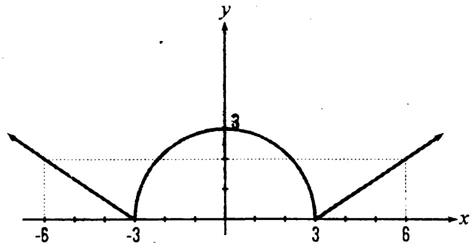
$$Rang(f_2) \cap Rang(f_3) = \phi$$

Ejemplos:



$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+1 & , \ x<0 \\ \frac{x^2}{4}+1 & , \ 0\le x<4 \\ 2\sqrt{x-4}+5 & , \ 4\le x\le 8 \end{cases}$$

f es inyectiva.



$$g\ (x)=\begin{cases} -\frac{2}{3}x-2, & x<-3 \\ \sqrt{9-x^2} & , \ -3\le x\le 3 \\ \frac{2}{3}x-2 & , \ x>3 \end{cases}$$

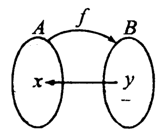
g **NO ES INYECTIVA**

3.12.2 FUNCIÓN SURYECTIVA

DEFINICIÓN 1

Decimos que la función $f: A \longrightarrow B$ es **SURYECTIVA** si, y sólo si,

$\forall\ y \in B\ ,\ \exists\ x \in A = Dom(f)$, tal que, $y = f(x)$.



que es equivalente a la definición 2.

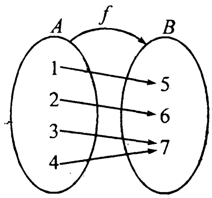
DEFINICIÓN 2

La función $f: A \longrightarrow B$ es **SURYECTIVA** si, y sólo si, $f(A) = B$

conjunto de llegada

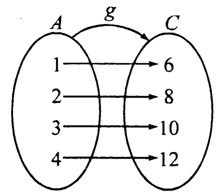
Según la definición 1 ó 2, el conjunto de llegada B coincide con el rango de la función f.

Ejemplos:

1)


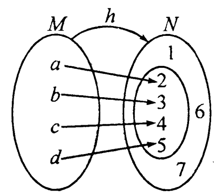
i) f es suryectiva porque $f(A)=B$

ii) f no es inyectiva.

2)


i) g es suryectiva, por que $g(A)=C$

ii) g es inyectiva.

3)


i) h no es suryectiva, pues $h(M)=\{2,3,4,5\}\subset N$

ii) h es inyectiva.

4) Sea $f:\langle -3,4]\rightarrow[-12,15\rangle$ definida por $f(x)=-3x+1$
En este caso, $f(x)$ **NO ES SURYECTIVA**, porque:
$f(\langle -3,4])=[-11,10\rangle\neq[-12,15\rangle$ = conjunto de llegada.

5) Sea $g:[-3,3]\rightarrow[0,3]$, definida por $g(x)=\sqrt{9-x^2}$
En este caso, $g(x)$ es **SURYECTIVA**, porque:
$g([-3,3])=Rang(g)=[0,3]$ = conjunto de llegada.

6) Sea $h: IR-\{2,-2\}\rightarrow IR$, definido por $h(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ **NO** es **SURYECTIVA** porque el rango de h es $y\in\langle-\infty,0]\cup]1,+\infty\rangle$ y no coincide con $IR=$ conjunto de llegada.

3.12.3 FUNCION BIYECTIVA

Definición.-

- Se dice que la función $f:A\longrightarrow B$ es **BIYECTIVA** sí, y sólo si f es **INYECTIVA** y **SURYECTIVA.**

3.12.4 PROBLEMAS TEÓRICOS

PROBLEMA 1 Sean las aplicaciones $f:A\longrightarrow B$ y $g:B\longrightarrow C$
Probar que:

a) si f y g son inyectivas, entonces $g\circ f$ es una función inyectiva.
b) si $g\circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
c) si f y g son suryectivas, entonces $g\circ f$ es una Suryección.
d) si $g\circ f$ es suryectiva entonces g es una Suryección.

Prueba de a) Fíjese como se aplica la definición de **FUNCION INYECTIVA.**

Supongamos que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$, debo probar que esta igualdad implica $a = b \quad \forall\, a,b \in A$ para afirmar que $g \circ f$ es inyectiva.

Veamos:

1) Supongamos que $\forall\, a,b$ en A se cumple: $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$
2) Por definición de función compuesta se tiene: $g(f(a)) = g(f(b))$
3) Como g es inyectiva, entonces: $f(a) = f(b)\,,\ \forall\ f(a)\,,\, f(b) \in B$
4) Como f es inyectiva, entonces: $a = b \quad , \quad \forall\, a,b$ en A
5) Por 1 y 4, hemos inducido que:

   si $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ implica $a = b \ ,\ \forall\, a,b \in A$

   Por tanto: $g \circ f$ es **INYECTIVA.**

Prueba de b)

A partir del supuesto: $f(a) = f(b)$ debo probar que $a = b \ ,\ \forall\, a,b \in A$

Veamos:

1. Supongamos que $f(a) = f(b)\,,\ \forall\, a,b \in A$
2. Aplicar "g" en ambos miembros:

   $$g(f(a)) = g(f(b))$$

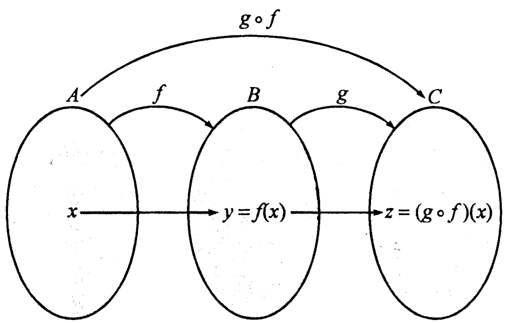
3. que es: $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$, por definición de función compuesta.
4. Como $g \circ f$ es **INYECTIVA,** se tiene $a = b \ ,\ \forall\, a,b \in A$
5. Por 1 y 4 hemos hecho la siguiente implicación:

   si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\,, \forall\, a,b \in A$. Por tanto: f es **INYECTIVA.**

Prueba de c) se tiene:

$\forall\, z \in C$, debo probar que

$\exists\, x \in A$, tal que, $z = (g \circ f)(x)$



Veamos:

1. Por hipótesis, se tiene que f es **SURYECTIVA**, entonces:
   $\forall\, y \in B\,, \exists\, x \in A$, tal que $y = f(x)$
2. Por hipótesis, se tiene que g es **SURYECTIVA**, entonces:
   "$\forall\, z \in C\;,\; \underline{\underline{\exists\, y \in B}}$, tal que, $\underline{z = g(y)}$"
3. Por 1 se tiene que $y = f(x) \quad \forall\, x \in A = Dom(f)$, pues f es aplicación de A en B.
4. Sustituir 3. en 2:
   "$\forall\, z \in C\,, \exists\, \underline{\underline{y = f(x) \in B}}$, tal que $\underline{z = g(f(x))}$, $\forall\, x \in A$"
5. Por definición de función compuesta: $z = (g \circ f)(x)$
6. La proposición del paso 4. se cumple $\forall\, x \in A$, en particular $\exists\, x \in A$ que cumple:
   "$\forall\, z \in C\,, \exists\, x \in A$, tal que $z = (g \circ f)(x)$".

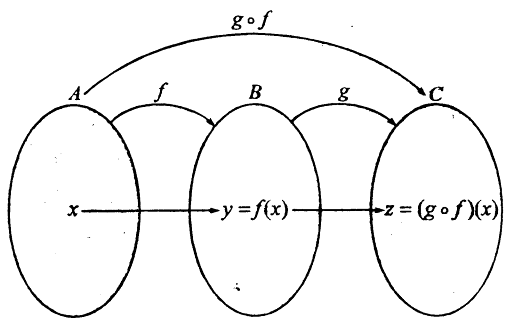
   Lo cual prueba que $g \circ f$ es suryectiva.

Prueba de d)

1. Por hipótesis se tiene que $g \circ f$ es Suryectiva.

   Por tanto, se cumple:
   "$\forall\, z \in C\;,\; \exists\, x \in A$, tal que,
   $z = (g \circ f)(x)$"

   Debo probar que:
   "$\forall\, z \in C\;,\; \exists\, y \in B$, tal que,
   $z = g(y)$"



Veamos:

2. Se cumple: $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, luego la proposición en 1 será:

   "$\forall\, z \in C\;,\; \exists\, x \in A$, tal que $z = g(f(x))$".

3. Como f es una aplicación de A en B se cumple que:

   P : "$\forall\, x \in A\;,\; \exists!\, y \in B$ tal que $y = f(x)$"

4. La proposición P dado en 3 se cumple $\forall\, x \in A$, en particular se cumple para $\underbrace{\text{algún } x \in A}_{\exists\, x \in A}$

   Es decir P_1: "$\exists\, x \in A, \exists\, y \in B$, tal que $\underline{y = f(x)}$" es otra proposición deducido de P que sigue siendo verdadera.

5. Al hacer sustituciones de 4 en 2 obtendremos la nueva proposición:

   "$\forall\, z \in C\ ,\ \exists\, x \in A\ ,\ \exists\, y \in B$, tal que $\underline{z = g(y)}$" $\vee$ "$\forall\, z \in C\ ,\ \exists\, y \in B \,/\, z = g(y)$"

   Lo cual prueba que g es suryectiva.

PROBLEMA 2 Construir todas las inyecciones de $\{1,2\}$ en $\{1,2,3\}$ y todas las inyecciones de $\{1,2,3\}$ en $\{1,2\}$.

Solución:

a) las inyecciones de $\{1,2\}$ en $\{1,2,3\}$ son:

$1 \longrightarrow 1$	$1 \longrightarrow 2$	$1 \longrightarrow 1$	$1 \longrightarrow 3$	$1 \longrightarrow 2$	$1 \longrightarrow 3$
$2 \longrightarrow 2$	$2 \longrightarrow 1$	$2 \longrightarrow 3$	$2 \longrightarrow 1$	$2 \longrightarrow 3$	$2 \longrightarrow 2$

En total hay: $2! + 2! + 2! = 6$

b) Las inyecciones de $\{1,2,3\}$ en $\{1,2\}$ que no son aplicaciones de $\{1,2,3\}$ en $\{1,2\}$, son:

$1 \longrightarrow 1$	$1 \longrightarrow 2$	$1 \longrightarrow 1$	$1 \longrightarrow 2$	$2 \longrightarrow 1$	$2 \longrightarrow 2$
$2 \longrightarrow 2$	$2 \longrightarrow 1$	$3 \longrightarrow 2$	$3 \longrightarrow 1$	$3 \longrightarrow 2$	$3 \longrightarrow 1$
3	3	2	2	1	1

Son:
$6 = 2! + 2! + 2!$

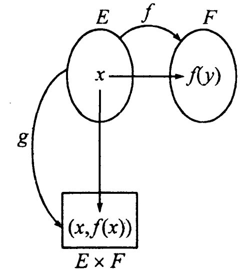
PROBLEMA 3 Sea la aplicación $f : E \longrightarrow F$, entonces la aplicación $x \longmapsto (x, f(x))$ es una inyección de E en $E \times F$.

Prueba:

Llamemos g a la aplicación $g :\ E \longrightarrow E \times F$

$$x \longmapsto (x, f(x)) = g(x)$$

Ilustrando en un diagrama es:



2. Se pide que la aplicación $g(x) = (x, f(x))$ de E en $E \times F$ es inyectiva.
   Para ello, a partir del supuesto: $g(a) = g(b)$ debo probar que $a = b$, $\forall\ a, b \in E$

Veamos:

3. Supongamos que $\forall\ a \in E$ y $\forall\ b \in F$, se cumple:

$$g(a) = g(b), \text{ donde } \begin{cases} g(a) = (a, f(a)) \\ g(b) = (b, f(b)) \end{cases}$$

4. $\Rightarrow \quad (a, f(a)) = (b, f(b))$

5. $\Rightarrow \quad a = b \ \wedge \ f(a) = f(b)$ .... por igualdad de pares ordenados y f es una aplicación de E en F .

6. Por 3. y 5. hemos probado que la condicional:
   Si $g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$, $\forall\ a, b \in E$ es **VERDADERO**.
   Es decir: $g(a) = g(b)$ implica $a = b$, $\forall\ a, b \in E$

7. $\therefore\ g$ es inyectiva.

PROBLEMA 4 La aplicación que a cada subconjunto $A \subset E$, le hace corresponder el subconjunto $\mathcal{C}_E(A)$ es una biyección de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$.

Prueba:

1. Según el enunciado del problema, podemos llamar f a la aplicación.

$$\begin{aligned} f:\ \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\longmapsto \mathcal{C}_E(A) = f(A) \end{aligned}$$

   Para afirmar que f es **BIYECTIVA**, debo probar que f es inyectiva y suryectiva.

2. ¿f es **INYECTIVA**?

   Suponer que $f(A) = f(B)$, debo probar que $A = B$, $\forall\ A, B$ subconjunto de E.

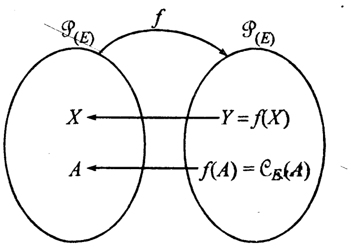
   Veamos:

   Según la definición de la aplicación f, sean $\begin{cases} f(A) = \mathcal{C}_E(A) \\ f(B) = \mathcal{C}_E(B) \end{cases}$

3. Si suponemos que: $f(A) = f(B)$, $\forall\ A, B$ subconjuntos de E.
4. Entonces: $\mathcal{C}_E(A) = \mathcal{C}_E(B)$
5. Aplicar Complemento: $\mathcal{C}_E\left(\mathcal{C}_E(A)\right) = \mathcal{C}_E\left(\mathcal{C}_E(B)\right)$
6. $\Rightarrow$ $A = B$ .... propiedad de complemento
7. Por 3. y 6. afirmamos que: $f(A) = f(B)$ implica $A = B$; $\forall\ A, B$ subconjuntos de E.
8. ¿f es **SURYECTIVA**?

   Debo probar que: $\forall\ \underbrace{\mathcal{C}_E(A)}_{Y} \in \mathcal{P}(E)$, $\exists\ \underbrace{A}_{X} \in \mathcal{P}(A)$, tal que $\boxed{\underbrace{\mathcal{C}_E(A)}_{Y} = \underbrace{f(A)}_{f(X)}}$

   Veamos:



9. Todo Y perteneciente al conjunto de llegada, tiene la forma:

$$Y = \mathcal{C}_E(A)$$

10. Aplicar complemento $\quad \mathcal{C}_E(Y) = \mathcal{C}_E\left(\mathcal{C}_E(A)\right)$

$$= A$$

11. Aplicar f : $\quad f\left(\mathcal{C}_E(Y)\right) = f(A)$

$$\mathcal{C}_E\left(\mathcal{C}_E(Y)\right) = f(A)$$

$$\underbrace{Y}_{\mathcal{C}_E(A)} = f(A)$$

$$\mathcal{C}_E(A) = f(A)$$

12. Por 9 y 11. hemos deducido que: $\forall \ Y \in \mathcal{P}(E)$, $\exists X \in \mathcal{P}(E) / Y = f(X)$

13. Por tanto, f es suryectiva.

14. por 7. y 13. Concluimos afirmando que la aplicación

$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, definido por $f(A) = \mathcal{C}_E(A)$ es **BIYECTIVA**.

PROBLEMA 5 Probar que la aplicación que $\varphi:(A\times B)\times C \longrightarrow A\times(B\times C)$ definida mediante la igualdad: $\varphi:((x,y),z)=(x,(y,z))$ para todo $((x,y),z)\in(A\times B)\times C$ es una biyección.

Prueba

(1) ¿Es φ inyectiva?

Por probar: si $\varphi(a)=\varphi(b)$ implica $a=b$, $\forall\, a,b\in(A\times B)\times C$ donde a y b, por pertenecer al conjunto $(A\times B)\times C$, tienen la forma $a=((x,y),z)$ y $b=((m,n),p)$, respectivamente.

Veamos:

(2) Supongamos que $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \varphi(a) & = & \varphi(b) \\
\Longleftrightarrow & \varphi(((x,y),z)) & = & \varphi(((m,n),p)) \text{ donde } \begin{cases} \varphi(((x,y),z))=(x,(y,z)) \\ \varphi(((m,n),p))=(m,(n,p)) \end{cases} \\
\Rightarrow & (x,(y,z)) & = & ((m,(n,p)) \\
\Rightarrow & x=m \wedge (y,z) & = & ((n,p)) \\
\Rightarrow & y=n & \wedge & z=p \\
\Rightarrow & [x=m \wedge y=n] & \wedge & z=p \\
\Rightarrow & [(x,y)=(m,n)] & \wedge & z=p
\end{array}$$

(3) $$\Rightarrow \quad \underbrace{((x,y),z)}_{a} = \underbrace{((m,n),p)}_{b}$$

(4) Por (2) y (3) hemos probado que $\varphi(a)=\varphi(b)$ implica $a=b$, $\forall\, a,b\in(A\times B)\times C$.

(5) ¿Es φ suryectiva?

Debo probar que $\forall\, b\in[A\times(B\times C)]$, $\exists\, a\in(A\times B)\times C$, tal que $b=\varphi(a)$.

Veamos:

Se tiene $\varphi:(A\times B)\times C \longrightarrow A\times(B\times C)$

Dado $(x,(y,z))\in A\times(B\times C)$, $x\in A$, $y\in B$, $z\in C$

Encontrar $((a,b),c)) \in (A\times B)\times C \, / \, \varphi((a,b),c) = (x,(y,z))$

Pero $\varphi((a,b),c) = (a,(b,c))$ entonces $\big(a\,,(b\,,c)\big) = \big(x\,,(y\,,z)\big)$

Igualando las parejas ordenadas: $a = x \;\wedge\; [(b\,,c) = (y\,,z)]$

$$a = x \;\wedge\; b = y \;\wedge\; c = z$$

(6) Se ha encontrado $a = x,\;\; b = y,\;\; c = z$ tal que $\varphi((x,y),z) = (x,(y,z))$.
Lo cual prueba que φ es suryectiva.

(7) Por (4) y (6) afirmamos que φ es biyectiva.

PROBLEMA 6 Probar que la aplicación
$\varphi : A\times B \longrightarrow B\times A$ definida por
$\varphi(x,y) = (y,x)\;,\; \forall (x,y)\in A\times B$; es una biyección.

Prueba

Ⓐ ¿Es φ inyectiva?
Debo probar que : $\varphi(a) = \varphi(b)$ implica $a = b \;\; \forall\, a\,,b\in A\times B$

Veamos:

1. Supongamos que $\varphi(a) = \varphi(b)$, donde a y b son elementos del conjunto $A\times B$ y por tanto tienen las formas de pares ordenados, digamos $a = (x,y)\;,\; b = (m,n)$.

2. Por tanto el supuesto: $\varphi(a) \;=\; \varphi(b)$ se expresa como:
$$\varphi((x,y)) \;=\; \varphi((m,n))$$

3. $\Rightarrow$ $(y,x) \;=\; (n,m)$, por definición de la aplicación φ

4. $\Rightarrow$ $y = n \;\wedge\; x = m$

5. $\Rightarrow$ $x = m \;\wedge\; y = n$

Es decir: $\underbrace{(x,y)}_{a} \;=\; \underbrace{(m,n)}_{b}$

6. $\Rightarrow$ $a \;=\; b$

7. Por 2 y 6 se ha probado que $\varphi((x,y)) = \varphi((m,n))$ implica $(x,y) = (m,n)$ para todo $(x,y)\in A\times B$ y $(m,n)\in A\times B$.

8. Por tanto, φ es inyectiva.

(B) ¿ Es φ Suryectiva ?

Se tiene $\quad \varphi : A\times B \longrightarrow B\times A$

$$(x,y)\longmapsto (y,x)$$

Dado $(y,x)\in B\times A$, $y\in B$, $x\in A$ encontrar $\quad (a,b)\in A\times B \,/\, \varphi(a,b)=(y,x)$

9. Pero $\varphi(a,b)=(b,a)$ entonces $\qquad (b,a)=(y,x)$

10. Basta tomar $b=y \quad\wedge\quad a=x$ para afirmar: $\qquad \varphi(x,y)=(y,x)$

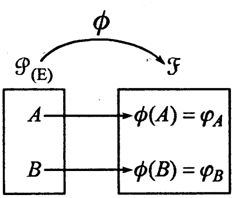
11. Por tanto: Dado $(y,x)\in B\times A$ se ha encontrado $\quad (x,y)\in A\times B \,/\, (y,x)=\varphi(x,y)$
    Lo cual prueba la **SURYECTIVIDAD** de φ .

12. Por 8 y 12 concluimos que φ es **BIYECTIVA**.

PROBLEMA 7 Si denotamos con $\mathfrak{F}$ al conjunto de todas las funciones definidas en el conjunto E y con valores en $\{0,1\}$, o sea $\mathfrak{F}=\{f/f:E\longrightarrow\{0,1\}\}$. Probar que la aplicación $\phi:\mathcal{P}(E)\longrightarrow\mathfrak{F}$ definida mediante la igualdad $\phi(A)=\varphi_A$ para todo $A\in\mathcal{P}(E)$ donde φ_A es la función característica de A, es una biyección.

Prueba:

El diagrama correspondiente a la aplicación ϕ es:



Donde: $\quad A\in\mathcal{P}(E) \iff A\subset E$

$\qquad\qquad B\in\mathcal{P}(E) \iff B\subset E$

Si φ_A es la función característica de A, entonces

$$\varphi_A(x)=\begin{cases} 1\,,\, x\in A \\ 0\,,\, x\in(E-A)\end{cases}$$

Si φ_B es la función característica de B, entonces $\varphi_B(x)=\begin{cases} 1\,,\, x\in B \\ 0\,,\, x\in(E-B)\end{cases}$

(A) ¿Es ϕ inyectiva?

Debo probar que $\phi(A)=\phi(B)$ implica $A=B$, $\forall\, A,B\in\mathcal{P}(E)$.

Veamos:

1. **Supongamos que $\phi(A)=\phi(B)$,** donde $A\in\mathcal{P}(E)$, $B\in\mathcal{P}(E)$

2. **Por definición** de ϕ, se tiene $\begin{cases} a)\ \phi(A)=\varphi_A(x)=\begin{cases}1, \forall x\in A\\ 0, \forall x\in(E-A)\end{cases} \\ b)\ \phi(B)=\varphi_B(x)=\begin{cases}1, \forall x\in B\\ 0, \forall x\in(E-B)\end{cases}\end{cases}$

3. Al retornar al paso 1, tendremos:
$$\underbrace{\phi(A)}=\underbrace{\phi(B)}$$
implica: $\varphi_A(x)=\varphi_B(x)$

4. $\Rightarrow$ $A=B$, $\forall x\in E$

5. Por 1 y 4, concluimos que $\phi(A)=\phi(B)$ implica $A=B$, $\forall A,B\in\mathcal{P}(E)$
Por tanto ϕ es inyectiva.

Probar: $\varphi_A(x)=\varphi_B(x) \iff A=B$, $\forall x\in E$

($\Rightarrow$) si $\varphi_A(x)=\varphi_B(x)$ debo probar $A=B \leftrightarrow A\subset B\wedge B\subset A$

1) Sea $\underline{x\in A} \Rightarrow \varphi_A(x)=1=\varphi_B(x) \Rightarrow \underline{x\in B}$
Por tanto: $A\subset B$.

2) Sea $\underline{x\in B} \Rightarrow \varphi_B(x)=1=\varphi_A(x) \Rightarrow \underline{x\in A}$
Luego: $B\subset A$

3) Por (1) $\wedge$ (2) : $A=B$

($\Leftarrow$) Queda como ejercicio.

Ⓑ ¿Es ϕ Suryectiva?

Se tiene $\phi:\ \mathcal{P}(E)\longrightarrow\mathfrak{F}$
$$X\longmapsto Y=\phi(X)$$

6. Dado $\varphi_A\in\mathfrak{F}$, $A\subset E$ encontrar $X\in\mathcal{P}(E)\,/\,\overbrace{\varphi_A}^{Y}=\phi(X)$ .... (6*)

7. Pero $\phi(X)=\varphi_X$, entonces $\varphi_A=\varphi_X$ .... (7*)

8. **Basta tomar** $X=A$ para cumplirse (7*)

9. **Al sustituirse 8 en 6* se tendrá:** $\varphi_A=\phi(A)$, $A\subset E$ ← está dado
Lo cual prueba la suryectividad de ϕ

10. **Por** 5. y 8. **afirmamos que** ϕ es biyectiva

PROBLEMA 8 Sean $f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow Z$, $h:Z\longrightarrow W$ tres funciones tales que $g\circ f$ y $h\circ g$ **son biyectivas**.

Probar que f, g y h son biyectivas.

Solución:

1. Según la hipótesis y el problema 1, deducimos:

Si $g \circ f$ es biyectiva $\nearrow$ $g \circ f$ es inyectiva $\Rightarrow f$ es inyectiva

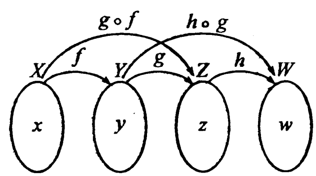
$\searrow$ $g \circ f$ es suryectiva $\Rightarrow$ g es suryectiva $\searrow$

g es biyectiva.

Si $h \circ g$ es biyectiva $\nearrow$ $h \circ g$ es inyectiva $\Rightarrow$ g es inyectiva $\nearrow$

$\searrow$ $h \circ g$ es suryectiva $\Rightarrow$ h es suryectiva

2. Falta probar la **SURYECTIVIDAD** de f.



Debo probar:

$\forall\, y \in Y \;,\; \exists\, x \in X \,/\, y = f(x)$

Veamos:

3. Como g es suryectiva, entonces "$\underline{\forall\, z \in Z}$, $\exists\, y \in Y \,/\, z = g(y)$" : P **(definición de aplicación)**

4. Como $g \circ f$ es **SURYECTIVA**, entonces "$\forall\, m \in Z$, $\underline{\exists\, x \in X}\,/\, m = (g \circ f)(x)$" : q

5. Como la proposición q se cumple $\forall\, m \in Z$, en particular se cumplirá para $m = z$. Así deducimos la proposición

$$q_1 : \text{“}\exists\, z \in Z \;,\; \underline{\exists\, x \in X} \,/\, z = (g \circ f)(x)\text{”}$$

6. Teniendo en cuenta q_1 y p, obtenemos la proposición:

$$\forall\, z \in Z \;,\; \exists\, x \in X /\; g(y) = (g \circ f)(x)$$
$$= g(f(x))$$

7. Como g es inyectiva, entonces: $y = f(x)$

Así obtenemos la proposición: "$\forall\, y \in Y \;,\; \exists\, x \in X \,/\, y = f(x)$", lo cual prueba la suryectividad de f.

8. Falta probar la Inyectividad de h

Debo probar: $z_1 \neq z_2$ implica $h(z_1) \neq h(z_2)$, $\forall\, z_1, z_2 \in Z$

Veamos:

9. Como g es biyectiva, entonces existen z_1 y z_2 en Z tales que: $z_1 = g(y_1)$
$z_2 = g(y_2)$

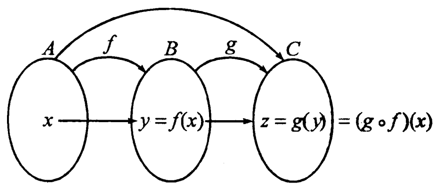
10. Si $z_1 \neq z_2 \Rightarrow g(z_1) \neq g(z_2)$; porque g es inyectiva.

11. Como $h \circ g$ es biyectiva, entonces: $y_1 \neq y_2 \Rightarrow (h \circ g)(y_1) \neq (h \circ g)(y_2)$
$\Rightarrow h(g(y_1)) \neq h(g(y_2))$
$\Rightarrow h(z_1) \neq h(z_2)$

12. Por 10 y 11: $z_1 \neq z_2$ implica $h(z_1) \neq h(z_2)$, $\forall\, z_1, z_2 \in Z$ **lo cual prueba la inyectividad de** h .

PROBLEMA 9 Probar que si $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ son **biyecciones entonces** $g \circ f: A \longrightarrow C$ es una biyección.

Demostración:



Hipótesis $\begin{cases} f \text{ es biyectiva} \\ g \text{ es biyectiva} \end{cases}$

Por demostrar dos proposiciones $\begin{cases} a)\ g \circ f \text{ es inyectiva} \\ b)\ g \circ f \text{ es suryectiva} \end{cases}$

Parte a) Para afirmar que $g \circ f$ es inyectiva **debo probar** que: $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ implica $x_1 = x_2$, $\forall\, x_1, x_2 \in A$

Veamos:

1. Sea $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in A$
2. Pero $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ implica $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
3. Por hipótesis g es inyectiva, entonces: $f(x_1) = f(x_2)$
4. Por hipótesis f es inyectiva, entonces: $x_1 = x_2$

5. Por 1 y 4 hemos deducido que: $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$ implica $x_1=x_2$ para todo $x_1,x_2\in A$; lo cual prueba que $g\circ f$ es inyectiva.

Parte b) Para afirmar que $g\circ f$ es suryectiva, debo probar que

"$\forall\, z\in C\ ,\ \exists\, x\in A\ /\ z=(g\circ f)(x)$"

Veamos:

1. Como g es suryectiva, entonces: "$\forall\, z\in C\ ,\ \exists\, y\in B\,/\,z=g(y)$"
2. Como f es suryectiva, entonces: "$\forall\, y\in B\ ,\ \exists\, y\in A\,/\,y=f(x)$"
3. La proposición en 2 se cumple para todo $y\in B$, en particular se cumplirá para $\underbrace{\text{algún } y\in B}_{\exists\, y\in B}$.

   Así obtendremos: "$\exists\, y\in B\ ,\ \exists\, x\in A\,/\,y=f(x)$" $\longleftarrow q$
4. Sustituir q en 1: "$\forall\, z\in C\ ,\ \exists\, y\in B\,/\,z=g(f(x))$"

   $$=(g\circ f)(x)$$

   Lo cual prueba que $(g\circ f)$ es suryectiva.

PROBLEMA 10 Sean A, B, C conjuntos no vacíos. Consideremos las funciones:

$$f:A\longrightarrow B \quad \text{y} \quad g:B\longrightarrow C$$

Demostrar que:

a) Si f y g son biyectivas, entonces $(g\circ f):A\longrightarrow C$ tiene inversa. Hallar $(g\circ f)^{-1}$

b) Si f y g son biyectivas, entonces la función:

$$\begin{aligned} P:\ A\times B &\longrightarrow B\times C \\ (x,y) &\longmapsto p(x,y)=(f(x),g(y)) \end{aligned}$$ es también inyectiva.

Prueba de a)

Para afirmar que "$(g\circ f)$ tiene inversa" basta probar que "$g\circ f$ sea biyectiva", lo cual está probado en el problema 9.

Ahora, solo falta hallar $(g\circ f)^{-1}$ $\longleftarrow$ inversa de $g\circ f$

Debo probar que $\quad (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

Veamos:

1) Si $g:B\longrightarrow C$ es una función biyectiva, existe la función

$g^{-1}:C\longrightarrow B$ que denominamos "**INVERSA** de g" definido por la siguiente condición: $y=g^{-1}(z)\iff z=g(y)$.

2) Si $f : A \longrightarrow B$ es una función biyectiva, existe la función

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ que denominamos "**INVERSA** de f definida por la siguiente condición:

$$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x)$$

3) Por 1) y 2) $\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[rr, bend left, "f^{-1} \circ g^{-1}"] & B \arrow[r, "f^{-1}"] & A \end{tikzcd}$ queda definida la aplicación $f^{-1} \circ g^{-1} : C \longrightarrow A$

tal que, $x = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$, $\forall\, z \in C$

4) Como $g \circ f \;:\; A \longrightarrow C$ es biyectiva , existe la función

$(g \circ f)^{-1} \;:\; C \longrightarrow A$ que denominamos "INVERSA de $g \circ f$"

definido por la siguiente condición: $x = (g \circ f)^{-1}(z) \Longleftrightarrow z = (g \circ f)(x)$

5) Por 4) y 3), se cumple: $x = (g \circ f)^{-1}(z)$

$$= (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$$

Por tanto: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Prueba de b)

Debo probar la veracidad de dos proposiciones:

i) P es inyectiva

ii) P es suryectiva

Prueba de *i*)

1) Sea $P(x_1, y_1) = P(x_2, y_2)$, $\forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en $A \times B$

2) $\Rightarrow$ $(f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), f(y_2))$, según la definición de P .

3) $\Rightarrow$ $f(x_1) = f(x_2) \;\wedge\; g(y_1) = g(y_2)$ .... igualdad de pares

4) $\Rightarrow$ $x_1 = x_2 \;\wedge\; y_1 = y_2$ .... porque f y g son inyectivas.

5) $\Rightarrow$ $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ .... igualdad de parejas ordenadas.

6) Por 1) y 5) se deduce:

$P(x_1, y_1) = P(x_2, y_2)$ implica $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$; lo cual implica que P es inyectiva

Prueba de *ii*)

1) Dado $(f(x), g(y)) \in B \times C$ donde $f(x) \in B$, $g(y) \in C$,

encontrar, $(a,b) \in A \times B \,/\, P(a,b) = (f(x), g(y))$

$$a = ? \quad , \quad b = ?$$

2) Pero $P(a,b) = (f(a), g(b))$

3) Basta hacer : $f(a) = f(x) \quad \wedge \quad g(b) = g(y)$

y obtenemos : $a = x \quad \wedge \quad b = y$, porque f y g son inyectivas.

4) Sustituir 3) en 1):

Dado $(f(x), g(y)) \in B \times C$, $\exists\, (x,y) \in A \times B \,/\, (f(x), g(y)) = P(x,y)$

lo cual prueba que P es suryectiva.

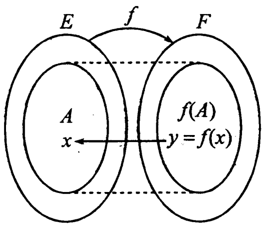
3.13 IMAGEN DIRECTA E INVERSA DE UN CONJUNTO

3.13.1 IMAGEN DIRECTA DE UN CONJUNTO A MEDIANTE f.

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación y $A \subset E$

Entonces el conjunto:

$f(A) = \{ f(x) \in F / x \in A \} \subset F$ recibe el nombre de **IMAGEN DIRECTA** de A mediante f.



Es decir: $\boxed{f(x) \in f(A) \Longleftrightarrow x \in A}$

o $\quad y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists\, x \in A, y = f(x)$

<u>PROPIEDADES</u>:

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación donde $M \subset E$, $N \subset E$.

Se cumplen las siguientes propiedades:

P_1) $f(E) = \text{Rang}(f)$

P_2) $f(M) = \text{Rang}(f_M)$
rango de f restringido al conjunto M.

P_3) $f(M) \subset f(E) = \text{Rang}(f)$

P_4) $f(\phi) = \phi$

P_5) Si $M \subset N$ implica $f(M) \subset f(N)$

P_6) $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$

P_7) $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$

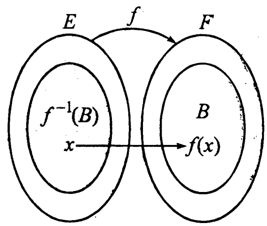
P_8) $M \subset N$ implica
$f(N - M) \subset f(N) - f(M)$

3.13.2 IMAGEN INVERSA DE B, MEDIANTE f.

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación y $B \subset F$

Entonces el conjunto:

$f^{-1}(B) = \{ x \in E / f(x) \in B \} \subset E$ recibe el nombre de IMAGEN INVERSA de B mediante f.



Es decir:

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B}$$

<u>PROPIEDADES</u>:

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación donde $B \subset F$, $D \subset F$.

Se cumplen las siguientes propiedades:

I_1) $f^{-1}(\phi) = \phi$

I_2) si $B \subset D$ implica $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(D)$

I_3) $\forall\, A \subset E$ implica $A \subset f^{-1}(f(A))$

I_4) $\forall\, B \subset F$ implica $f(f^{-1}(B)) \subset B$

I_5) $f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$

I_6) $f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$

I_7) $B \subset D$ implica
$f^{-1}(D - B) = f^{-1}(D) - f^{-1}(B)$

I_8) $f^{-1}(\complement_F B) = \complement_E f^{-1}(B)$

Prueba de P_6) $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$

($\subset$) Por probar que $f(M \cup N) \subset f(M) \cup f(N)$

1. $\forall\ y \in f(M \cup N) \Rightarrow y = f(x)$ para algún $x \in M \cup N$.

2. $x \in M \cup N \Rightarrow x \in M \vee x \in N$

3. $\Rightarrow f(x) \in f(M) \vee f(x) \in f(N)$

4. $\Rightarrow y = f(x) \in [f(M) \cup f(N)]$

5. Por 1. y 4. si $y \in f(M \cup N)$ implica $y \in [f(M) \cup f(N)]$, afirmamos que $f(M \cup N) \subset f(M) \cup f(N)$

($\supset$) Por probar que $f(M) \cup f(N) \subset f(M \cup N)$

6. $\forall\ y \in [f(M) \cup f(N)] \Rightarrow y \in f(M) \vee y \in f(N)$

7. $\Rightarrow f(x) \in f(M) \vee f(x) \in f(N)$...... para algún $x \in M \vee x \in N$

8. $\Rightarrow x \in M \vee x \in N$ tal que $y = f(x)$.

9. $\Rightarrow x \in (M \cup N)$

10. $\Rightarrow f(x) \in f(M \cup N)$

11. $\Rightarrow y \in f(M \cup N)$, para algún $x \in M \cup N$, tal que $y = f(x)$.

12. Por 6 y 11 se cumple: $f(M) \cup f(N) \subset f(M \cup N)$

13. Por 5 y 12 afirmamos: $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$

Prueba de P_8) $M \subset N$ implica $f(N - M) \subset f(N) - f(M)$

Debo probar que $\forall\ f(x) \in f(N - M)$ implica $f(x) \in [f(N) - f(M)]$

Veamos:

1. $\forall\ f(x) \in f(N - M) \Rightarrow x \in (N - M)$

2. $\Rightarrow x \in N \wedge x \notin M$

3. $\Rightarrow f(x) \in f(N) \wedge f(x) \notin f(M)$

4. $\Rightarrow f(x) \in [f(N) - f(M)]$

5. Por 1 y 4 concluimos que: $f(N - M) \subset f(N) - f(M)$

Prueba de I_2) $B \subset D$ implica $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(D)$

Debo probar que: $\forall\ x \in f^{-1}(B)$ implica $x \in f^{-1}(D)$, sabiendo que $B \subset D$

Veamos:

1. $\forall\, x \in f^{-1}(B) \;\Rightarrow\; f(x) \in B$ .... (definición de imagen inversa)
2. Como $B \subset D$, entonces $\forall\, f(x) \in B$ implica $f(x) \in D$.
3. Si $f(x) \in D \;\Rightarrow\; x \in f^{-1}(D)$
4. Por 1 y 2 hemos deducido que: $\forall\, x \in f^{-1}(B)$ implica $x \in f^{-1}(D)$

   Por tanto: $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(D)$.

Prueba de $\mathbf{I_6}$) $\quad f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$

($\subset$) Por probar $f^{-1}(B \cap D) \subset f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$

1. $\forall\, x \in f^{-1}(B \cap D) \;\Rightarrow\; f(x) \in B \cap D$
2. $\Rightarrow\; f(x) \in B \quad \wedge \quad f(x) \in D$
3. $\Rightarrow\; x \in f^{-1}(B) \quad \wedge \quad x \in f^{-1}(D)$
4. $\Rightarrow\; x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$
5. Por 1 y 5 se ha deducido que: $x \in f^{-1}(B \cap D)$ implica $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$

   Luego: $f^{-1}(B \cap D) \subset f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$

($\subset$) Por probar que $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(B \cap D)$

6. $\forall\, x \in [f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)] \;\Rightarrow\; x \in f^{-1}(B) \quad \wedge \quad x \in f^{-1}(D)$
7. $\Rightarrow\; f(x) \in B \quad \wedge \quad f(x) \in D$
8. $\Rightarrow\; f(x)[B \cap D]$
9. $\Rightarrow\; x \in f^{-1}(B \cap D)$
10. Por 7 y 10 se ha deducido que: $\forall\, x \in [f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)]$ implica $x \in f^{-1}(B \cap D)$
11. Por tanto: $\quad f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(B \cap D)$
12. Por 6 y 12 concluimos: $\quad f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$

lqqd.

3.14 PROPIEDADES IMPORTANTES

(I_3) Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación.

Si $A \subset E$ implica $A \subset f^{-1}(f(A))$

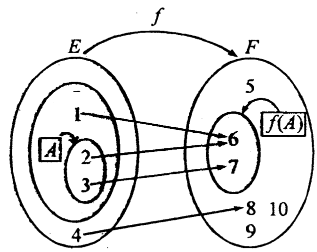
Prueba:

1) Sea $x \in A$
2) $\Rightarrow$ $f(x) \in f(A)$
3) $\Rightarrow$ $x \in f^{-1}(f(A))$
4) Por 1 y 3 se cumple $A \subset f^{-1}(f(A))$

NOTA:
Cuando $x \in A$ y f no es inyectiva puede ocurrir que $\exists\, m \in E$, $m \notin A$ tal que $f(x) = f(m)$ implica $x \neq m$

En el ejemplo: $\left.\begin{array}{l} f(2) = 6 \\ f(1) = 6 \end{array}\right\}$ implica $2 \neq 1$

__Ejemplo__:



$$A = \{2,3\} \subset E$$

$$f(A) = \{6,7\}$$

$$f(f^{-1}(A)) = \{1,2,3\}$$

Se cumple: $A \subset f(f^{-1}(A))$

pues $f^{-1}(f(2)) = \begin{cases} 1 \ , \ 1 \notin A \\ 2 \ , \ 2 \in A \end{cases}$

3.14.1 TEOREMA

Sea la aplicación $f : E \longrightarrow F$. Probar que f es inyectiva si, y sólo si, para todo conjunto $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Demostración:

La demostración es de doble implicación.

($\Rightarrow$) Si f es inyectiva entonces $f^{-1}(f(A)) = A$ $\underbrace{\forall A \ , \ A \subset E}$

para todo subconjunto del conjunto de **PARTIDA**.

La hipótesis es: f es inyectiva.

Por probar que: $f^{-1}(f(A)) = A$

Veamos:

1) Por la propiedad I_3, se cumple: $A \subset f^{-1}(f(A))$

FALTA probar que: $f^{-1}(f(A)) \subset A$

2) Sea $\underline{x \in f^{-1}(f(A))}$

$\Rightarrow \quad f(x) \in f(A)$

3) Como f es inyectiva, existe $m \in A$, tal que $f(x) = f(m)$ implica $x = m$

Por tanto: $f(m) = f(x) \in f(A)$ implica $\underline{m = x \in A}$

4) Por 2) y 3) **deducimos:** $\underline{\underline{f^{-1}(f(A)) \subset A}}$

5) Por 1) y 4) implica: $f^{-1}(f(A)) = A$

($\Leftarrow$) Si $\forall\, A \subset E$ se **cumple** $f^{-1}(f(A)) = A$, entonces f **es inyectiva.**

Debo probar que $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$, $\forall\, x_1$, $x_2 \in A$

Veamos:

1) La hipótesis $f^{-1}(f(A)) = A$ se cumple $\forall\, A \subset E$

2) En particular $\forall\, x \in A$ se cumple: $\{x\} \subset E$ **implica** $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$

3) Sean x_1 , x_2 elementos de A tal **que** $f(x_1) = f(x_2)$

4) Se cumple $f(x_1) \in f(\{x_2\})$

$\Rightarrow \quad x_1 \in f^{-1}(f(\{x_2\})) = \{x_2\}$ **según (2)**

5) Si $x_1 \in \{x_2\} \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$

6) Por (3) y (5) implica que f es inyectiva.

I_4) Sea la aplicación $f : E \longrightarrow F$

$\forall\, B \subset F$ **implica** $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Demostración:

1) sea $f(x) \in f(f^{-1}(B))$

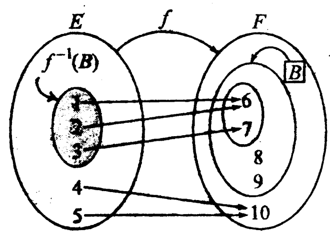
$\Rightarrow x \in f^{-1}(B) \ldots$ **definición de imagen directa**

2) $\Rightarrow\; f(x) \in B \quad \ldots$ **definición de imagen inversa**

3) Por 1) y 2) **se deduce:**

$f(f^{-1}(B)) \subset B$

Ejemplo:



$B = \{6,7,8,9\} \subset F$

$f^{-1}(B) = \{1,2,3\}$

$f(f^{-1}(B)) = \{6,7\} \subset B$

3.14.2 TEOREMA

Sea $f : E \longrightarrow F$

f es **SURYECTIVA**, si y sólo si, para todo $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$

Demostración:

($\Rightarrow$) Hipótesis: f es suryectiva

TESIS: $f(f^{-1}(B)) = B$, $\forall\ B \subset F$

Veamos:

La igualdad $f(f^{-1}(B)) = B$ se demuestra por doble inclusión.

a) Según la propiedad I_4) se cumple:

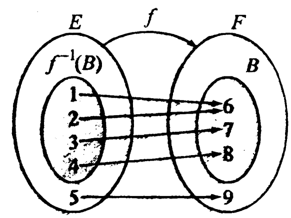
- $f(f^{-1}(B)) \subset B$, $\forall\ B \subset F$

b) Falta probar : $B \subset f(f^{-1}(B))$

Debo probar :

$y \in B$ implica $y \in f(f^{-1}(B))$

Ejemplo:



Se tiene: $f(E) = F$, porque f es suryectiva

Además $B = \{6,7,8\} \subset F$

$f^{-1}(B) = \{1,2,3,4\}$

$f(f^{-1}(B)) = B$

Por hipótesis f es suryectiva, por tanto se cumple: $\forall\ y \in F$, $\exists\ x \in E$ tal que $y = f(x)$.

Como $B \subset F$, entonces dado $y \in B$, $\exists\ x \in E$, tal que $y = f(x)$

1) Si $y = f(x) \in B$

$\Rightarrow$ $x \in f^{-1}(B) \subset E$, para algún $x \in f^{-1}(B)$.

2) $\Rightarrow$ $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$

3) Por (1) y (2) se cumple: $B \subset f(f^{-1}(B))$

En consecuencia por a) y por b) se cumple: $f(f^{-1}(B)) = B$

($\Leftarrow$) Hipótesis: $f(f(B)) = B$, $\forall\ B \subset F$

TESIS : f es suryectiva.

Debo probar que $f(E) = F$

Veamos:

1) Por hipótesis, se cumple: $f(f^{-1}(B)) = B$, $\forall\ B \subset F$

2) En particular: como $F \subset F$ es verdadero, se cumplirá $f(f^{-1}(F)) = F$

3) Como f es una aplicación, se cumple $f^{-1}(F) = E =$ dominio de f

4) Al sustituir 3) en 1) tendremos: $f(E) = F$

—lqqd—

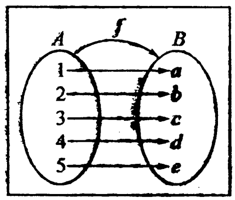
3.15 FUNCIÓN INVERSA

3.15.1 DEFINICIÓN

Si $f : A \longrightarrow B$ es una **FUNCION BIYECTIVA**, entonces existe $f^{-1} : B \longrightarrow A$, llamado **INVERSA** de f, definida por la condición:

$$y = f(x) \iff x = \underbrace{f^{-1}}_{\text{inversa de } f}(y)$$

<u>Ejemplo 1</u>:



Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$
Sea la función $f : A \longrightarrow B$ definida por $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$, $f(5) = e$.

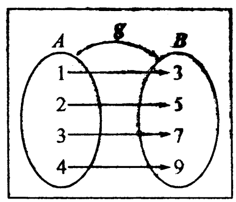
Se cumplen:
1) f es inyectiva, porque $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in A$

2) f es suryectiva, porque $rang(f) = B$.

3) Luego existe $f^{-1} : B \longrightarrow A$, definido por $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$, $f^{-1}(c) = 3$, $f^{-1}(d) = 4$, $f^{-1}(e) = 5$.

<u>Ejemplo 2</u>:

Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,5,7,9\}$



Sea la función $g : A \longrightarrow B$ definida por $f(n) = 2n + 1$

Se cumplen:
1) f es inyectiva.
2) f es Suryectiva.

3) Luego existe $g^{-1} : B \longrightarrow A$, definida por $g^{-1}(m) = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$, $m \in B$

Pues se hace $f(n) = m$: $\quad 2n+1 = m$

despejar n: $\quad n = \underbrace{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}}_{g^{-1}(m)}$

Ejemplo 3:

Dado el **GRÁFO** de f : $\quad Gr(f) = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$

entonces $\quad Gr(f^{-1}) = \{(0,0),(1,1),(4,2),(9,3)\}$

3.16 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

Definición: Dados los conjuntos $A \subset U$ y $\{0,1\}$ para cada $A \in \mathcal{P}(U)$ se define la función:

$$\varphi_A : \mathcal{P}(U) \longrightarrow I\!R$$

tal que $$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 \ , & \forall\, x \in A \\ 0 \ , & \forall\, x \in \complement A \end{cases}$$

llamada "**FUNCIÓN CARACTERÍSTICA** de A"

Ejemplo: Sea el conjunto $U = \{a,b,c\}$

donde $\mathcal{P}(U) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},U\}$

Definir la función característica de los siguientes conjuntos

$A = \{a,b\}$, $B = \{b,c\}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $\complement A$

Solución:

a) La función característica de $A = \{a,b\}$ es $\varphi_A : \mathcal{P}(U) \longrightarrow I\!R$

definida por: $\varphi_A(a) = 1$, porque $a \in A$.

$\varphi_A(b) = 1$, porque $b \in A$

$\varphi_A(c) = 0$, porque $c \in \complement A$

b) La función característica de $B = \{b,c\}$ es $\varphi_B : \mathcal{P}(U) \longrightarrow I\!R$

definida por: $\varphi_B(b) = 1$, porque $b \in B$.

$\varphi_B(c) = 1$, porque $c \in B$

$\varphi_B(a) = 0$, porque $a \in \complement B$

c) La función característica de $A \cap B = \{b\}$ es $\varphi_{A\cap B} : \mathcal{P}(U) \longrightarrow I\!R$
definida por: $\varphi_{A\cap B}(b) = 1$, porque $b \in B$.
$\varphi_{A\cap B}(a) = 0$, porque $a \notin (A \cap B) \iff a \in \complement(A \cap B)$.
$\varphi_{A\cap B}(b) = 0$, porque $b \notin (A \cap B) \iff b \in \complement(A \cap B)$.

d) La función característica de $A \cup B = U$ es $\varphi_{A\cup B} : \mathcal{P}(U) \longrightarrow I\!R$
definido por: $\varphi_{A\cup B}(a) = 1$
$\varphi_{A\cup B}(b) = 1$
$\varphi_{A\cup B}(c) = 1$

De este problema podemos deducir dos importantes proposiciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \ \varphi_U(x) = 1\ ,\ \forall\, x \in U \\ 2)\ \ \varphi_\phi(x) = 0\ ,\ \forall\, x \in U \end{array}}$$

e) La función característica de $A - B = \{a\}$ es $\varphi_{A-B} : \mathcal{P}(U) \longrightarrow I\!R$
definido por: $\varphi_{A-B}(a) = 1$
$\varphi_{A-B}(b) = 0$
$\varphi_{A-B}(c) = 0$

f) La función característica de $\complement A = \{c\}$ es $\varphi_{\complement A} : \mathcal{P}(U) \longrightarrow I\!R$
definido por: $\varphi_{\complement A}(c) = 1$
$\varphi_{\complement A}(a) = 0$
$\varphi_{\complement A}(b) = 0$

3.16.1 IMPORTANCIA DE LA FUNCIÓN CARACTERISTICA

Las relaciones de igualdad de conjuntos y las operaciones conjuntistas de intersección, unión, diferencia, diferencia simétrica, producto; se pueden definir aplicando la función característica.

Así obtenemos las siguientes proposiciones:

P_1) Si A y B son subconjuntos de U, probar que $A = B$ si, y sólo si
$\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$, $\forall\, x \in U$.

Demostración:

($\Rightarrow$) si $A = B$ entonces $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$, $\forall\, x \in U$

1) para todo $x \in A$, se cumple $\varphi_A(x) = 1$

2) Como $B = A$, entonces $\varphi_B(x) = 1$

3) Por 1) y 2) se cumple $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$, $\forall\, x \in A = B$

4) Si $\underbrace{x \notin A}_{x \in \complement A}$, se cumple $\varphi_A(x) = 0$

5) Como $B = A$, entonces $\varphi_B(x) = 0$

6) Por (4) y (5) se cumple: $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$, $x \notin A = B$

7) Por (3) y (6) se cumple: Si $A = B \Rightarrow \varphi_A(x) = \varphi_B(x)$, $\forall\, x \in U$

Si A y B son subconjuntos de U, se cumplen las siguientes proposiciones:

P$_2$) $\varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$, $\forall\, x \in U$

P$_3$) $\varphi_{A\cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$, $\forall\, x \in U$

P$_4$) $\varphi_{A-B}(x) = \varphi_A(x)[1 - \varphi_B(x)]$, $\forall\, x \in U$

P$_5$) $\varphi_{\complement A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$, $\forall\, x \in U$

P$_6$) $[\varphi_A(x)]^2 = \varphi_A(x)$, $\forall\, x \in U$

P$_7$) $\varphi_{A\Delta B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$, $\forall\, x \in U$

P$_8$) $\varphi_{A\Delta B}(x) = [\varphi_A(x) - \varphi_B(x)] \vee [\varphi_B(x) - \varphi_A(x)]$, $\forall\, x \in U$

P$_9$) $A \subset B \iff \varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$, $\forall\, x \in U$

P$_{10}$) Si $A \subset U$ y $B \subset U$ probar que $\overbrace{\varphi_{A\times B}(z)}^{\varphi_{A\times B}((x,y))} = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(y)$
para todo $z = (x, y) \in U \times U$

3.16.2 DEMOSTRACIÓN DE ALGUNAS PROPOSICIONES

P$_2$) Probar que:

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\,\varphi_B(x) \ , \ \forall\, x \in U$$

Prueba:

1) si
$$\begin{array}{ccccc} x\in(A\cup B) & \Longleftrightarrow & x\in A & \vee & x\in B \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \varphi_{A\cup B}(x)=1 & & \varphi_A(x)=1 & & \varphi_B(x)=1 \end{array}$$

2) si
$$\begin{array}{ccccc} x\notin(A\cup B) & \Longleftrightarrow & x\notin A & \wedge & x\notin B \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \varphi_{A\cup B}(x)=0 & & \varphi_A(x)=0 & & \varphi_B(x)=0 \end{array}$$

3) Por lo tanto:

a)
$$\begin{array}{ccccccccccc} \varphi_{A\cup B}(x) & = & \varphi_A(x) & + & \varphi_B(x) & - & \varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x) & , & \text{si} & x\in(A\cup B) & \\ 1 & = & 1 & + & 1 & - & (1)\quad(1) & , & \text{si} & x\in A & \wedge\ x\in B \\ & = & 1 & + & 0 & - & (1)\quad(0) & , & \text{si} & x\in A & \wedge\ x\notin B \\ & = & 0 & + & 1 & - & (0)\quad(1) & , & \text{si} & x\notin A & \wedge\ x\in B \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccccccc} \varphi_{A\cup B}(x) & = & \varphi_A(x) & + & \varphi_B(x) & - & \varphi_A(x)\ \varphi_B(x) & , & \text{si}\ \ x\notin(A\cup B) \\ 0 & = & 0 & + & 0 & - & (0)\cdot(0) & & \end{array}$$

P$_7$) Demostrar: $\varphi_{A\Delta B}(x)=\varphi_A(x)+\varphi_B(x)-2\varphi_A(x)\cdot\varphi_B(x)\ ,\ \forall\, x\in U$

Prueba:

1) Si
$$\begin{array}{ccl} x\in(A\,\Delta\, B) & \Longleftrightarrow & x\in[(A\cup B)-(A\cap B)] \\ \Big\downarrow & \Longleftrightarrow & x\in(A\cup B)\ \wedge\ x\notin(A\cap B) \\ \Big\downarrow & \Longleftrightarrow & (x\in A\ \vee\ x\in B)\ \wedge\ (x\notin A\ \vee\ x\notin B) \\ \Big\downarrow & \Longleftrightarrow & (x\in A\ \wedge\ x\notin B)\ \vee\ (x\in B\ \wedge\ x\notin A) \\ \Big\downarrow & & \quad\ \downarrow \qquad\quad\ \downarrow \qquad\qquad\ \downarrow \qquad\quad\ \downarrow \\ \varphi_{A\Delta B}(x)=1 & & \varphi_A(x)=1\quad \varphi_B(x)=0\quad \varphi_B(x)=1\quad \varphi_A(x)=0 \end{array}$$

2) Si
$$\begin{array}{ccl} x\notin(A\,\Delta\, B) & \Longleftrightarrow & x\notin(A\cup B)\ \vee\ x\in(A\cap B) \\ \Big\downarrow & \Longleftrightarrow & (x\notin A\ \wedge\ x\notin B)\ \vee\ (x\in A\ \wedge\ x\in B) \\ \Big\downarrow & & \quad\ \downarrow \qquad\quad\ \downarrow \qquad\qquad\ \downarrow \qquad\quad\ \downarrow \\ \varphi_{A\Delta B}(x)=1 & & \varphi_A(x)=0\quad \varphi_B(x)=0\quad \varphi_A(x)=1\quad \varphi_B(x)=1 \end{array}$$

Aplicando las definiciones dadas en los pasos 1 y 2, obtenemos:

3) $x \in (A \Delta B)$ implica a) $(x \in A \wedge x \notin B)$ $\vee$ b) $(x \in B \wedge x \notin A)$

según a) $\varphi_{A \Delta B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\,\varphi_A(x)\,\varphi_B(x)$

$1 = 1 + 0 - 2\,(1)\;(0)$

según b) $\varphi_{A \Delta B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\,\varphi_A(x)\,\varphi_B(x)$

$1 = 0 + 1 - 2\,(0)\;(0)$

Observación: Otra forma de razonar, es utilizando la **TABLA LÓGICA** para las proposiciones compuestas: $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \wedge \sim q$, $p \,\Delta\, q$ según corresponda a las operaciones: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \,\Delta\, B$, respectivamente.

EJEMPLOS ACLARATORIOS:

01 Para probar la igualdad:

$\varphi_{A \Delta B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x)\,\varphi_B(x)$ se usará la **TABLA**

$0 = 1 + 1 - 2\,(1)\;(1)$

$1 = 1 + 0 - 2\,(1)\;(0)$

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$1 = 0 + 1 - 2\,(0)\;(1)$

$0 = 0 + 0 - 2\,(0)\;(0)$

y aplicar la función $\varphi_{(p)} = \begin{cases} 1, \text{ si } p \text{ es } V \\ 0, \text{ si } p \text{ es } F \end{cases}$

02 Para probar:

$\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x)\,\varphi_B(x)$, $\forall\, x \in U$ se usará la **TABLA**

$1 = (1)\quad(1)$

$0 = (1)\quad(0)$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$0 = (0)\quad(1)$

$0 = (0)\quad(0)$

y aplicar la función $\varphi_{(p)} = \begin{cases} 1, \text{ si } p \text{ es } V \\ 0, \text{ si } p \text{ es } F \end{cases}$

3.17 OPERACIÓN BINARIA INTERNA

La operación binaria consiste en darse un conjunto $A \neq \phi$, construir el producto $A \times A$ y hacer una aplicación de $A \times A$ en A.

3.17.1 DEFINICIÓN. Sea A un conjunto no vacío.

Llamamos **OPERACIÓN BINARIA INTERNA** definida en A a toda aplicación "*" de $A \times A$ en A, tal que a cada pareja $(a,b) \in A \times A$ corresponde el único elemento $a * b$ perteneciente al conjunto A.

3.17.2 NOTACIÓN

Como " $*$ " es una función de $A \times A$ en A, denotamos

$$\begin{aligned} * : A \times A &\longmapsto A \\ (a,b) &\longrightarrow a * b \end{aligned}$$

para indicar que "a cada pareja $(a,b) \in A \times A$ corresponde el único elemento $(a * b) \in A$".

3.17.3 ACLARACIONES

1) El símbolo " $*$ " es una operación que puede ser "+", "·", "–", "$\cap$", "$\cup$", m.c.d, m.c.m, potencia; que son suma, producto, diferencia, intersección, unión, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, potencia, respectivamente o puede ser cualquier otra operación que se puede definir.

2) El conjunto A puede ser $I\!N$, $\mathbb{Z}$, $I\!R$, $I\!R^2$, $I\!R^n$ o cualquier otro.

3) A la función $* : A \times A \longrightarrow A$ se le llama "ley de composición interna en A con respecto a la operación $*$".

   También se le llama "ley de clausura o cerradura en A con respecto a la operación $*$".

4) La operación binaria $* : A \times A \longrightarrow A$ puede estar totalmente definida en A o parcialmente definida en A.

3.17.4 EJEMPLOS:

1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ definimos la operación $*$ totalmente en A mediante la siguiente **TABLA**.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

En esta tabla existen 16 resultados que se operan con $*$ los elementos dispuestos en orden vertical con los dispuestos en orden horizontal, así obtenemos:

$a * a = a$	$b * a = b$	$c * a = c$	$d * a = d$
$a * b = b$	$b * b = c$	$c * b = d$	$d * b = a$
$a * c = c$	$b * c = d$	$c * c = a$	$d * c = b$
$a * d = d$	$b * d = a$	$c * d = b$	$d * d = c$

2. Sea $B=\{a,b,c\}$ y $\mathcal{P}(B)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\varnothing,A\}\}$ definimos las operaciones binarias $\cap$ y $\cup$ en $\mathcal{P}(B)$.

$$\begin{aligned} \cap : \quad \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B) &\longrightarrow \mathcal{P}(B) \\ (X,Y) &\longmapsto X \cap Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cup : \quad \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B) &\longrightarrow \mathcal{P}(B) \\ (X,Y) &\longmapsto X \cup Y \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} + : \quad I\!N \times I\!N &\longrightarrow I\!N \\ (a,b) &\longmapsto a+b \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} - : \quad A \times A &\longrightarrow I\!N \quad , \quad A \underset{\neq}{\subset} I\!N \\ (a,b) &\longmapsto a-b \end{aligned}$$

La operación "–" es parcialmente definida en $I\!N$, porque la diferencia de números naturales no siempre es natural.

Por ejemplo: $(2,5) \longrightarrow 2-5=-3 \notin I\!N$

5. $$\begin{aligned} + : \quad I\!R^2 \times I\!R^2 &\longrightarrow I\!R^2 \\ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &\longmapsto (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} \bullet : \quad I\!R \times I\!R &\longrightarrow I\!R \\ (x,y) &\longmapsto x \bullet y \end{aligned}$$

La operación binaria $*$ puede ser :

1) $* : A \times A \to U$

2) Si $A = U$ $* : U \times U \to U$

3) Si $A \underset{\neq}{\subset} U$ $* : A \times A \to U \underset{\neq}{\supset} A$

En 2) decimos que $*$ es total-mente definida en U.

En 3) decimos que $*$ es parcialmente definida.

3.17.5 PROPIEDADES DE LA OPERACION BINARIA INTERNA

Sea $* : A\times A \longrightarrow A$ una aplicación de $A\times A$ en A.
$(a,b)\longmapsto a*b$

P_1 CONMUTATIVA

La operación binaria "$*$" es conmutativa s.s.s $a*b=b*a$, $\forall\, a\in A$, $\forall\, b\in A$

P_2 ASOCIATIVA

La operación binaria "$*$" es asociativa s.s.s $(a*b)*c=a*(b*c)$, $\forall\, a\in A$, $\forall\, b\in A$, $\forall\, c\in A$.

P_3 EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO

Diremos que A tiene **ELEMENTO NEUTRO** respecto a "$*$" , s.s.s
$\exists\, e\in A \,/\, a\,e=e\cdot a=a \quad \forall\, a\in A$.

P_4 EXISTENCIA DEL ELEMENTO INVERSO.

Si A posee elemento neutro "e" respecto "$*$", entonces
$\exists\, m\in A \,/\, a*m=m*a=e$, $\forall\, a\in A$.

El elemento $m=a^{-1}$ se llama inversa de a .

PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS:

Sean las operaciones binarias:

$*: A\times A \longrightarrow A$ y $\#: A\times A \longrightarrow A$
$(a,b)\longmapsto a*b$ $\quad (a,b)\longmapsto a\#b \quad \forall\, a, \forall\, b, \forall\, c\in A$

P_5 Si se cumple: $a*(b\,\#\,c)=(a*b)\,\#\,(a*c)$ diremos que "$*$" es distributiva por la izquierda respecto a $\#$.

P_6 Si se cumple: $(a\,\#\,b)*c=(a*c)\,\#\,(b*c)\ \forall\, a, \forall\, b, \forall\, c\in A$ diremos que "$*$" es distributiva por la derecha respecto a #.

Ejemplos relativos a las propiedades P_1 y P_6

1. $\alpha\cdot(a+b)=\alpha\cdot a+\alpha\cdot b$, $\forall\, \alpha\in I\!R$, $\forall\, a\in I\!R$, $\forall\, b\in I\!R$
   diremos que el producto "$\cdot$" es distributiva por la izquierda respecto a la suma "+"

2. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

PROBLEMAS

1. Dadas las operaciones $*$ y $\#$ definidas en $I\!R$ del siguiente modo:

$$*: I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R \qquad\qquad \#: I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$$
$$(a,b) \longmapsto a*b = ab+(a+b) \qquad\qquad (a,b) \longmapsto a\#b = a+b-5$$

i) Calcular, si son posibles: $8*5$; $8\#6$

ii) Si $\begin{cases} x*y = 4 \\ x\#y = -2 \end{cases}$, hallar x, y

Solución:

i) Siguiendo el orden de la definición : $a*b = ab+(a+b)$

obtenemos : $8*5 = (8)(5)+(8+5)$

$= 40 + 13 = 53$

Según : $a\#b = a+b-5$

Obtenemos : $8\#5 = 8+5-5$

$= 8$

ii) $\begin{cases} x*y = xy+(x+y) = 4 \\ x\#y = x+y-5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy+x+y = 4 \quad (1) \\ x+y = 3 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow y = 3-x \ \ldots (3)$

Sustituir (3) $\wedge$ (2) en (1):

$x(3-x)+3 = 4$

$3x-x^2+3-4=0$

$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x = \dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Luego $\begin{cases} x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \ y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \ y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

2. Sean $*$, $\oplus$ y Δ operaciones definidas en $I\!R$ del sigte modo:

$$*: I\!R\times I\!R \longrightarrow I\!R \qquad (a,b) \longmapsto a*b=\tfrac{1}{2}a+3b$$

$$\oplus: I\!R\times I\!R \longrightarrow I\!R \qquad (a,b) \longmapsto a\oplus b=3a+\tfrac{3}{2}b$$

$$\Delta: I\!R\times I\!R \longrightarrow I\!R \qquad (a,b) \longmapsto a\,\Delta\, b=5a-3b$$

Si $\begin{cases} x*y=9 \\ x\oplus y=21 \end{cases}$ hallar $x\,\Delta\, y$

Solución *i*) Según: $a*b=\frac{a}{2}+3b$

tenemos: $x*y=\frac{x}{2}+3y=9$

ii) Según: $a\oplus b=3a+\frac{3}{2}b$

tenemos: $x\oplus y=3x+\frac{3}{2}y=21$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+3y=9 \\ 3x+\frac{3}{2}y=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

- Por tanto: Según $a\,\Delta\, b = 5a-3b$

obtenemos: $x\,\Delta\, y = 5x-3y$

$6\,\Delta\, 2 = 5(6)-3(2)=24$

3. En el conjunto $A=\{a,b,c,d\}$ se define la operación $*$ mediante la siguiente tabla:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

i) En la tabla dada ¿cómo se verifica la existencia o no del elemento neutro?

ii) ¿Cómo se determina si $*$ es conmutativa o no?

iii) Hallar el inverso de *a*, *b*, *c* y *d*; si existen

iv) ¿Es asociativa $*$?

Solución:

i) Observar la tabla:

$*$	a	b	c	d ← fila de entrada
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

↑ columna de entrada

buscar una fila igual a la fila de entrada, buscar una columna igual a la columna de entrada. Si existen dicha fila y columna, su intersección determina el elemento **NEUTRO**.

En este caso $e=a$ es el elemento **NEUTRO.**

ii) Observar la tabla:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Trazar la diagonal de A $(D(A))$.

Comparar los términos equidistantes con respecto a la $D(A)$.

Si los términos equidistantes son iguales, afirmamos que " $*$ " es conmutativa.

iii) Si existe algún $m \in A$ tal que: $x * m = \overbrace{a}^{e}$, $\forall\, x \in A$, diremos que m es el inverso de x.

Veamos:

$a * m = a \Rightarrow m = a$ indica que a es el inverso de a
$b * m = a \Rightarrow m = d$ indica que d es el inverso de b
$c * m = a \Rightarrow m = c$ indica que c es el inverso de c
$d * m = a \Rightarrow m = b$ indica que b es el inverso de d.

iv) ¿se cumple $a*(\underbrace{b*c}) = (\underbrace{a*b})*c$?

veamos: $\underbrace{a * d}_{d} = \underbrace{b * c}_{d}$

¿se cumple $a*(\underbrace{b*d}) = (\underbrace{a*b})*d$?

$\underbrace{a * a}_{a} = \underbrace{b * d}_{a}$

¿se cumple $(\underbrace{b*c})*d = b*(\underbrace{c*d})$?

$\underbrace{d * d}_{c} = \underbrace{b * b}_{c}$

... y así sucesivamente se cumple que $*$ es asociativa.

NOTA:

Para responder cualquier pregunta relativa a **OPERACIONES BINARIAS**, ceñirse estrictamente a las **DEFINICIONES** dadas en 3.17

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Sea el conjunto $E=\{a,b,c\}$, donde $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ es una relación en E.

Probar que:

a) R es una relación reflexiva.
b) R es una relación simétrica.
c) R es una relación transitiva.

02 Sean E y F conjuntos cualesquiera y $f: E \longrightarrow F$ una aplicación de E en F. Si ponemos $T=\{(x\,,y)\in E\times F: f(x)=f(y)\}$

a) Probar que T es: reflexiva, simétrica y simétrica.
b) Probar que T no es antisimétrica.

03 Sea E un conjunto cualquiera y definimos el conjunto de partes de E como $\mathcal{P}(E)=\{M/M\subset E\}$.

Si definimos $S=\{(A\,,B)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E): A\subset B\}$, tenemos que S es una relación en $\mathcal{P}(A)$. Probar que: a) S es reflexiva , b) S no es simétrica , c) S es transitiva.

04 Dado el conjunto $E=\{a,b,c\}$, sea $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ una relación en E. a) Probar que R es una relación de equivalencia en E; b) Probar que $S=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$ no es una relación de equivalencia en E.

05 **Definición:** Si R es una relación de ***equivalencia*** entre elementos de un conjunto E y $\boldsymbol{x}$ es un elemento cualquiera de E, se llama clase de equivalencia de $\boldsymbol{x}$ con respecto a la relación R, al conjunto $C(\boldsymbol{x})=\{\,y\in E/(y,\boldsymbol{x})\in R\,\}$

PROBLEMA. Dado el conjunto $E=\{a,b,c\}$, definimos las siguientes relaciones en E:

(*i*) La relación diagonal $\Delta_E=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$
(*ii*) $S=E\times E$
(*iii*) $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$

Hallar todas las clases de equivalencias que se determinan en cada relación dada.

Solución: (*i*) $C(a)=\{a\}$, $C(b)=\{b\}$, $C(c)=\{c\}$
(*ii*) $C(a)=C\{b\}=C\{c\}=\{a,b,c\}$
(*iii*) $C(a)=\{a,b\}$, $C(b)=\{b,a\}$, $C(c)=\{c\}$

06 Dado el conjunto $E=\{a,b,c,d\}$, definimos la relación $T=\{(x,y)\in E\times E/f(x)=f(y)\}$

(i) Hallar las clases de equivalencia que determina la relación T.

(ii) En base a (i), hallar una partición de E.

Solución: (i) La relación T determina en E dos clases de equivalencia:
$C(a)=C(b)$ y $C(c)=C(d)$
(ii) Una partición de E es $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$.

07 **Definición:** Si R es una relación de equivalencia entre los elementos de un conjunto E, se llama **conjunto cociente de *E* por la relación *R*** y se denota por E/R al conjunto **cuyos elementos son todas las clases de equivalencia *C*(*x*)** cuando x recorre E, o sea $E/R=\{C(x)/x\in E\}$

PROBLEMA. Del problema 5, hallar el conjunto cociente:

(i) E/Δ_E , (ii) $E/E\times E$, (iii) E/R

Solución: i) $E/\Delta_E=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$
ii) $E/E\times E=\{E\}$
iii) $E/R=\{\{a,b\},\{c\}\}$

08 Del problema 6, hallar E/T
Solución: $E/T=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$

09 Demostrar el siguiente lema:

Si R es una relación de equivalencia definida sobre el conjunto E y $C_R(x)=\{y\in E/(y,x)\in R\}$ es la clase de equivalencia asociada a R, se tiene que la familia $(C_R(x))_{x\in E}$ constituye una partición de E que recibe el nombre de partición de E asociada a la relación de equivalencia R. Además la aplicación

$$\psi:\ E\longrightarrow E/R \text{ definida } \psi(x)=C_R(x) \text{ es suryectiva.}$$

Sugerencia.- Debe probar: **1°** que $C_R(x)$ no es vacío.

2° La familia $(C_R(x))_{x\in E}$ es disjunta, esto es, debe probar que, dadas dos clases de equivalencia $C_R(x)$ y $C_R(y)$ tienen intersección vacía o son iguales.

3° $\bigcup_{x \in E} C_R(x) = E$.

Probar la suryectividad de ψ es sencilla : basta elegir un elemento del conjunto E/R y probar que siempre existe un elemento de E, tal que, el elemento elegido de E/R es imagen del elemento elegido de E mediante ψ.

10 Sea $E = \{a, b, c\}$. Hallar todas las particiones de E y todas las relaciones de equivalencia en E.

11 Demostrar que si R y S son relaciones de equivalencia entonces $R \cap S$ es una relación de equivalencia.

12 Sean R y S dos relaciones de equivalencia en un conjunto E. Demostrar que:

a) $R \cup S$ es una relación de equivalencia en:
$E \Longleftrightarrow R\,o\,S \subset R \cup S$ y $S\,o\,R \subset R \cup S$

b) R o S es una relación de equivalencia en
$E \Longleftrightarrow R\,o\,S = S\,o\,R$

13 Sea R una relación en $I\!N \times I\!N$ definido del siguiente modo:

$$(a,b)\,R(c,d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

Probar que R es una relación de equivalencia

Nota: A partir de los números naturales y la relación de equivalencia R, que acabamos de hacer, se define el conjunto de los números enteros.

14 Dado el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, sea R una relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida del siguiente modo: $(a, b)R(c, d) \Longleftrightarrow ad = bc$.
Probar que R es una relación de equivalencia.

Nota: Con esta relación de equivalencia se define el conjunto de los números racionales.

15 Dado el conjunto de los números reales $I\!R$, sea S una relación en $I\!R \times I\!R$ definida del siguiente modo: $(a,b)\,S\,(c,d) \Longleftrightarrow$ existe algún número real t, tal que , $(a,b) = t\,(c,d)$
¿Es S una relación de equivalencia?

16 Sea S una relación definida por:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 7 \text{ divide a } x - y\}$$

¿Es S una relación de equivalencia?

17 Sea S la relación definida por:

$$S = \{(\mathcal{L},\mathcal{M}) \in IR^2 \times IR^2 : \mathcal{L} \text{ es una recta paralela a la recta } \mathcal{M}\}$$

¿Es S una relación de equivalencia en $IR^2 \times IR^2$?

18 Sea R una relación definida por:

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 13 \text{ divide a "} a - b\text{"}\}$$

¿Es R una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

19 Una relación binaria admite una representación matricial, siempre que los conjuntos que se elijan sean finitos.

Supongamos que $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$.

La matriz asociada a la relación R de A en B es matriz Booleana con m filas y p columnas.

$$M_R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & r_{1,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & r_{i,j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m,1} & \cdots & \cdots & \cdots & r_{m,p} \end{bmatrix} \quad \text{dada por } r_{i,j} := \begin{cases} 1, \, si \; a_1 \, R \, b_j \\ 0, \, si \; a_1 \not R \, b_j \end{cases}$$

PROBLEMA.- Dado los conjuntos $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{4, 6, 9, 10\}$, definimos la relación R de A en B del siguiente modo:

$$R = \{(x,y) \in A \times B : x \text{ divide a } y\}$$

a) Tabular R , b) Hallar la matriz M_R

Solución: a) $R = \{(2,4), (2,6), (2,10), (3,6), (3,9), (5,10)\}$

b) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20 **Teorema.-** La matriz asociada a la relación $R \circ S$ es $M_R \cdot M_S$

PROBLEMA. Dado los conjuntos: $A=\{1,2\}, B=\{a,b,c\}$ y $C=\{x,y\}$, definimos las relaciones $R=\{(1,b),(1,c),(2,a)\} \subset A\times B$

$S=\{(b,x),(c,x),(c,y)\}\subset B\times C$

Se pide:

a) Hallar las matrices M_R y M_S

b) Hallar la matriz asociada a $R \circ S$

Solución: a) $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

21 Sea R la siguiente relación sobre $I\!R$ definida por: $r\,R\,s$ si y sólo si $r-s\in\mathbb{Z}$

a) Muestre que R es una relación de equivalencia

b) Describa $[0]$ y $[\pi]$

22 Sea R la siguiente relación sobre $I\!R$ definido por: $\theta\ R\ \beta$ si y sólo si existe un entero k tal que $\theta-\beta=2\pi k$

a) Muestre que R es una relación de equivalencia

b) Encuentra 4 distintos conjuntos de representantes para R

c) Encuentre una biyección entre $I\!R/R$ y el círculo sin un punto

$C^*=\{(x,y):\ x^2+y^2=1\}-\{(1,0)\}$.

23 Sea R una relación sobre X, tal que Dom (R) $=X$ y R es simétrica y transitiva. Muestre que R es una relación de equivalencia.

24 Sea $f: X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva, con X un conjunto no vacío. Defina la relación E_f sobre X así: aEb si y sólo si $f(a)=f(b)$.

1. Muestre que E_f es una relación de equivalencia.
2. Dé una biyección entre X/E y Y. (De este modo, la relación E transforma al conjunto X en un conjunto X/E con el mismo tamaño del conjunto Y).

25 Sea R la siguiente relación sobre $I\!R$: $r\,R\,s$ si y sólo si $r-s\in\mathbb{Z}$

1. Muestre que R es una relación de equivalencia.
2. Describa [0] y [π]
3. Muestre que para $r, s \in IR$ $([r], <) \cong ([s], <)$
4. Encuentre un conjunto de representantes para R.
5. Concluya que IR es la unión disjunta de copias de $\mathbb{Z}$ (más precisamente, es la unión disjunta de conjuntos isomorfos con el orden a los enteros).

26 Sea L el conjunto de todas las rectas de IR^2. Dé un ejemplo de una relación de equivalencia sobre L, distinta de la relación igualdad.

27 El espacio proyectivo: Sea $X = IR - \{(0,0)\}$ y defina la relación $\sim$ sobre X así : $(a, a') \sim (b, b')$ si y sólo si (a, a') y (b, b') están ambos sobre una misma recta que pasa por el origen.

28 Sea R_0 una relación reflexiva y simétrica, y para $n \in N$, sea R_{n+1} una relación reflexiva y simétrica tal que R_{n+1} o $R_{n+1} \subseteq R_n$. Muestre que $R = \cap_{n \in N} R_n$ es una relación de equivalencia.
1. Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
2. Encuentre un conjunto de representantes para $\sim$ y dibújelo. [$X/\sim$ es llamado el *espacio proyectivo*] .

29 Dado X un conjunto no vacío, muestre que existe una única relación de equivalencia R sobre X tal que X/R sea un singleton.

30 El siguiente ejercicio es informal, pero ilustrativo: Sea E el conjunto de puntos de una ciudad donde una persona puede pararse, esto es, el espacio libre de la ciudad (por comodidad, podemos ver a X como un subconjunto de R^2). Defina la relación $\sim$ sobre E así: pEq si y sólo si es posible trasladarse a pie del punto p hacia el punto q.
1. Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
2. Describa a $[p]$ la clase de un punto p cualquiera.
3. Interprete al valor $n =$ tamaño del conjunto $E/\sim$

31 Sea n un natural positivo. Dé un ejemplo de una relación de equivalencia R sobre $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z}/R$ sea un conjunto de n elementos.

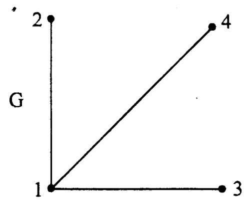
32 Sea $I = [0,1] \subseteq IR$. I^2 es, entones un cuadrado de lado 1, con borde $B = I^2 \setminus (0,1)^2$.
Defina la relación $\sim$ sobre I^2 así: $(a, b) \sim (c, d)$ si y sólo si

$[(a,b),(c,d) \in B$ ó $((a,b) \notin B$ y $(a,b)=(c,d))]$

1. Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
2. ¿Quiénes son las clases de $\sim$?
3. Encuentre un conjunto de representantes para $\sim$.
4. Así como I^2 es un cuadrado, ¿cómo puede verse, espacialmente hablando, $I^2/\sim$?

33 Un grafo no dirigido y sin lazos $G=(V,E)$ consiste en un conjunto V de vértices junto con una relación binaria $E \subseteq V^2$ irreflexiva y simétrica, llamada el conjunto de aristas. A los grafos los dibujamos como puntos (vértices) unidos por líneas (aristas).

Por ejemplo , si $V=\{1,2,3,4\}$ y $E=\{(1,4),(4,1),(1,3),(3,1),(1,2),(2,1)\}$, entonces $G=(V,E)$ es un grafo, que dibujaremos de la siguiente manera:



Dados dos grafos $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$, diremos que son isomorfos (y lo notamos : $G \cong G'$) si y sólo si existe una biyección $f: V \longrightarrow V'$ tal que para $u,v \in V (u,v) \in E$ si y sólo si $(f(u),f(v)) \in E'$.

1. Encuentre un grafo isomorfo al grafo del ejemplo de arriba (que sea distinto).
2. Sea X el conjunto de todos los grafos $G=(V,E)$ no dirigidos sin lazos tales que $V=\{1,2,3,4\}$, y defina en X la siguiente relación:

   $G=(V,E) \sim G'=(V,E')$ si y sólo si $G \cong G'$

   1. Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
   2. Exhiba un conjunto de representantes para $\sim$ (dibújelos).
   3. ¿Cuántos elementos tiene $X/\sim$? [Si $n=X/\sim$, diremos que existen n grafos distintos de cuatro vértices, módulo isomorfismo].

34 Sea $R \subseteq X^2$. Demuestre que las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad pueden enunciarse, conjuntistamente, de la siguiente manera:

1. R es reflexiva si y sólo si $Id_X \subseteq R$
2. R es simétrica si y sólo si $R^{-1}=R$.
3. R es transitiva si y sólo si $R \, o \, R \subseteq R$

35 Dados dos números reales a,b con $a \leq b$ sea $(a,b) = \{x \in IR : a < x < b\}$ (por ejemplo, $(a,a) = \varnothing$). Llamaremos **básico** a un conjunto de la forma (a,b). Sea B el conjunto de todos los básicos, esto es:

$$B = \{(a,b) : a, b \in IR, a \leq b\}$$

Dado r un número real cualquiera, sea $\sim r$ la siguiente relación de equivalencia sobre B: $(a,b) \sim_r (c,d)$ si y sólo si existe $(y,z) \in B$ tal que $r \in (y,z)$ y $(a,b) \cap (y,z) = (c,d) \cap (y,z)$.

1. Muestre que $\sim_r$ es una relación de equivalencia.
2. Muestre que si $r \in (a,b), (c,d)$, entonces $[(a,b)] \sim_r = [(c,d)] \sim_r$.
3. Dé un ejemplo de dos básicos (a,b) (c,d) tales que $r \notin (a,b), (c,d)$, pero $[(a,b)] \sim_r \neq [(c,d)] \sim_r$.
4. ¿Cuántos elementos tiene $B/\sim_r$?

36 Sea E_1 una relación de equivalencia sobre $\mathcal{P}(X)$ y defina la relación E_2 sobre $\mathcal{P}(X)$ así: AE_2B si y sólo si $A^c E_1 B^c$. Demuestre que E_2 es una relación de equivalencia. ¿Cuál es la relación entre E_1 ? y E_2 ?

37 Dado X un conjunto y $S \subseteq X$, sea $E_S = \{(A,B) \in \mathcal{P}(X) : A \,\Delta\, B \subseteq S\}$

1. Demuestre que E_S es una relación de equivalencia
2. Para $S, T \subseteq X$, ¿cómo se comparan los conjuntos $E_S \cap E_T$ y $E_{S \cap T}$?
3. Para $S, T \subseteq X$, ¿cómo se comparan los conjuntos $E_S \cup E_T$ y $E_{S \cup T}$?
4. Para $S, T \subseteq X$, ¿cómo se comparan los conjuntos $E_S \,\Delta\, E_T$ y $E_{S \Delta T}$?

38 (Una bella caracterización de las relaciones de equivalencia) Sea E una relación sobre X. Muestre que E es una relación de equivalencia sobre X si y sólo si se cumple la siguiente propiedad:

$$\forall x\ y \in X : x E y \iff (\forall z \in X : x E z \iff y E z)$$

NÚMEROS REALES

4.1 INTRODUCCIÓN

Antes de dar una definición **AXIOMÁTICA** de los números reales, debemos comentar acerca de los números naturales, enteros, racionales e irracionales.

Las operaciones aritméticas de suma, producto, diferencia, división y radicación han ido definiéndose paulatinamente según se han ido formulando nuevos postulados y nuevas teorías rigurosas.

Así tenemos:

a) **Conjunto de los números naturales** $I\!N = \{0,1,2,3,\ldots\}$. En $I\!N$ sólo se pueden definir las operaciones de adición, multiplicación y potenciación.

La formulación rigurosa de las operaciones de adición y multiplicación es como sigue:

ADICIÓN

$$+ : I\!N \times I\!N \longmapsto I\!N$$
$$(a,b) \longmapsto a+b$$
$$(a,0) \longmapsto a+0=a$$

"A cada par de números naturales (a,b) le asignamos, mediante la operación suma, el único número natural $a+b$"

MULTIPLICACIÓN

$$\bullet : I\!N \times I\!N \longmapsto I\!N$$
$$(a,b) \longmapsto a \cdot b$$
$$(a,1) \longmapsto a \cdot 1=a$$

"A cada par de números naturales (a,b) le asignamos, mediante la operación multiplicación, el único número natural $a \cdot b$"

Observamos, que con respecto a la **ADICIÓN**, el conjunto de los números naturales posee un único elemento que es el "0", llamado **IDENTIDAD ADITIVA**.

Con respecto a la multiplicación, conjunto de los números naturales posee un único elemento que es el "1", llamado **ID TIDAD MULTIPLICATIVA**.

Además, con respecto a las operac nes de **ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN** surgen los siguientes axiomas:

AXIOMAS CON RESPECTO A LA ADICIÓN

$A_1)$ $a+b=b+a$ (conmutativa)

$A_2)$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ (asociativa)

$A_3)$ $\exists!\, 0\in I\!N \,/\, a+0=0+a=a\,,\ \forall\ a\in I\!N$

existencia y unicidad de la identidad aditiva.

En el conjunto $I\!N$, planteemos la siguiente interrogante: ¿al restar dos números naturales, el resultado es un número natural?

La respuesta es **NO**

Por ejemplo : $5-2=3\in I\!N$

pero : $2-5=-3\notin I\!N$

AXIOMAS CON RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN

$M_1)$ $a\cdot b=b\cdot a$ (conmutativa)

$M_2)$ $(ab)c=a(bc)$ (asociativa)

$M_3)$ $\exists!\, 1\in I\!N \,/\, a\cdot 1=1\cdot a=a\,,\ \forall\ a\in I\!N$

existencia y unicidad de la identidad multiplicativa.

En el conjunto $I\!N$, planteemos la siguiente interrogante: ¿Al dividir dos números naturales el resultado es un número natural?

La respuesta es **NO**.

Por ejemplo : $\frac{4}{2}=2\in I\!N$

Pero : $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\notin I\!N$

Por todo el anterior, podemos afirmar que en el conjunto de los números naturales quedan bién definidas las operaciones de **ADICIÓN** y **MULTIPLICACIÓN** pero no están definidas las operaciones de **DIFERENCIA** y de **DIVISIÓN**.

La necesidad de definir la operación **DIFERENCIA**, nos obliga a "extender" el conjunto de los números naturales hacia otro conjunto "mayor" que contenga a los opuestos de los números naturales, así surgirá el conjunto de los números enteros.

$$\mathbb{Z}=\{\underbrace{\ldots,-3,-2,-1}_{\text{opuestos de los números naturales}},\underbrace{0,1,2,3,\ldots}_{I\!N}\}$$

b) Conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$).

Si al par ordenado de números naturales (a,b) le asignamos una relación de orden "mayor o igualdad" y de "estrictamente menor", obtenemos los siguientes resultados:

i) Si a cada par de números naturales (a,b) le corresponde el número natural $a-b\geq 0 \Longleftrightarrow a\geq b$, esta relación define al conjunto de los números enteros no negativos: $\mathbb{Z}_o^+ = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} = I\!N$

ii) Si a cada par de números naturales (a,b) se le asigna el número $a-b<0 \Longleftrightarrow a<b$, quedará definido el conjunto de los números enteros negativos: $\mathbb{Z}^- = \{\ldots,-3,-2,-1\}$.

Por tanto, el conjunto de los números enteros será: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

Así llegamos a la conclusión que el conjunto $\mathbb{Z}$ (números enteros) está provista de la operación interna de adición, que satisface 4 axiomas:

A_1) $a+b=b+a$

A_2) $(a+b)+c=a+(b+c)$

A_3) $\exists!\, 0\in\mathbb{Z}\,/\,0+a=0+a=a \;\;,\;\; \forall\, a\in\mathbb{Z}$

A_4) $\forall\, 0\in\mathbb{Z}\,,\, \exists!\, -a\,/\,a+(-a)=(-a)+a=0$

la operación diferencia, ha hecho posible formular el axioma A_4.

c) **Conjunto de los números racionales** $(\mathbb{Q})$

Hasta ahora, podemos resumir que el conjunto de números enteros $(\mathbb{Z})$ está provisto de las operaciones internas de adición, diferencia y multiplicación; más no de división.

En el ejemplo: $\frac{8}{2}=4\in\mathbb{Z}$, pero $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$ notamos una gran diferencia en los resultados que se obtienen al dividir 8 entre 2 y 2 entre 8.

Mientras que la división del número entero 8, entre el número entero 2, da como resultado el número entero 4; en cambio al dividir el número entero 2 entre el número entero 8, da como resultado un número de la forma $\frac{1}{4}$ que no es entero.

Entonces ¿qué clase de número es $\frac{1}{4}$? es aquí donde se introduce un nuevo conjunto, llamado **CONJUNTO DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS** o **CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES** y se denota por $\mathbb{Q}$.

La definición formal de números racionales $(\mathbb{Q})$ es como sigue:

$$\mathbb{Q}=\left\{ \frac{a}{b} \;/\; a\in\mathbb{Z} \;\wedge\; b\in\mathbb{Z} \quad , \quad \text{con } b\neq 0 \right\}$$

El conjunto $\mathbb{Q}$ (números racionales) está provisto de las operaciones: de adición, diferencia, multiplicación y división, pero no está provisto de la operación de radicación.

Por ejemplo, el resultado de extraer la raíz cuadrada de $2(\sqrt{2})$ no es un número racional. Dicho de otra manera, no existen dos números enteros a y b, tal que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ y que la fracción $\frac{a}{b}$ sea "irreductible".

Igualmente la, solución de la ecuación $x^2-3=0$ no es precisamente un número racional. Estos particulares problemas nos ayudan a intuir que es preciso definir otro conjunto numérico, esto es el **CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES I**.

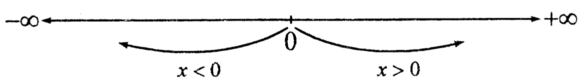
Diremos que "x" es un número irracional, cuando no existen números enteros a y b, tal que $x=\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$.

De todo lo dicho, podemos enumerar 3 consecuencias:

1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
2) $Q \cap I=\varnothing$
3) $Q \cup I=\mathbb{R}$, $\mathbb{R}=$ conjunto de los números reales.

Por la consecuencia 3) decimos que el conjunto de los números reales se obtiene reuniendo el conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales.

Una manera intuitiva de concebir el conjunto de los números reales es representándolo, geométricamente, por una línea **RECTA**, que la llamaremos **RECTA REAL**.



Cada punto de la **RECTA** representará un número real, del cero a la derecha quedarán definido los números reales positivos y del cero a la izquierda los números reales negativos.

Geométricamente queda establecido una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta con los números reales. Es decir: "*a cada punto de la recta corresponde un número real y recíprocamente, a cada número real corresponde un punto de la recta*".

$$P \longleftrightarrow a$$

P : punto de la recta
a : número real.

La doble fecha indica. "correspondencia recíproca".

Yendo al terreno de la teoría y de la abstracción, hay diversas definiciones del número real, entre estas definiciones tenemos: por sucesiones, por cortaduras, por sucesiones de intervalos encajados y axiomáticamente.

Para un curso básico de matemáticas se estima que es conveniente tratar a los números reales desde un punto de vista axiomático (Hilbert).

4.2. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DEL SISTEMA DE NÚMEROS REALES.

El sistema de los números reales, es un conjunto denotado por $I\!R$, que está provisto de dos operaciones internas: adición y multiplicación, de un axioma de distribución de la multiplicación respecto de la adición, de axiomas relativos a la igualdad, axiomas relativos a la relación de orden menor y de un axioma del Supremo.
A continuación enunciaremos, ordenadamente cada uno de los axiomas:

I. AXIOMAS DE LA ADICIÓN $(I\!R,+,0)$

La adición es una operación interna (cerrada o de clausura) definida en $I\!R$, tal que, a cada par (a,b) de números reales corresponde el único número real $a+b$, llamado la suma de a y b.

NOTACIÓN:

$$+ : I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$$
$$(a,b) \longmapsto a+b$$

<u>AXIOMAS</u>:

A$_1$) Si $(a \in I\!R \quad \wedge \quad b \in I\!R) \Rightarrow (a+b) \in I\!R$ .... (cerradura o clausura)

A$_2$) $a+b=b+a \;,\; \forall\, a,b \in I\!R$ .... (conmutativa)

A$_3$) $(a+b)+c=a+(b+c) \;,\; \forall\, a,b,c \in I\!R$ .... (asociativa)

A$_4$) $\exists!\, 0 \in I\!R \,/\, 0+a=a+0=a \;,\; \forall\, a \in I\!R$ .... (existencia y unicidad de la identidad aditiva)
"La identidad aditiva es el 0"

A$_5$) $\forall\, a \in I\!R \,,\, \exists! -a \in I\!R \,/\, a+(-a)=(-a)+a=0$ .... (existencia y unicidad del opuesto)
"El opuesto de a es $-a$"

Según este axioma: la ecuación $a+x=0$, tiene una única solución que es $x=-a$

II. AXIOMAS DE MULTIPLICACIÓN $(I\!R, \bullet, 1)$

La multiplicación es una operación interna definida en $I\!R$, de tal modo que a cada par (a,b) de números reales corresponde el único número real $a \cdot b$, llamado el producto de a y b.

NOTACIÓN $\quad \bullet : I\!R \times I\!R \longrightarrow I\!R$

$$(a,b) \longmapsto a \cdot b$$

AXIOMAS

$M_1)$ si $(a \in I\!R \ \wedge \ b \in I\!R) \Rightarrow a \cdot b \in I\!R$ .... (clausura o cerrada)

$M_2)$ $a \cdot b = b \cdot a \ , \ \forall \, a,b \in I\!R$ .... (conmutativa)

$M_3)$ $(ab)c = a(bc) \ , \ \forall \, a,b,c \in I\!R$ .... (asociativa)

$M_4)$ $\exists! \, 1 \in I\!R \, / \, 1 \cdot a = a \cdot 1 = a \ , \ \forall \, a$ .... (existencia y unicidad de identidad multiplicativa)
La identidad de la multiplicación es el 1

$M_5)$ $\forall \, a \neq 0 \ , \ \exists! \, a^{-1} = \frac{1}{a} / \, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ ... (existencia y unicidad del ***inverso***)
"El inverso de a es $a^{-1} = \frac{1}{a}$"

III. AXIOMA DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN RESPECTO DE LA ADICIÓN

$$a(b+c) = ab + ac \ , \ \forall \, a,b,c \in I\!R$$

IV. AXIOMAS DE LA IGUALDAD

Para los números a, b, c se cumplen los siguientes axiomas:

$I_1)$ $a = a \ , \ \forall \, a$ .... (Reflexiva)

$I_2)$ $a = b \Rightarrow b = a$ .... (Simetría)

$I_3)$ si $a = b \ \wedge \ b = c \Rightarrow a = c$ .... (Transitiva)

V. AXIOMAS RELATIVOS A LA RELACIÓN DE ORDEN MENOR $(<)$

Si $I\!R^+$ es el subconjunto de los números reales positivos, establecemos los siguientes axiomas:

0_1) **(LEY DE LA TRICOTOMÍA):** para cada número real "a", uno y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadero:

$$\underbrace{a \in I\!R^+}_{a>0} \vee \underbrace{-a \in I\!R^+}_{\substack{-a>0 \\ a<0}} \vee a = 0$$

Es decir: un numero real "*a*" es positivo, o es negativo, o es cero, pero nunca puede tomar dos valores a la vez.

0_2) Si $(a \in I\!R^+ \wedge b \in I\!R^+) \Rightarrow (a+b) \in I\!R^+ \wedge (a \cdot b) \in I\!R^+$

Este axioma afirma: La suma de dos números reales positivos es otro número real positivo y el producto de dos números reales positivos es otro número real positivo.

VI. AXIOMA DEL SUPREMO

"Todo subconjunto S, no vacío, de números reales acotado superiormente tiene supremo".

El axioma del supremo da sustento teórico de la existencia de los números irracionales y es una proposición de gran importancia en las matemáticas.

Por el momento nos conformaremos de enunciarlo, mas adelante lo volveremos a tratar con sumo cuidado tomando diversos ejemplos ilustrativos (ver capítulo 5)

A partir de los seis grupos de axiomas que cumple el sistema de los números reales, se deducen otras propiedades y teoremas de gran importancia que iremos demostrando a medida que avancemos el presente capítulo.

4.3 TEOREMAS RELATIVOS A LA IGUALDAD

4.3.1 TEOREMA DE IGUALDAD-ADICIÓN

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$, $\forall c \in I\!R$.

Si sumamos al número real "*a*" otro número real *c*, el resultado obtenido es un número real único: $a + c$.

DEMOSTRACIÓN

1. Por el axioma I_1 (reflexión), se cumple: $a + c = a + c$.
2. Por hipótesis se tiene que $a = b$.
3. Utilizando el principio de sustitución en el segundo miembro del paso 1, obtenemos: $a + c = b + c$.

lqqd.

4.3.2 TEOREMA DE IGUALDAD – MULTIPLICACIÓN

Si $a = b$, entonces $ac = bc$, $\forall\, c \in I\!R$.

Si multiplicamos al número real "*a*" otro número real "*c*", el resultado obtenido es un número real único: *a c*.

DEMOSTRACIÓN

1. Por el axioma reflexivo de la igualdad, tenemos: $a\,c = a\,c$
2. Por hipótesis tenemos: $a = b$
3. Por el principio de sustitución, en el lado derecho de la igualdad en 1, escribimos: $ac = bc$

lqqd

4.3.3 TEOREMA DE CANCELACIÓN – ADICIÓN

Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$

PRUEBA

1. Por hipótesis se tiene: $a + c = b + c$
2. Por el teorema 4.3.1 y porque para $c \in I\!R$, existe $-c \in I\!R$ hacemos en el paso 1:
   $(a+c) + (-c) = (b+c) + (-c)$
3. $a + [c+(-c)] = b + [c+(-c)]$ .... por A_3
4. $a + 0 = b + 0$ .... por A_5
5. $a = b$ .... por A_4

lqqd.

4.3.4 TEOREMA DE CANCELACIÓN – MULTIPLICACIÓN

Si $ac = bc \;\wedge\; c \neq 0$, entonces $a = b$.

DEMOSTRACIÓN

1. Por hipótesis tenemos: $ac = bc$
2. Si $c \neq 0$, entonces $\exists c^{-1}$ y aplicamos el teorema 4.3.2 en el paso 1, escribiendo:
   $(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$
3. $a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$ .... por M_3
4. $a \cdot 1 = b \cdot 1$ .... por M_5
5. $a = b$ .... por M_4

lqqd.

4.4 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

4.4.1 TEOREMA: $\forall\, a \in IR$, se cumple $a \cdot 0 = 0$

DEMOSTRACIÓN

1. Partiré de $a \cdot 0$

2. Si en 1 aplicamos el axioma A_4, obtenemos:

$$
\begin{array}{llr}
a \cdot 0 & = a \cdot 0 + 0 & \\
3. & = a \cdot 0 + \overbrace{(a + (-a))} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ A_5 \\
 & = (a \cdot 0 + a) + (-a) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ A_3 \\
 & = (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ M_4 \\
 & = a \underbrace{(0 + 1)}_{1} + (-a) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ D \\
 & = \underbrace{a \cdot 1} + (-a) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ A_4 \\
 & = \underbrace{a + (-a)} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ M_4 \\
 & = 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ A_5
\end{array}
$$

lqqd.

4.4.2 TEOREMA: $\forall\, a \in IR$, se cumple $-a = (-1)a$

DEMOSTRACIÓN

Si pruebo que: $a + (-1)a = 0$, entonces $(-1)a = -a$

Veamos: Partiré de $a + (-1)a$

$$
\begin{array}{lr}
\underbrace{a} + (-1)a = & \\
= 1 \cdot a + (-1)\, a & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ M_4 \\
= a \cdot 1 + a(-1) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ M_2 \\
= a \underbrace{(1 + (-1))} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A_4 \\
= a \cdot 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A_5 \\
= 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{Teo. 4.1}
\end{array}
$$

Luego: $a + (-1)\, a = 0$, lo que implica $(-1)\, a = -a$

ACLARACIÓN: Según A_5, el opuesto de a es $-a$, tal que $a + (-a) = 0$

Según A_5 , si escribimos $a+(-a)=0$ implica que $-a$ es el **opuesto de *a***, es decir $x=-a$ es la solución de la ecuación $a+x=0$.

Igualmente, si tenemos: $a+(-1)a=0$, implica que $(-1)a$ $\underbrace{\text{es el}}_{=}$ $\underbrace{\text{opuesto de } a}_{-a}$, es decir, $x=(-1)a$ es también solución de la ecuación $a+x=0$, por lo tanto: $(-1)a=-a$.

4.4.2.1 COROLARIO $a\cdot(-b)=-(ab)=(-a)b$, $\forall\, a,b\in I\!R$

DEMOSTRACIÓN: Partiré de $a(-b)$ para llegar en $-(ab)$ y en $(-a)b$

Veamos:

1) $a\underbrace{(-b)}=$
2) $=a((-1)b)$ .... Teo. 4.2
3) $=(a(-1))b$ .... M_3
4) $=((-1)a)b$ .... M_2
5) $=(-1)(ab)$ .... M_3
6) $=-(ab)$ .... Teo. 4.4.2
7) Del paso 4) $((-1)a)b$ deducimos:

$\underbrace{((-1)a)}b=$

8) $=(-a)b$ .... Teo. 4.4.2

4.4.3 TEOREMA: $-(-a)=a$, $\forall\, a\in I\!R$

"El opuesto del opuesto de un número real es el mismo número real"

DEMOSTRACIÓN:

1) Según el axioma A_5, tenemos:

$(-a)+\underline{\underline{a}}=0$, lo cual implica que el opuesto de $(-a)$ es $\underline{\underline{a}}$.

2) Igualmente, si escribimos:
$(-a)+\underline{\underline{(-(-a))}}=0$ implica que el opuesto de $(-a)$ es $\underline{\underline{-(-a)}}$.

3) Por 1) y 2) afirmamos que la ecuación $(-a)+x=0$, tiene única solución y se cumple: $a=-(-a)$

lqqd.

4.4.4 TEOREMA: $(-a)(-b)=ab \ , \ \forall a,b\in I\!R$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}(-a)(-b)&=(-a)[(-1)b] &&, \text{ por Teo. 4.4.2: } -b=(-1)b\\ &=[(-a)(-1)]b &&, \text{ por } M_3\\ &=[(-1)(-a)]b &&, \text{ por } M_2\\ &=\underbrace{[-(-a)]}_{a}b &&, \text{ por Teo. 4.4.2: } (-1)(-a)=-(-a)\\ &=a\cdot b &&, \text{ por Teo. 4.4.3}\end{aligned}$$

4.4.5 TEOREMA: $\forall a\in I\!R$, $a\neq 0$ implica que $(a^{-1})^{-1}=a$.
"El inverso del inverso de un número real *a*, diferente de cero, es el mismo número real"

PRUEBA:

1) Según el axioma M_5, si $a\neq 0$, el inverso de a es a^{-1}, tal que $a\cdot a^{-1}=\underline{\underline{a^{-1}}}\,a=1$
2) Igualmente, el inverso de a^{-1} es $(a^{-1})^{-1}$, tal que $\underline{\underline{a^{-1}}}(a^{-1})^{-1}=1$
3) Según 1. "a" es solución de la ecuación $a^{-1}x=1$
4) Según 2 "$(a^{-1})^{-1}$" es solución de la ecuación $a^{-1}x=1$
5) Como la solución es única, se cumplirá que $x=a=(a^{-1})^{-1}$

4.4.6 TEOREMA: $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$, $\forall a,b\in I\!R$ con $a\neq 0$, $b\neq 0$, $ab\neq 0$

PRUEBA:

Bastará probar que $(ab)(a^{-1}b^{-1})=1$, esto confirmaría que el inverso multiplicativo de $a^{-1}b^{-1})$ es $(ab)^{-1}$.

Veamos:

$$(ab)(a^{-1}b^{-1})=?$$

$$\begin{aligned}(ab)(a^{-1}b^{-1})&=a(ba^{-1})b^{-1} &&\text{.......................... } M_3\\ &=a(a^{-1}b)b^{-1} &&\text{.......................... } M_2\\ &=(aa^{-1})(bb^{-1}) &&\text{.......................... } M_3\\ &=\ 1\ \cdot\ 1\ =\ 1 &&\text{.............. } M_5\end{aligned}$$

2. Por otro lado, si $ab \neq 0 \Rightarrow \exists (ab)^{-1}$, tal que $(ab)(ab)^{-1} = 1$, por M_5.
3. Por 1 y 2, tendremos: $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (ab)(ab)^{-1}$
4. Lo cual implica que: $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ por Teo. 4.3.4

4.4.7 TEOREMA: $\forall a \in I\!R$, con $a \neq 0$, implica $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

PRUEBA:

1. $\frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a^{-1}}$ por el axioma M_5 : $\frac{1}{a} = a^{-1}$
2. $= (a^{-1})^{-1}$ .... por M_5
3. $= a$ .... por Teo. 4.5

4.4.8 TEOREMA: si a y b son números reales diferentes de cero, implica que $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

PRUEBA:

1. $\frac{1}{ab} = (ab)^{-1}$ .... por M_5
2. $= (a^{-1} \cdot b^{-1})$ .... por Teo. 4.4.6
3. $= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ .... por M_5 : $a^{-1} = \frac{1}{a}$ y $b^{-1} = \frac{1}{b}$

4.4.8.1 TEOREMA: Sean a y b dos números reales, entonces

$$ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$$

DEMOSTRACIÓN:

$(\Rightarrow)$ Si $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.

1) Hipótesis: $ab = 0$

2) Suponer que $a \neq 0$, entonces $\exists a^{-1}$, tal que en 1): $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$

$$\underbrace{(a^{-1}a)}_{1} b = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0$$
$$\Rightarrow b = 0$$

3) Suponer que $b \neq 0 \Rightarrow \exists b^{-1}$ tal que: $(ab)b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$

$$\Rightarrow \quad a(bb^{-1}) = 0 \Rightarrow a \cdot 1 = 0 \Rightarrow a = 0$$

4) Si $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$

$(\Leftarrow)$ Si $(a=0 \;\vee\; b=0) \Rightarrow ab=0$

1) Hipótesis: $a=0 \;\vee\; b=0$

2) Si $a=0 \quad \Rightarrow \quad ab=0\cdot b=0$

3) Si $b=0 \quad \Rightarrow \quad ab=a\cdot 0=0$

ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA

A continuación, enunciaremos y demostraremos los teoremas que justifican la solución de una ecuación lineal con una incógnita de la forma $ax+b=c$ en el que a, b, c son números reales con $a\neq 0$ y "x" es la variable desconocida, que también es un número real.

4.4.9 TEOREMA: Sean a, b, x números reales cualesquiera, entonces:
$$x+b=a \iff x=a+(-b)$$

DEMOSTRACIÓN:

$(\Rightarrow)$ Si $x+b=a \Rightarrow x=a+(-b)$

Veamos:

1. por el Teo. 4.3.1 en la ecuación $x+b=a$, sumamos $(-b)$:

$$(x+b)+(-b) = a+(-b)$$

2. $x+\underbrace{[b+(-b)]} = a+(-b)$ .... A_3
3. $\underbrace{x+0}_{x} = a+(-b)$ .... A_5
4. $x = a+(-b)$ .... A_4

$(\Leftarrow)$ Si $x=a+(-b) \Rightarrow x+b=a$

1. De $x=a+(-b)$ .... (hipótesis)
2. $x+b=[a+(-b)]+b$ .... por Teo. 4.3.1
3. $x+b=a+\underbrace{[(-b)+b]}$ .... A_3
4. $x+b=\underbrace{a+0}_{a}$ .... A_5
5. $x+b=a$ .... A_4

4.5 DIFERENCIA ENTRE DOS NÚMEROS REALES

4.5.1 DEFINICIÓN: Dados dos números reales a y b, llamamos **DIFERENCIA ENTRE** a y b (en este orden) al número real "c", tal que:

$$\underbrace{\boxed{c = a - b}}_{\text{diferencia de } a \text{ y } b.} \iff c + b = a$$

El número "a" recibe el nombre de minuendo
y el número "b" " " " " sustraendo

4.5.1.1 A partir de la definición de la diferencia entre dos números reales a y b, podemos formalizar la **OPERACIÓN** interna llamada **SUSTRACCIÓN**.

$$\begin{aligned} - : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto a - b \end{aligned}$$

"La sustracción es una operación interna que hace corresponder a cada par (a,b) de números reales, su diferencia $a - b$"

4.5.2 TEOREMA Si $a, b, x \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$, entonces
$x \cdot b = a \longleftrightarrow x = a \cdot b^{-1}$

($\Rightarrow$) Si $x \cdot b = a \Rightarrow x = a \cdot b^{-1}$

1. De $x \cdot b = a$ .... (hipótesis)
2. $(x \cdot b)\, b^{-1} = a \cdot b^{-1}$ .... por Teo. 4.3.2
3. $x \cdot \underbrace{(b \cdot b^{-1})} = a \cdot b^{-1}$ .... M_3
4. $\underbrace{x \cdot 1} = a \cdot b^{-1}$ .... M_5
5. $x = a \cdot b^{-1}$ .... M_4

($\Leftarrow$) Si $x = a \cdot b^{-1} \Rightarrow x \cdot b = a$

1. De $x = a \cdot b^{-1}$ .... (hipótesis)
2. $x \cdot b = (a\, b^{-1})\, b$ .... (Teo. 4.3.2)
3. $= a\,\underbrace{(b^{-1}\, b)}$ .... (M_3)
4. $= a \cdot 1$ .... (M_5)
5. $= a$ .... (M_4)

4.5.2.1 OBSERVACIÓN: El teorema 4.5.2 nos permitirá definir la división de números reales: $a\,b^{-1}$.

4.6 COCIENTE DE DOS NÚMEROS REALES

4.6.1 DEFINICIÓN: Dados dos números reales a y b, con $b \neq 0$; llamamos **COCIENTE de *a* y *b*** (en este orden) al único número real "c", tal que:

$$\boxed{\begin{array}{l} c = \frac{a}{b} \\ c = ab^{-1} \end{array}} \longleftrightarrow \quad c\,b = a\,,\ b \neq 0$$

Donde:
"a" se llama dividendo
"b" se llama divisor.

4.6.1.1 OBSERVACIÓN: A partir de la definición de **COCIENTE de *a* y *b*** es posible formalizar la definición de la división de números reales.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a,b) \longmapsto \tfrac{a}{b} = ab^{-1} \quad , \quad b \neq 0$$

"Llamemos **DIVISIÓN** a la operación que a cada par de números reales (a,b), con $b \neq 0$, le hace corresponder su cociente ab^{-1}".

4.6.1.2 APLICACIONES

1. Probar que: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

PRUEBA: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1}$ .... (por 4.6.1)

$$= (ab^{-1})(1) + (cd^{-1})(1)$$

$$= (ab^{-1})(dd^{-1}) + (c \cdot d^{-1})(b \cdot b^{-1}) \text{ ...... (por hipótesis y } M_4 \text{ , } M_5\text{)}$$

$$= (a \cdot d)(b^{-1}d^{-1}) + (cb)(d^{-1}b^{-1})$$

$$= (ad)(b^{-1}d^{-1}) + (bc)(b^{-1}d^{-1})$$

$$= [ad + bc]\,(b^{-1}d^{-1})$$

$$= [ad + bc] \cdot (bd)^{-1}$$

$$= \frac{ad + bc}{bd}$$

(2) Probar que: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$

PRUEBA: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=(ab^{-1})(cd^{-1})$

$$=(ac)(b^{-1}d^{-1})$$

$$=(ac)(bd)^{-1}$$

$$=\frac{ac}{bd}$$

(3) Probar que: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$

PRUEBA: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a.b^{-1}}{c.d^{-1}}$

$$=(ab^{-1})(cd^{-1})^{-1}$$

$$=(ab^{-1})(c^{-1}(d^{-1})^{-1})$$

$$=(ab^{-1})(c^{-1}d)$$

$$=(ad)(b^{-1}c^{-1})$$

$$=(ad)(bc)^{-1}$$

$$=\frac{ad}{bc}$$

4.6.1.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Par resolver ecuaciones se aplican ordenadamente las propiedades de la igualdad de números reales, convirtiendo la ecuación dada en otra más sencilla que sea equivalente a la primera.

4.6.1.3.1 ECUACIONES EQUIVALENTES.

Dos ecuaciones son equivalentes sí, y sólo si, tienen el mismo conjunto solución. Para obtener ecuaciones que sea equivalentes, se aplican los teoremas:

4.3.1) $a=b \Rightarrow a+c=b+c$ igualdad – adición

4.3.2) $a=b \Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$ igualdad – multiplicación

4.3.3) $a+c=b+c \Rightarrow a=b$ cancelación – adición

4.3.4) $ac=bc \Rightarrow a=b$, si $c\neq 0$ cancelación – multiplicación

El teorema 4.3.1 afirma "si a los dos miembros de una ecuación sumamos un mismo número, obtenemos otra ecuación equivalente a la primera".

El teorema 4.3.2 afirma "si a los dos miembros de una ecuación multiplicamos por un mismo número real diferente de cero obtenemos otra ecuación equivalente a la primera".

EJEMPLO: Resolver $5x+2=2x-3$

Solución: $5x+2=2x-3$

$$\Longleftrightarrow \quad (5x+2)+(-2)+(-2x) = (2x-3)+(-2)+(-2x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 4.3.1$$

$$\Longleftrightarrow \quad [5x+(-2x)]+[2+(-2)] = [2x+(-2x)]+[-3+(-2)] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; A_3$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3x \qquad 0 = 0 \quad + \quad (-5) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; A_5$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3x = -5 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; A_4$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3^{-1}(3x) = (3^{-1})(-5) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 4.3.2$$

$$\Longleftrightarrow \quad (3^{-1}3)x = (3^{-1})(-5) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; M_3$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 \cdot x = \tfrac{1}{3}(-5) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; M_5$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \tfrac{-5}{3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; M_4$$

4.7 ORDENACIÓN ENTRE LOS NÚMEROS REALES

4.7.1 AXIOMAS DE ORDEN

Los axiomas de orden, es el grupo de proposiciones que nos permite establecer una **ORDENACIÓN** entre los números reales. Según esta ordenación se puede comparar y decidir si un número real es mayor o menor que otro. Aquí introducimos el concepto primitivo de **POSITIVO**, cuando se enuncian un conjunto de axiomas y propiedades de **ORDEN**, que nos permitirán definir, más adelante, los conceptos de "**MENOR QUE**" y "**MAYOR QUE**".

El punto de partida para determinar y enunciar los axiomas y propiedades relativos a la **ordenación del sistema de los números reales**, es el supuesto que existe un subconjunto de números reales $I\!R^+$, llamado conjunto de **números reales positivos**.

Supongamos que existe el subconjunto $I\!R^{+} \subset I\!R$, que satisface los tres axiomas de orden siguientes:

0_1) Si $[a \in I\!R^{+} \wedge b \in I\!R^{+}] \Rightarrow (a+b) \in I\!R^{+} \wedge a \cdot b \in I\!R^{+}$

0_2) LEY DE LA TRICOTOMÍA:
Para cada número real "a", uno y sólo una de las siguientes posibilidades es verdadera: $a \in I\!R^{+} \vee -a \in I\!R^{+} \vee a = 0$

0_3) $0 \notin I\!R^{+}$

Los tres axiomas que acabamos de enunciar, nos permitirán definir los símbolos:

$<$: menos que
$\leq$: menor o igual que
$>$: mayor que
$\geq$: mayor o igual que

Por ejemplo:

1) $a < b$ significa que $(b - a)$ es positivo.
2) $b > a$ significa que $a < b$
3) $a \leq b$ significa que $a < b \vee a = b$
4) $b \leq a$ significa que $a \leq b$
5) $a > 0$ significa que "a es positivo"
6) $a < 0$ significa que "a es negativo"

4.7.2 DEFINICIÓN

Con respecto al conjunto $I\!R^{+}$, decimos que:

i) Un número real "a" es positivo sí, y sólo si $a \in I\!R^{+}$

ii) Un número real "a" es negativo sí, y sólo si $-a \in I\!R^{+}$

Según el axioma 0_2 : $a \notin I\!R^{+} \Longleftrightarrow$ "a es negativo" $\vee$ "$a = 0$"

$-a \notin I\!R^{+} \Longleftrightarrow$ "a es positivo" $\vee$ "$a = 0$"

4.7.3 DEFINICIÓN

Sean $a \in I\!R$ y $b \in I\!R$, decimos que: $a < b \Longleftrightarrow \underbrace{(b-a) \in I\!R^{+}}_{b-a>0}$

"a es menor que b", sí y sólo si, $b - a$ es positivo.

4.7.4 Según la definición 4.7.3, la definición 4.7.2 se redefine del siguiente modo:

i) Todo número real positivo "a" es mayor que cero.

Pues: $0 < a \iff a - 0 = a \in I\!R^+$

ii) Todo número real negativo "a" es menor que cero.

Pues: $a < 0 \iff 0 - a = -a \in I\!R^+$

4.8 TEOREMAS

4.8.1 TEOREMA

a) Si $[a < 0 \wedge b < 0] \Rightarrow ab > 0$

"El producto de dos números reales negativos es un número positivo"

b) Si $[a > 0 \wedge b < 0] \Rightarrow ab < 0$

"El producto de un número positivo por otro negativo, es un número negativo"

4.8.1.1 COROLARIO: (Regla de los signos para la multiplicación)

i) $ab > 0 \iff [a > 0 \wedge b > 0] \vee [a < 0 \wedge b < 0]$

"El producto de dos números reales es positivo sí, y sólo si tienen el mismo signo".

ii) $ab < 0 \iff [a > 0 \wedge b < 0] \vee [a < 0 \wedge b > 0]$

"El producto de dos números reales es negativo sí, y sólo si tienen signos diferentes".

4.8.1.2 COROLARIO: Si $a \neq 0$, es $a^2 > 0$

"Para cada número real a, diferente de cero, a^2 es positivo"

4.8.1.3 COROLARIO: $1 > 0$

"El número real 1 es positivo"

4.8.2 TEOREMA DE TRANSITIVIDAD.

Sean a, b, y c números reales.

Si $[a < b \wedge b < c] \Rightarrow a < c$

4.8.3 TEOREMA DE ORDEN – ADICIÓN

Sean a, b y c números reales. Si $a < b$ implica que $a + c < b + c$,$\forall\ c \in IR$

"si en ambos lados de una desigualdad se suma un mismo número real, el sentido de la desigualdad no se altera".

4.8.4 TEOREMA SOBRE ADICIÓN DE DESIGUALDADES.

Si a, b, c y d son números reales, entonces:

$[a < b \ \wedge \ c < d]$ implica que $[a + c < b + d]$

"si se suman dos desigualdades del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido".

4.8.5 TEOREMA DE ORDEN-MULTIPLICACIÓN

Sean a, b y c números reales

$$\text{Si } a < b, \text{ se cumplen } \begin{cases} 1) \text{ si } c > 0 \Rightarrow ac < bc \\ 2) \text{ si } c < 0 \Rightarrow ac > bc \end{cases}$$

1) "si en ambos lados de una desigualdad se multiplica un número real positivo, el sentido de la desigualdad no se altera".

2) "si en ambos lados de una desigualdad se multiplica un número real negativo", el sentido de la desigualdad cambia".

4.8.6 TEOREMA: Si $a < b \Rightarrow -a > -b$

Este teorema afirma: si a una desigualdad se multiplica por -1, entonces la desigualdad cambia de sentido.

4.8.7 TEOREMA: Si $[0 \leq a < b \ \wedge \ 0 \leq c < d]$ implica que $ac < bd$.

Este teorema afirma que dos desigualdades, del mismo sentido, se multiplican miembro a miembro sólo cuando los extremos de ambas desigualdades son positivos.

4.8.8 TEOREMA: a^{-1} tiene el mismo signo que a.

Este teorema afirma que:

i) si $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

ii) y si $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$

4.8.9 TEOREMA: Si $[a \text{ y } b$ tienen el mismo signo y $a<b\,] \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

Este teorema afirma que: "Una desigualdad se **INVIERTE** sólo cuando los términos extremos son positivos o cuando son negativos, pero no se podrán invertir cuando los extremos tienen signos opuestos.

Ejemplos:

1) $\frac{2}{3}<x-1<4 \Rightarrow \frac{3}{2}>\frac{1}{x-1}>\frac{1}{4}$, $x \neq 1$

2) $-\frac{3}{5}>\frac{x}{x+3}>-\frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{5}{3}<\frac{x+3}{x}<-\frac{3}{8}$, $x \neq 0$, $x \neq -3$

3) $-5<\frac{2x+1}{x-5}<6 \longleftarrow$ **NO** se puede invertir, porque los extremos tienen signos opuestos.

> *NOTA:*
> 1) Todos estos teoremas se demuestran en base a los axiomas preestablecidos en este capítulo.
> 2) Los teoremas del 4.8.1 al 4.8.9 se aplican en los siguientes casos:
>   a) Para resolver inecuaciones.
>   b) Para hallar el rango de una función.
>   c) Para acotar funciones.
>   d) Para hallar el supremo e infinito de funciones.

DEMOSTRACIÓN de 4.8.1

a) Si $a<0 \wedge b<0 \Rightarrow ab>0$

PRUEBA:

1) Si a y b son números negativos, entonces $-a$ y $-b$ son positivos.
2) Si $-a$ y $-b$ son positivos, es decir, si $-a \in I\!R^+ \wedge -b \in I\!R^+$ entonces $(-a)(-b) \in I\!R^+$
3) Pero $(-a)(-b)=ab \in I\!R^+$, o lo que es lo mismo decir $ab>0$.

b) Si $a>0 \wedge b<0 \Rightarrow ab<0$

PRUEBA:

1) Sea a un número real positivo, y b un número real negativo, es decir: $a \in I\!R^+ \wedge -b \in I\!R^+$.

2) Si $a \in I\!R^+ \ \wedge \ -b \in I\!R^+ \ \Rightarrow \ (a)(-b) \in I\!R^+$

3) Pero: $(a)(-b) = -ab \in I\!R^+$, lo cual implica que ab es negativo, es decir $ab < 0$.

DEMOSTRACIÓN del COROLARIO 4.8.1.1

i) Si $\underbrace{ab > 0,}_{p}$ entonces $\underbrace{a \text{ y } b \text{ tienen el mismo signo.}}_{q}$

PRUEBA: (La prueba es por el absurdo: $\sim q \Rightarrow \sim p$)

Veamos:

1) $\sim q$: Supongamos que a y b no tienen el mismo signo, entonces puede ocurrir dos alternativas: a es positivo y b es negativo o, a es negativo y b positivo.

2) Si a es positivo y b negativo, es decir: $a \in I\!R^+ \ \wedge \ -b \in I\!R^+$, entonces $(a)(-b) \in I\!R^+$.

3) Pero: $(a)(-b) = -(ab) \in I\!R^+$, implica que ab es negativo, lo cual contradice a la hipótesis.
Debe ser entonces que: a y b tienen el mismo signo.

4) Si a es negativo y b es positivo, es decir $-a \in I\!R^+ \ \wedge \ b \in I\!R^+$, implica que $(-a)(b) \in I\!R^+$.

5) Pero $(-a)(b) = -(ab) \in I\!R^+$, lo cual implica que ab es negativa Esta afirmación contradice a la hipótesis. Debe ser entonces que: a y b tienen el mismo signo.

ii) Si $ab < 0$, entonces a y b tienen signos diferentes.
(La demostración es por el absurdo) .... *Queda como ejercicio......*

PRUEBA DEL COROLARIO 4.8.1.2: Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

1) Si $\boldsymbol{a} \neq 0$, implica que $\boldsymbol{a}$ es positiva o $\boldsymbol{a}$ es negativo.

2) Si a es positivo, es decir $a \in I\!R^+ \wedge a \in I\!R^+ \ \Rightarrow \ a \cdot a \underbrace{= a^2 \in I\!R^+}_{a^2 > 0}$

3) Si a negativo, entonces $-a \in I\!R^+ \wedge -a \in I\!R^+$, lo cual implica que $(-a)(-a) \in I\!R^+$

4) Pero $(-a)(-a) = a \cdot a = a^2 \in I\!R^+$, es decir: $a^2 > 0$

PRUEBA DEL COROLARIO 4.8.1.3: $1>0$

Si $1\neq 0$, entonces $1.1=1^2=1>0$ ....(por 8.1.2)

PRUEBA DEL TEOREMA 4.8.2: Si $[a<b \wedge b<c] \Rightarrow a<c$

Debo probar que $(c-a)\in IR^+$

1) Por hipótesis, se tiene: $a<b \wedge b<c$

2) Si $a<b$ implica que $b-a$ es positivo, es decir $(b-a)\in IR^+$

   Si $b<c$ implica que $c-b$ es positivo, es decir $(c-b)\in IR^+$

3) Si $[(b-a)\in IR^+ \wedge (c-b)\in IR^+]$, entonces $\underbrace{[(b-a)+(c-b)]}_{(c-a)\in IR^+}\in IR^+$

4) Que $(c-a)\in IR^+$ implica que $a<c$

PRUEBA DEL TEOREMA 4.8.3: si $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

Debo probar que: $[(b+c)-(a+c)]\in IR^+$

Veamos:

1) Por hipótesis: $a<b$

2) Lo cual implica que: $(b-a)$ es positivo es decir, $(b-a)\in IR^+$

3) Pero $b-a=(b-a)+0$

$$=(b-a)+[\overbrace{c+(-c)}^{0}]$$

$$=[(b+c)-(a+c)]\in IR^+$$

4) Es decir: $a+c<b+c$

PRUEBA DEL TEOREMA 4.8.4: Si $a<b \wedge c<d \Rightarrow a+c<b+d$

Debo probar que: $[(b+d)-(a+c)]\in IR^+$

Veamos:

1) Por hipótesis, se tiene: $a < b \ \wedge \ c < d$

2) Si $a < b$ implica que: $a + c < b + c$ (por el Teorema 4.8.3)

3) Si $c < d$ implica que: $b + c < b + d$ (por el Teorema 4.8.3)

4) Por 2) y 3) y aplicando el teorema de transitividad, implica: $a + c < b + d$

PRUEBA DEL TEOREMA 4.8.5:

Si $a < b$, se cumplen $\begin{cases} i) \text{ si } 0 < c \Rightarrow ca < cb \\ ii) \text{ si } c < 0 \Rightarrow ca > cb \end{cases}$

PRUEBA de *i*)

Debo probar que: $cb - ca$ es positivo.

Veamos:

1) Por hipótesis: $a < b$, lo cual implica que $b - a$ es positivo, es decir $(b - a) \in I\!R^+$

2) Si $0 < c \Rightarrow c - 0 = c \in I\!R^+$

3) Por 1) y 2) implica que $\underbrace{c(b-a)}_{(cb-ca) \in I\!R^+} \in I\!R^+$

4) Lo cual implica que $ca < cb$.

PRUEBA de *ii*)

Debo probar que $ca - cb$ es positivo, es decir $(ca - cb) \in I\!R^+$

Veamos:

1) Por hipótesis: $a < b$, lo cual implica que $(b - a)$ es positivo, es decir $(b - a) \in I\!R^+$

2) Como $c < 0$, implica que $0 - c = -c \in I\!R^+$

3) De 1) y 2) implica que: $(b - a)(-c) \in I\!R^+$

4) Pero $(b - a)(-c) = -bc + ac = ac - bc$, implica que $(ac - bc) \in I\!R^+$, luego
$bc < ac \iff ac > bc$

PRUEBA DEL TEOREMA 4.8.6: Si $a<b \Rightarrow -a>-b$

Debo probar que: $[-a-(-b)]$ es positivo.

Veamos:

1) Por hipótesis se tiene $a<b$, lo cual implica aplicar el teorema 8.5 *ii*) haciendo $c=-1<0$

2) Luego, si $a<b \wedge -1<0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(-1)a>(-1)b}$

3) Pero $(-1)a=-a$ y $(-1)b=-b \Rightarrow \quad -a>-b$

PRUEBA DEL TEOREMA 4.8.7: Si $[0 \le a<b \wedge 0 \le c<d] \Rightarrow ac<bd$

1) Por hipótesis se tiene $0 \le a<b$, que es equivalente: $0 \le a \wedge a<b$

2) Por hipótesis se tiene $0 \le c<d$, que se equivalente: $0 \le c \wedge c<d$

3) Según el paso 1: Se tiene $\underline{b>0}$ y según el paso 2, se tiene: $\underline{c<d}$, aplicando el teorema 4.8.5 *i*), obtenemos: $\underline{bc<bd}$.

4) Según el paso 2, se tiene: $0 \le c$ que es equivalente: $\underbrace{c>0}_{(I)} \vee \underbrace{c=0}_{(II)}$

(I) Si $c>0 \wedge a<b$ (según paso 1), implica que $ac<bc$ .... (Teorema 4.5.8*i*)
según los pasos 3) e (I): Si $ac<\underline{bc} \wedge \underline{bc}<bd$ entonces $ac<db$ ... (Toerema 8.2)

II) Si $c=0 \begin{cases} a \cdot c=a \cdot 0=0 \\ b \cdot c=b \cdot 0=0 \end{cases} bc=ac$

Al sustituir en el paso 3) $\underline{bc}<bd$ obtenemos: $ac<bd$

lqqd

PRUEBA DEL TEOREMA 4.8.8: a^{-1} tiene el mismo signo que a.

Debo probar dos cosas $\begin{cases} i) \text{ si } \quad a>0 \Rightarrow a^{-1}>0 \\ ii) \text{ si } \quad a<0 \Rightarrow a^{-1}<0 \end{cases}$

1) Por el Corolario 4.8.1.3 se ha probado que $1>0$.

2) Por el **AXIOMA** M_5, si $a \neq 0$, $\exists\, a^{-1}$, tal que $1=a \cdot a^{-1}$

3) Sustituir 2) en 1): $a \cdot a^{-1} > 0$

4) Por el Corolario 4.8.1.1   *i*) Si $a \cdot a^{-1} > 0 \wedge a > 0$, implica que $a^{-1} > 0$

ii) Si $a \cdot a^{-1} > 0 \wedge a < 0$, implica que $a^{-1} < 0$

PRUEBA DEL TEOREMA 4.8.9:

Si [a y b tienen el mismo signo y $a < b$] $\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Veamos:

1) Por el Teorema 4.8.8 $\begin{cases} i) \text{ Si } a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0 \wedge b^{-1} > 0 \\ ii) \text{ Si } a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0 \wedge b^{-1} < 0 \end{cases}$

2) De 1i) Si $[a^{-1} > 0 \wedge b^{-1} > 0] \vee [a^{-1} < 0 \wedge b^{-1} < 0]$ implica que $a^{-1}b^{-1} > 0$

multiplicar en ambos miembros de la hipótesis: $a < b$, el número $a^{-1}b^{-1} > 0$

Implica:
$$\begin{aligned} & a(a^{-1}b^{-1}) < b(a^{-1}b^{-1}) \\ \Rightarrow\ & (aa^{-1})b^{-1} < a^{-1}(bb^{-1}) \\ \Rightarrow\ & 1 \cdot b^{-1} < a^{-1} \cdot 1 \\ \Rightarrow\ & b^{-1} < a^{-1} \\ \Rightarrow\ & \tfrac{1}{b} < \tfrac{1}{a} \Longleftrightarrow \tfrac{1}{a} > \tfrac{1}{b} \end{aligned}$$

4.9 RELACIÓN MENOR O IGUAL EN EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

4.9.1 DEFINICIONES

Si a y b son números reales, establecemos:

(I) $\boxed{a \leq b}$ sí, y solo si $\boxed{a < b \vee a = b}$

(II) $\boxed{b \geq a}$ sí, y solo si $\boxed{a \leq b}$

Donde: $a \leq b$ se lee "*a* menor o igual que *b*"
$a \geq b$ se lee "*a* mayor o igual que *b*"

4.9.2 PROPIEDADES:

Para todo números reales a, b y c, se cumplen las siguientes propiedades:

P_1) $a \leq a \;,\; \forall\, a \in I\!R$ .... (Reflexiva)

P_2) $a \leq b \;\wedge\; b \leq a \;\Rightarrow\; a = b$ .... (Asimétrica)

P_3) $a \leq b \;\wedge\; b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$ .... (Transitiva)

P_4) $\forall\, a,b \in I\!R :\; a \leq b \;\vee\; b \leq a$ .... (Conexa)

P_5) $a \leq b$ implica $a + c \leq b + c$

p_6) *i*) $a \leq b \;\wedge\; c \geq 0 \;\Rightarrow\; ac \leq bc$

ii) $a \leq b \;\wedge\; c \leq 0 \;\Rightarrow\; ac \geq bc$

4.9.2.1 DEFINICIÓN:

La relación "Menor o igual" es una **RELACIÓN DE ORDEN** en $I\!R$, cuando cumple las propiedades P_1, P_2, y P_3.

4.9.2.2. DEFINICIÓN:

La relación "**MENOR O IGUAL**", es una "**RELACIÓN DE ORDEN TOTAL**" en $I\!R$, cuando cumple las propiedades P_1, P_2, P_3 y P_4.

DEMOSTRACIÓN de P_1: $a \leq a \;,\; \forall\, a \in I\!R$

Debo probar que: $a = a \;\vee\; a < a$

Para ello, aplicaremos la implicación: $p \Rightarrow (p \vee q)$, siendo q cualquier proposición.

Veamos:

1) Por la propiedad reflexiva de igualdad de números reales se tiene: $p : a = a$

2) Pero $p \Rightarrow (p \vee q)$, $\forall\, q$; en particular si q es $q : a < a$

Así tendremos que: $a = a \;\Rightarrow\; \underbrace{a = a \;\vee\; a < a}_{a \leq a}$

3) Lo cual implica que: $a \leq a \;,\; \forall\, a$

DEMOSTRACIÓN de P_2: Si $a \leq b \;\wedge\; b \leq a \;\Rightarrow\; a = b$

1) Hipótesis: $\qquad a \leq b \qquad \wedge \qquad b \leq a$

2) $\qquad \underbrace{a < b \ \vee \ a = b} \qquad \wedge \qquad \underbrace{b < a \ \vee \ b = a}$ $\qquad$ Por 4.9.1 I, II

3) $\Rightarrow \quad [a = b \ \vee \ a < b] \quad \wedge \quad [b = a \ \vee \ b < a]$ ...... Propiedad conmutativa de la disyunción.

4) $\Rightarrow \quad [a = b \ \vee \ a < b] \quad \wedge \quad [a = b \ \vee \ a > b]$ ...... Axioma Simétrica de la igualdad y definición 4.9.1 II.

5) $\Rightarrow \quad a = b \ \vee \ \underbrace{[a < b \ \wedge \ a > b]}_{F}$ .... *i*) Propiedad distributiva.

es **FALSO**

ii) $(a < b \ \wedge \ a > b)$ es falso, porque:

$b - a > 0 \ \wedge \ a - b > 0$

$b - a < 0$

es absurdo según el **AX. TRICOTOMÍA.**

6) $\Rightarrow \quad a = b$ Pues: $p \vee F \equiv p$, siendo $p : a = b$

DEMOSTRACIÓN de P$_3$: Si $a \leq b \ \wedge \ b \leq c \ \Rightarrow \ a \leq c$

1) Por hipótesis tenemos:

$$[a \leq b \ \wedge \ b \leq c] \iff [(a < b \ \vee \ a = b) \ \wedge \ (b < c \ \vee \ b = c)]$$

2) $\iff [\underbrace{(a < b \ \wedge \ b < c)} \vee \underbrace{(a < b \ \wedge \ b = c)}] \vee [\underbrace{(a = b \ \wedge \ b < c)} \vee (a = b \ \wedge \ b = c)]$

3) $\Rightarrow \quad \underbrace{\underbrace{[\quad a < c \quad \vee \quad a < c \quad]}_{a\,<\,c} \vee [\quad a < c \quad \vee \quad a = c \quad]}$

4) $\Rightarrow \qquad a < c \qquad \vee \qquad a = c$

5) $\Rightarrow \quad a \leq c$

DEMOSTRACIÓN de P$_4$: *Queda como ejercicio.........*

DEMOSTRACIÓN de P$_5$: Si $a \leq b \ \Rightarrow \ a + c \leq b + c$.

1) Por hipótesis: $a \leq b \iff a < b \ \vee \ a = b$ .... (Según 4.9.1)

2) Si $[a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c]$ $\vee$ si $[a = b \ \Rightarrow \ a + c = b + c]$ .... (Según 4.9.1)

3) Por 2) si $[a + c < b + c \ \vee \ a + c = b + c] \Rightarrow a + c \leq b + c$ .... (Según 4.9.1)

DEMOSTRACIÓN P$_6$: *i)* Si $[a \leq b \wedge c \geq 0] \Rightarrow ac \leq bc$

ii) Si $[a \leq c \wedge c \leq 0] \Rightarrow ac \geq bc$

Prueba de *i*)

1) Por hipótesis: Si $[a \leq b \wedge a \geq 0]$

2) $\Rightarrow [(a < b \vee a = b) \wedge (c > 0 \vee c = 0)]$

3) $\Rightarrow [(a < b \wedge c > 0) \vee (a = b \wedge c = 0)]$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

4) $\Rightarrow [\underbrace{ac < bc \vee ac = bc}]$

5) $\Rightarrow ac \leq bc$

Prueba de *ii*) *Queda como ejercicio.........*

4.9.3. DESIGUALDADES E INECUACIONES

4.9.3.1) Las expresiones $a < b$, $a \leq b$, $a > b$, $a \geq b$ se denominan DESIGUALDADES.

4.9.3.2) Las desigualdades que contienen incógnitas (x, y, t, ... , etc.) se denominan INECUACIONES.

4.10 INECUACIONES

4.10.1 INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Las inecuaciones lineales de primer grado con una incógnita, pueden ser de las formas:

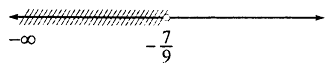
$$ax + b < 0$$
$$ax + b \leq 0$$
$$ax + b > 0$$
$$ax + b \geq 0$$

Ejemplo 01.- Resolver $\forall x \in I\!R:\ 3\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{1}{2}(x - 3) - 2x$

Solución: $\quad 3\left(x+\frac{2}{3}\right) < \frac{1}{2}(x-3)-2x$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad 3x+2 &< \tfrac{x}{2}-\tfrac{3}{2}-2x\\
\Longleftrightarrow \quad 6x+4 &< x-3-4x\\
\Longleftrightarrow \quad 6x-x+4x &< -3-4\\
9x &< -7\\
\Longleftrightarrow \quad x &< -\tfrac{7}{9}
\end{aligned}$$

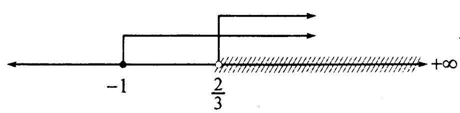
Luego: $C_s = \left\{ x \in I\!R \,/\, x < -\frac{7}{9} \right\}$



Ejemplo 2.- Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $-2x-3 \leq 4+5x < 2+8x$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad -2x-3 \leq 4+5x \quad &&\wedge \quad 4+5x < 2+8x\\
&\Longleftrightarrow \quad -2x-5x \leq 4+3 \quad &&\wedge \quad 5x-8x < 2-4\\
&\Longleftrightarrow \quad -7x \leq 7 \quad && \quad -3x < -2\\
&\qquad\quad 7x \geq -7 \quad && \quad 3x > 2\\
&\Longleftrightarrow \quad x \geq -1 \quad &&\wedge \quad x > \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$



$$C_s = \left\{ x \in I\!R \,/\, x > \tfrac{2}{3} \right\}$$

4.10.2 INECUACIONES POLINÓMICAS FACTORIZABLES EN FACTORES LINEALES

Ejemplo 03.- Resolver: $-6x^4 + 11x^3 + 94x^2 + 11x - 30 \leq 0$

Solución:

1) Multiplicar por -1 (cambia de sentido la desigualdad)

$6x^4 - 11x^3 - 94x^2 - 11x + 30 \geq 0$

2) **Factorizar por RUFFINI:**

-3	6	-11	-94	-11	$+30$
		-18	$+87$	21	-30
5	6	-29	-7	10	0
		30	5	-10	
1/2	6	$+1$	-2	0	
		3	2		
$-2/3$	6	4	0		
		-4			
	6	0			

Luego, la inecuación expresado como el producto de 4 factores lineales, será:

3) $(x+3)(x-5)(x-1/2)(x+2/3)\geq 0$.

4) **Grafiquemos las raíces reales del polinomios $P(x)$ en la recta real.**

Las raíces han dividido **(particionado)** a la recta real en 5 **subconjuntos disjuntos**:

$$A=\{x\in I\!R\,/\,x<-3\}$$

$$B=\left\{x\in I\!R\,/-3<x<-\tfrac{2}{3}\right\}$$

$$C=\left\{x\in I\!R\,/-\tfrac{2}{3}<x<\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$D=\left\{x\in I\!R\,/\,\tfrac{1}{2}<x<5\right\}$$

$$E=\{x\in I\!R\,/\,x>5\}$$

5) Ahora, analicemos **cuáles de los subconjuntos**, satisface a la **inecuación dada en el paso** 3).

Para ello, se toma **cada subconjunto** y se analiza el **signo de cada factor. Si el subconjunto** tomado satisface la **inecuación** dada, entonces será **conjunto solución.**

Veamos:

a) Analicemos, si el **conjunto** A satisface la inecuación **dada en (3).**
A partir de $x<-3$, **analicemos** el signo de cada **factor.**

$$\boxed{x < -3}$$

$$x+3<0 \qquad x-5<-5-3 \qquad x-\tfrac{1}{2}<-3-\tfrac{1}{2} \qquad x+\tfrac{2}{3}<-3+\tfrac{2}{3}$$
$$(-) \qquad\qquad (-) \qquad\qquad (-) \qquad\qquad (-)$$

Así, hemos obtenido: $(-)\,(-)\,(-)\,(-) > 0$.

Es decir el conjunto A satisface a la inecuación (3); por tanto, A es conjunto solución.

b) Analicemos, si B es o no solución, a partir de:

$$\boxed{-3 < x < -\tfrac{2}{3}}$$

$$\boxed{-3+3<x+3<-\tfrac{2}{3}+3} \quad \boxed{-3-5<x-5<-5-\tfrac{2}{3}} \quad \boxed{-3-\tfrac{1}{2}<x-\tfrac{1}{2}<-\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}} \quad \boxed{-3+\tfrac{2}{3}<x+\tfrac{2}{3}<-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}}$$
$$(+) \qquad\qquad (-) \qquad\qquad (-) \qquad\qquad (-)$$

Con estos signos, el polinomio en (3) tiene signos: $(+)\,(-)\,(-)\,(-) \underset{\text{Negativo}}{<} 0$

Es decir, el conjunto B no satisface la inecuación (4); por tanto B no es conjunto solución.

c) Analicemos el signo del polinomio en (3), tomando el conjunto C.

$$\boxed{-\tfrac{2}{3} < x < \tfrac{1}{2}}$$

$$\boxed{-\tfrac{2}{3}+3<x+3<\tfrac{1}{2}+3} \quad \boxed{-\tfrac{2}{3}-5<x-5<\tfrac{1}{2}-5} \quad \boxed{-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}<x-\tfrac{1}{2}<\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}} \quad \boxed{-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3}<x+\tfrac{2}{3}<\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}}$$
$$(+) \qquad\qquad (-) \qquad\qquad (-) \qquad\qquad (+)$$

Luego, el signo de la inecuación (3) será: $(+)\,(-)\,(-)\,(+) \underset{\text{Positivo}}{>} 0$, lo cual satisface la inecuación; por tanto C es conjunto solución.

d) Procediendo del mismo modo, notaremos que el conjunto D no satisface la inecuación, por tanto no es solución.

e) Con el conjunto E analicemos el signo de $P(x)$ en (3).

$$\boxed{x>5}$$

$\boxed{x+3>5+3}$	$\boxed{x-5>5-5}$	$\boxed{x-\frac{1}{2}>5-\frac{1}{2}}$	$\boxed{x+\frac{2}{3}>5+\frac{2}{3}}$
(+)	(+)	(+)	(+)

Al reemplazar estos signos en (3) obtenemos: $\underbrace{(+)\,(+)\,(+)\,(+)}_{\text{Positivo}} > 0$, lo cual satisface a la inecuación dada, por tanto E es solución.

6) Los números reales (raíces) $x = -3,\ -2/3,\ 1/2,\ 5$ también satisface la inecuación, porque el polinomio $P(x)$, además de ser mayor que cero, también es igual a cero.

7) ***CONCLUSIÓN:***

El conjunto solución será:

$$C_s = \left\{ x \in IR \,/\, x \le -3 \ \vee\ -\tfrac{2}{3} \le x \le \tfrac{1}{2} \ \vee\ x \ge 5 \right\}$$

$$C_s = \left\{ x \in IR \,/\, x \le -3 \right\} \cup \left\{ x \in IR \,/ -\tfrac{2}{3} \le x \le \tfrac{1}{2} \right\} \cup \left\{ x \in IR \,/\, x \ge 5 \right\}$$

4.10.3 INECUACIONES RACIONALES:

Para resolver inecuaciones racionales se pueden aplicar por lo menos tres métodos para explicar cada método, escogemos un ejemplo.

Ejemplo 04.- Resolver $\forall\, x \in IR$

$$\frac{x-5}{x-1} < \frac{x+2}{x+3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

MÉTODO 1 Multiplicar en **ASPA** teniendo en cuenta los signos de los denominadores.

CASO 1 Si $(x-1>0 \ \wedge\ x+3>0)$ $\Rightarrow$ multiplicamos ambos miembros de la inecuación (I) por $(x-1)(x+3)>0$ obteniéndose:

$$\underbrace{x>1 \ \wedge\ x>-3}$$

$$x>1 \ \ldots\ldots \ (p_1)$$

$$(x-5)(x+3) < (x-1)(x+2)$$

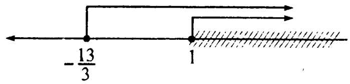
$$x^2-2x-15 < x^2+x-2$$

$$-3x > 13$$

$$3x > -13$$

$$x > -\tfrac{13}{3} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (p_2)$$

La solución, es la intersección de (p_1) con (p_2), que es: $\boxed{A = \{x \in I\!R \,/\, x > 1\}}$



CASO 2 Si $(x-1<0 \;\wedge\; x+3<0)$ $\Rightarrow$ multiplicar ambos miembros de la inecuación (I) por $(x-1)(x+3)>0$ obteniéndose:

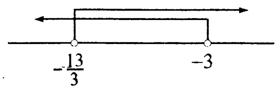
$$\underbrace{x<1 \;\wedge\; x<-3}_{x<-3 \;\ldots\ldots\; q_1}$$

$$(x-5)(x+3) \;<\; (x-1)(x+2)$$

$$-3x \;<\; 13$$

$$\boxed{x \;>\; -\frac{13}{3}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; q_2$$

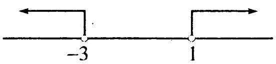
La solución es la intersección de (q_1) y (q_2); que es:



$$B = \left\{ x \in I\!R \,/\, -\frac{13}{3} < x < -3 \right\}$$

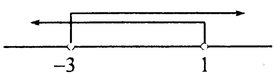
CASO 3 Si $(x-1>0 \;\wedge\; x+3<0)$ $\Rightarrow$ ya no operamos nada, porque la 1ra. intersección es el conjunto vacío por tanto: $\boxed{C = \varnothing}$

$$\underbrace{x>1 \;\wedge\; x<-3}_{\varnothing}$$



CASO 4 Si $(x-1<0 \;\wedge\; x+3>0)$ $\Rightarrow$ multiplicamos ambos miembros de la inecuación (I) por $(x-1)(x+3)<0$, obteniéndose:

$$\underbrace{x<1 \;\wedge\; x>-3}_{-3<x<1 \;\ldots\ldots\; (r_1)}$$



$$(x-5)(x+3) \;>\; (x-1)(x+2)\ldots$$

Cambia de sentido la desigualdad, porque estamos multiplicando por un término negativo.

$$x^2-2x-15 \;>\; x^2+x-2$$

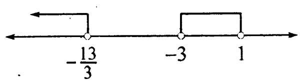
$$-3x \;>\; 13$$

$$3x \;<\; -13$$

$$x \;<\; -\frac{13}{3} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (r_2)$$

La solución es la intersección de (r_1) y (r_2) que es: $\boxed{\varnothing = D}$

Ver el siguiente gráfico:

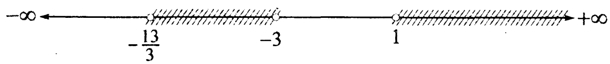


CONCLUSIÓN: El conjunto solución de la inecuación es:

$$C_s = A \cup B \cup C \cup D = A \cup B$$

$$C_s = \{ x \in I\!R \,/\, x > 1 \} \cup \left\{ x \in I\!R \,/ -\tfrac{13}{3} < x < -3 \right\}$$

Que representado en la recta es:



MÉTODO 2

Reduciendo la inecuación dada a una sola fracción, al transponer el 2do. miembro al primer miembro. Luego analizar los signos de cada factor que se tenga en el numerador y el denominador.

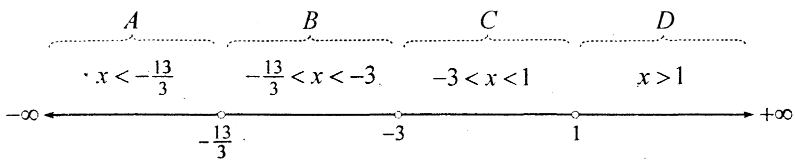
PASO 1 De $\dfrac{x-5}{x-1} < \dfrac{x+2}{x+3} \Rightarrow \dfrac{x-5}{x-1} - \dfrac{x+2}{x+3} < 0$

$$\Rightarrow \frac{(x-5)(x+3)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x-15-x^2-x+2}{(x-1)(x+3)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-13}{(x-1)(x+3)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{3x+13}{(x-1)(x+3)} > 0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

PASO 2 Graficar, en la recta real, los puntos referenciales que se obtienen del numerador y del denominador en la inecuación (I):



PASO 3 Analizar el signo de cada factor que se tiene en (I) a partir de los conjuntos A, B, C y D.

i) En A : a partir de: $x < -\frac{13}{3}$ se obtiene: $\dfrac{\overbrace{(3x+13)}^{(-)}}{\underbrace{(x-1)}_{(-)}\underbrace{(x+3)}_{(-)}} = (-) < 0$ Contradice a (I)

Luego A no es solución.

ii) En B : a partir de: $-\frac{13}{3} < x < -3$, se obtiene: $\dfrac{\overbrace{(3x+13)}^{(+)}}{\underbrace{(x-1)}_{(-)}\underbrace{(x+3)}_{(-)}} = (+) > 0$ Satisface a (I)

Por lo tanto ***B es solución***

iii) En C : a partir de: $-\frac{13}{3} < x < -3$, se obtiene: $\dfrac{\overbrace{(3x+13)}^{(+)}}{\underbrace{(x-1)}_{(-)}\underbrace{(x+3)}_{(+)}} = (-) < 0$ No satisface a (I)

En consecuencia C no es solución.

iv) En D : a partir de $x > 1$, se obtiene: $\dfrac{\overbrace{3x+13}^{(+)}}{\underbrace{(x-1)}_{(+)}\underbrace{(x+3)}_{(+)}} = (+) > 0$ Satisface a (I)

Lo cual indica que ***D es solución***

CONCLUSIÓN: El conjunto solución es:

$$C_S = B \cup D = \left\{ x \in I\!R \big/ -\tfrac{13}{3} < x < -3 \right\} \cup \{ x \in I\!R / x > 1 \}$$

MÉTODO 3 REGLA DE LOS SIGNOS

I) PARA LA MULTIPLICACIÓN

CASOS:

1. $ab > 0 \longleftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
2. $ab \geq 0 \longleftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$
3. $ab < 0 \longleftrightarrow (a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$
4. $ab \leq 0 \longleftrightarrow (a \leq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \geq 0 \wedge b \leq 0)$

II) PARA LA DIVISIÓN

1. $\frac{a}{b} > 0 \longleftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
2. $\frac{a}{b} \geq 0 \longleftrightarrow (a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0)$
3. $\frac{a}{b} < 0 \longleftrightarrow (a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$
4. $\frac{a}{b} \leq 0 \longleftrightarrow (a \leq 0 \wedge b > 0) \vee (a \geq 0 \wedge b < 0)$

Tomando el mismo ejemplo, resolver: $\frac{x-5}{x-1} < \frac{x+2}{x+3}$

Solución:

PASO 1 Reducir a una sola fracción: $\frac{x-5}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} < 0$

$$\Rightarrow \frac{3x+13}{(x-1)(x+3)} > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

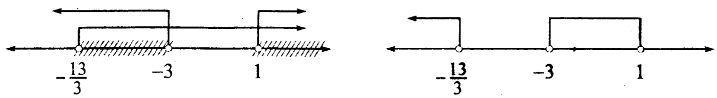
PASO 2 Aplicar la regla se los signos en (I).

$$\frac{3x+13}{(x-1)(x+3)} > 0 \iff [3x+13>0 \ \wedge \ (x-1)(x+3)>0] \ \vee \ [3x+13<0 \ \wedge \ (x-1)(x+3)<0]$$

$$\iff \left\{ x > -\tfrac{13}{3} \ \wedge \ \left[\begin{array}{c} x-1>0 \ \wedge \ x+3>0 \\ \vee \\ x-1<0 \ \wedge \ x+3<0 \end{array}\right]\right\} \vee \left\{ x < -\tfrac{13}{3} \ \wedge \ \left[\begin{array}{c} x-1<0 \ \wedge \ x+3>0 \\ \vee \\ x-1>0 \ \wedge \ x+3<0 \end{array}\right]\right\}$$

$$\iff \left\{ x > -\tfrac{13}{3} \ \wedge \ \left[\begin{array}{c} x>1 \ \wedge \ x>-3 \\ \vee \\ x<1 \ \wedge \ x<-3 \end{array}\right]\right\} \vee \left\{ x < -\tfrac{13}{3} \ \wedge \ \left[\begin{array}{c} x<1 \ \wedge \ x>-3 \\ \vee \\ x>1 \ \wedge \ x<-3 \end{array}\right]\right\}$$

$$\iff \left\{ x > -\tfrac{13}{3} \ \wedge \ [x>1 \ \vee \ x<-3] \right\} \vee \left\{ x < -\tfrac{13}{3} \ \wedge \ [-3<x<1] \right\}$$



$$\iff \left[\ -\tfrac{13}{3} < x < -3 \ \vee \ x > 1 \ \right] \vee \varnothing$$

$$\iff C_s = \left\{ x \in I\!R \,/ -\tfrac{13}{3} < x < -3 \ \vee \ x > 1 \right\}$$

MÉTODO 4 **REGLA PRÁCTICA DE LOS PUNTOS REFERENCIALES**

Este método es una combinación de los métodos 2 y 3 y se aplica cuando la inecuación **está** expresado como producto de dos o más factores lineales, tales como:

1) $-5(x-1)^2(x+3)(2-3x)^4(2-7x)(x-4) \leq 0$

2) $-\frac{2}{3}(1-2x)(x-3)^5(3x-1)^{17} > 0$

3) $\frac{9(1-5x)(4x-1)(x-2)}{(x-2)^3(x+3)} \leq 0$

4) $\frac{(x+3)(4-x)(2-3x)}{(x+3)^2(x-1)(2-5x)^5} > 0$

PASOS A SEGUIR:

PASO 1. Simplificar los factores positivos, reduciendo la inecuación a su mínima expresión.

PASO 2. Graficar los puntos referenciales en la recta real, obtenidos de cada factor lineal.

PASO 3. Analizar el signo de cada factor lineal, a partir de cada subconjunto obtenido en el paso 2. Este paso se puede reducir si en todos los factores lineales se cumple que **los coeficientes de la incógnita son positivos**.

A continuación asignamos el signo (+) al primer subconjunto de la derecha, luego de derecha a izquierda asignamos los signos (–), (+), (–), (+), (–),... etc. hasta concluir con el subconjunto del extremo izquierdo.

PASO 4. El conjunto solución será la **UNIÓN** de todos los subconjuntos que satisfacen a la inecuación dada.

Ejemplos:

1) Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $-5(x-1)^2(x+3)(2-3x)^4(2-7x)(x-4) \leq 0$

Solución:

PASO 1 Simplificar los factores 5, $(x-1)^2$ y $(2-3x)^4$ por ser positivos o cero y la inecuación dada se reduce en:

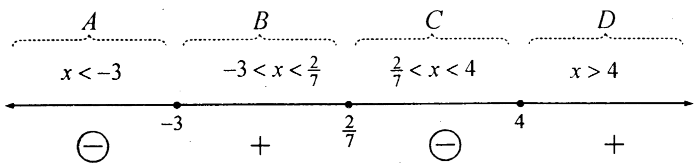
$$-(x+3)(2-7x)(x-4) \leq 0$$

Multiplicar por (–1): $\quad (x+3)(2-7x)(x-4) \geq 0$

Cambiar de signo

$$\Rightarrow \quad \boxed{(x+3)(7x-2)(x-4) \leq 0} \text{——} \text{(I)}$$

PASO 2 Graficar en la recta real, los puntos referenciales: $x=-3$, $\frac{2}{7}$, 4 obtenidos en I:



PASO 3 Al primer intervalo de la derecha le asignamos el signo (+), luego de derecha a izquierda asignamos los signos: (–), (+) y (–), hasta terminar con el conjunto del extremo izquierdo.

PASO 4 El conjunto solución es la unión de los subconjuntos A y C que están asignados con el signo $(-)$, que son los subconjuntos que satisfacen la inecuación dado en (I).

$$C_s = \{x \in I\!R \,/\, x \leq -3\} \cup \left\{x \in I\!R \,/\, \tfrac{2}{7} \leq x \leq 4\right\}$$

2) Resolver: $-\frac{2}{3}(1-2x)\ \ (x-3)^5(3x-1)^{17} > 0$

Solución:

Simplificar los factores: $\frac{2}{3}$, $(x-3)^4$ y $(3x-1)^{16}$ con $x \neq 3$, $x \neq \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow \qquad -(1-2x)(x-3)(3x-1) > 0$

Cambiar de signo: Un número par de cambios de signos en los factores, el sentido de la desigualdad NO cambia: es regla de los signos.

$\Rightarrow \qquad \boxed{(2x-1)(x-3))(3x-1) > 0}$

$$-\qquad \tfrac{1}{3} \qquad \oplus \qquad \tfrac{1}{2} \qquad - \qquad 3 \qquad \oplus$$

$$C_s = \left\{x \in I\!R \,/\, \tfrac{1}{3} < x < \tfrac{1}{2}\ \vee\ x > 3\right\}$$

3) Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\dfrac{9(1-5x)(4x-1)(x-2)}{(x-2)^3(x+3)} \leq 0$

Solución:

Simplificar los términos 9 y $(x-2)$, teniéndose en cuenta que $x \neq 2$, $x \neq -3$ y se obtiene:

Cambio de signo

$$\frac{(1-5x)(4x-1)}{(x-2)^2(x+3)} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(1-5x)(4x-1)}{(x+3)} \leq 0$$

Simplificar

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{(5x-1)(4x-1)}{(x+3)} \geq 0} \text{ — (II)}$$

$$-\qquad -3 \qquad \oplus \qquad \tfrac{1}{5} \qquad - \qquad \tfrac{1}{4} \qquad \oplus$$

$$C_s = \left\{x \in I\!R \,/\, -3 < x \leq \tfrac{1}{5}\right\} \cup \left\{x \in I\!R \,/\, x \geq \tfrac{1}{4}\right\} \quad , \quad \text{con } x \neq 2$$

4) Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\dfrac{(x+3)(4-x)(2-3x)}{(x+3)^2(x-1)(2-5x)^5} > 0$

Solución:

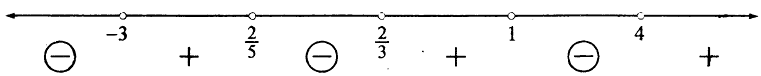
Simplificar los términos positivos: $(x+3)^2$ y $(2-5x)^4$, obtenemos:

$$\frac{(x+3)(4-x)(2-3x)}{(x-1)(2-5x)} > 0 \quad , \quad \text{siendo } x \neq -3\,,\ x \neq 4$$

$$x \neq \tfrac{2}{3}\,,\ x \neq 1\,,\ x \neq \tfrac{2}{5}$$

Como hay 3 cambios de signo, cambia de sentido la inecuación.

Cambio de signo: $\Rightarrow \dfrac{(x+3)(x-4)(3x-2)}{(x-1)(5x-2)} < 0$ .... (I)



$$C_s = \left\{ x \in I\!R \,/\, x < -3 \ \vee\ \tfrac{2}{5} < x < \tfrac{2}{3} \ \vee\ 1 < x < 4 \right\}$$

4.11 INTERVALOS

DEFINICIONES:

4.11.1 INTERVALO ABIERTO.- Sean a y b dos números reales, tal que $a < b$, definimos el INTERVALO ABIERTO $]a,b[$ o $\langle a,b\rangle$ al conjunto:

$]a,b[\ = \{x \in I\!R \,/\, a < x < b\}$

4.11.2 INTERVALO CERRADO.- Dados dos números reales a y b con $a \leq b$ definimos el intervalo cerrado $[a,b]$, al conjunto:

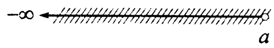
$[a,b] = \{x \in I\!R \,/\, a \leq x \leq b\}$

4.11.3 El conjunto $]a,b] = \{x \in I\!R \,/\, a < x \leq b\}$ se llama intervalo abierto por la izquierda.

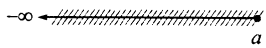
4.11.4 El conjunto $[a,b[\ = \{x \in I\!R \,/\, a \leq x < b\}$ se llama intervalo abierto por la derecha .

4.11.5 Otros intervalos se denotan por:

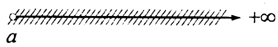
$$]-\infty, a[\; = \{x \in I\!R \,/\, x < a\}$$



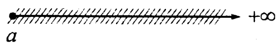
$$]-\infty, a] \;= \{x \in I\!R \,/\, x \leq a\}$$



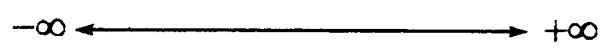
$$[a, +\infty[\; = \{x \in I\!R \,/\, x > a\}$$



$$[a, +\infty[\; = \{x \in I\!R \,/\, x \geq a\}$$



$$]-\infty, +\infty[\; = I\!R = \{x \in I\!R \,/ -\infty < x < +\infty\}$$



4.12. VALOR ABSOLUTO

4.12.1 DEFINICIÓN.- **EL VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO REAL** "*x*" se define del siguiente modo:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } \; x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } \; x < 0 \end{cases} \quad , \text{ también: } \; |x| = \begin{cases} x & , \text{ si } \; x > 0 \\ 0 & , \text{ si } \; x = 0 \\ -x & , \text{ si } \; x < 0 \end{cases}$$

que se lee: "El valor absoluto de un número real x es igual a x si x es mayor o igual a cero, o es igual $a - x$, si x es menor que cero".

También, se define del siguiente modo:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } \; x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \\ \text{si } \; x < 0 \Rightarrow |x| = -x \end{array}}$$

Ejemplos: $|-3| = -(-3) = 3$

$|5| = 5$

4.12.2 PROPIEDADES:

$P_1)$ $|a| \geq 0 \longleftarrow$ indica: el valor absoluto nunca es negativo.

$P_2)$ $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

$P_3)$ $|-a| = |a|$

$P_4)$ $|ab| = |a||b|$

$P_5)$ $-|a| \leq a \leq |a|$

$P_6)$ Si $k > 0$, implica $|a| < k \Longleftrightarrow -k < a < k$

$P_7)$ $|a+b| \leq |a| + |b|$ (propiedad **TRIANGULAR**)

DEMOSTRACIÓN DE P$_1$: $|a| \geq 0$

Consideremos tres casos: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$

1) Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a > 0$
2) Si $a = 0 \Rightarrow |a| = 0$
3) Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \wedge |a| = -a > 0$
4) Por 1), 2) y 3) se cumple: $|a| \geq 0$

DEMOSTRACIÓN DE P$_3$: $|-a| = |a|$

Probaremos tres casos:

1) Si $a > 0 \Rightarrow -a < 0$

$$\text{Por otro lado: } \begin{cases} \text{si} \quad a > 0 \text{ implica } |a| = a \\ \text{si} \quad -a < 0 \text{ implica } |-a| = -(-a) = a \end{cases} \Rightarrow |a| = |-a|$$

2) Si $a = 0 \Rightarrow -a = 0$

$$\text{Por otro lado: } \begin{cases} \text{si} \quad a = 0 \text{ implica } |a| = 0 \\ \text{si} \quad -a = 0 \text{ implica } |-a| = 0 \end{cases} \Rightarrow |a| = |-a|$$

3) Si $a < 0 \Rightarrow -a < 0$

$$\text{Por otro lado: } \begin{cases} \text{si} \quad a > 0 \text{ implica } |a| = a \\ \text{si} \quad -a < 0 \text{ implica } |-a| = -(-a) = a \end{cases} \Rightarrow |a| = |-a|$$

DEMOSTRACIÓN DE P$_4$:

Probaremos 4 casos:

1) Si $a \geq 0 \wedge b \geq 0$ implica $ab \geq 0$

$$\text{Por otro lado: } \begin{cases} \text{si} \quad a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \\ \text{si} \quad b \geq 0 \Rightarrow |b| = b \\ \text{si} \quad ab \geq 0 \Rightarrow |(ab)| = (ab) \end{cases}$$
$$= (a)(b)$$
$$= |a||b|$$

2) Si $a \geq 0 \wedge b < 0$ implica $ab \leq 0$

Por otro lado: $\begin{cases} \text{si} \quad a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \\ \text{si} \quad b < 0 \Rightarrow |b| = -b \\ \text{si} \quad ab \leq 0 \Rightarrow |(ab)| = -(ab) = (a)(-b) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = |a||b| \end{cases}$

3) Si $a < 0 \wedge b \geq 0$ implica $ab \leq 0$

Por otro lado: $\begin{cases} \text{si} \quad a < 0 \Rightarrow |a| = -d \\ \text{si} \quad b \geq 0 \Rightarrow |b| = b \\ \text{si} \quad ab \leq 0 \Rightarrow |(ab)| = -(ab) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = (-a)(-b) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = |a||b| \end{cases}$

4) Si $a < 0 \wedge b < 0$ implica $ab > 0$

Por otro lado: $\begin{cases} \text{si} \quad a < 0 \Rightarrow |a| = -a \\ \text{si} \quad b < 0 \Rightarrow |b| = -b \\ \text{si} \quad ab > 0 \Rightarrow |(ab)| = (ab) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = (-a)(-b) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = |a||b| \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN DE P_5: $-|a| \leq a \leq |a|$

Se debe probar dos casos: $a \geq -|a| \wedge a \leq |a|$

CASO 1 Probar que $a \geq -|a|$ es equivalente a probar que $|a| \geq -a$, $\forall a \in I\!R$

1) Si $a \geq 0$ implica que $|a| = a \geq 0$

Pero $a \geq 0$ implica que $-a \leq 0$

$\Rightarrow -a \leq 0 \leq a = |a|$

Por tanto: $\boxed{-a \leq |a|}$ ... (transitividad)

2) Si $a < 0$ implica que $|a| = -a$

La igualdad $|a| = -a$ implica que: $\boxed{|a| \geq -a}$ (porque la expresión $a \geq b$ es válida cuando por lo menos una de las relaciones $a = b \vee a > b$ es válida).

CASO 2 Probar que $|a| \geq a$, $\forall a \in I\!R$

1) Si $a \geq 0$ implica que $|a| = a$

La igualdad $|a| = a$ implica: $\boxed{|a| \geq a}$ (Pues $a \geq b \iff a = b \vee a > b$)

2) Si $a < 0$ implica que $|a| = -a$

Si $a < 0$ implica que $-a > 0$

$\Rightarrow a < 0 < -a = |a|$

$\Downarrow$

$a < |a|$

Lo cual implica: $\boxed{|a| \geq a}$

DEMOSTRACIÓN DE P_7: $|a+b| \leq |a+b|$

Esta propiedad se puede demostrar de dos formas:

$\boxed{\text{FORMA I}}$ Aplicando sucesivamente la propiedad P_5:

Veamos:

1) Por P_5 se cumple: $\begin{cases} a \leq |a| \ , \ \forall\, a \in I\!R \\ b \leq |b| \ , \ \forall\, b \in I\!R \end{cases}$

2) Sumar: $a+b \leq |a|+|b|$

3) Por P_5 se cumple: $\begin{cases} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \end{cases}$

4) Sumar: $(-a)+(-b) \leq |a|+|b|$

5) Multiplicar por (-1): $a+b \geq -(|a|+|b|)$

6) Por 2) y 5): $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$

$\iff |a+b| \leq |a|+|b|$ .... Según P_6

4.12.3 IGUALDAD CON VALOR ABSOLUTO

TEOREMAS

$\boxed{T_1}$ i) $|a|^2 = a^2$, *ii)* $|a^2| = a^2$

$\boxed{T_2}$ $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall\, a \in I\!R$

$\boxed{T_3}$ Si $b \geq 0$ implica $|a| = b \iff a = b \vee a = -b$

$\boxed{T_4}$ $|a| = |b| \iff a^2 = b^2 \iff a = b \vee a = -b$

$\boxed{T_5}$ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

DEMOSTRACIÓN DE T_1: *i)* $|a|^2 = a^2$, *ii)* $|a^2| = a^2$

PRUEBA DE: *i)* $|a|^2 = a^2$

1) Si $a \geq 0$ implica $|a| = a$. Pero $|a|^2 = |a||a|$

$$= (a)(a)$$
$$= a^2$$

2) Si $a < 0$ implica la $|a| = -a$ Pero $|a|^2 = |a||a|$

$$= (-a)(-a)$$
$$= a^2$$

PRUEBA DE: *ii)* $|a^2| = a^2$

1) Se tiene que $a^2 \geq 0$ $\forall\, a \in I\!R$ .... (Por el Cor. 4.8.1.2)

2) Si $a^2 \geq 0$ implica $|a^2| = a^2$

DEMOSTRACIÓN DE T_2: $\sqrt{a^2} = |a|$

Para la demostración de esta proposición se aplica la definición de raíz cuadrada.

Veamos:

Definición: Toda ecuación de la forma $x^2 = k$, con $k \geq 0$ tiene una única solución real no negativa que se denomina "la raíz cuadrada no negativa de a y se denota por $\sqrt{a}$ ".

Es decir $x^2 = k \iff x = \sqrt{k} \vee x = -\sqrt{k}$, $\forall\, k \geq 0$

es la raíz no negativa si $k \geq 0$

Aplicando, esta definición, tenemos:

1) Si $k \geq 0 \wedge x \geq 0$ implica: $\sqrt{k} = x \iff k = x^2$

2) Haciendo $k = a^2$ y $x = |a|$: $\underbrace{\sqrt{a^2} = |a|}_{\text{I}} \iff \underbrace{a^2 = |a|^2}_{\text{II}}$

3) La igualdad en II es verdadera, según hemos probado en el T_1, por tanto, por la equivalencia lógica, también será verdadera la igualdad I .

lqqd.

DEMOSTRACIÓN DE T_3: Si a y b son números reales,
$|a| = b \iff [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$

PRUEBA:

($\Rightarrow$) Si $|a| = b$ implica $b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)$

Veamos:

1) Por hipótesis tenemos: $|a| = b$
2) Aplicar la definición de valor absoluto y la propiedad $|a| \geq 0$. Así, obtenemos:

$$b = |a| \geq 0 \quad \wedge \quad b = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ & \vee \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

3) $\Rightarrow \quad b \geq 0 \quad \wedge \quad (b = a \vee b = -a)$
4) $\Rightarrow \quad b \geq 0 \quad \wedge \quad (a = b \vee a = -b)$

($\Leftarrow$) si $[\, b \geq 0 \quad \wedge \quad (a = b \vee a = -b)\,]$ implica $|a| = b$

Veamos:

1) Si $a = b \geq 0$ implica $|a| = a = b \Rightarrow |a| = b$
2) Si $b \geq 0$ entonces $-b \leq 0 \wedge a = -b \leq 0$, esto implica $|a| = -a$

$$= -(-b)$$
$$= b$$

lqqd.

DEMOSTRACIÓN DE T_4: $|a|=|b| \iff a^2=b^2 \iff a=b \vee a=-b$

1) Por hipótesis se tiene: $|a|=|b|$

2) Elevar al cuadrado: $\iff |a|^2=|b|^2$

3) $\iff$ $a^2=b^2$

4) $\iff$ $a^2-b^2=0$

5) $\iff$ $(a-b)(a+b)=0$

6) $\iff$ $a-b=0 \vee a+b=0$

7) $\iff$ $a=b \vee a=-b$

DEMOSTRACIÓN DE T_5: $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

1) Se parte de $|a|=|a \cdot 1|$, pues $a=a \cdot 1$

2) Pero $1=bb^{-1}=b^{-1}b$, cuando $b \neq 0$

3) (2) en (1): $|a|=|a \cdot (b^{-1}b)|$

4) $=|(ab^{-1})b|$

5) $=\left|\left(\frac{a}{b}\right)b\right|$

6) $|a|=\left|\frac{a}{b}\right||b|$

7) $|a||b|^{-1}=\left|\frac{a}{b}\right|\underbrace{(|b||b|^{-1})}_{1}$

8) $\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$

4.12.4 DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

TEOREMAS

T_1) $|a| \le b \iff [b \ge 0 \wedge (-b \le a \le b)]$

T_2) $|a| \ge b \iff [a \ge b \vee a \le -b]$

T_3) (1) $|a| \ge |b| \iff (a+b)(a-b) \ge 0$

(2) $|a| \le |b| \iff (a+b)(a-b) \le 0$

T_4) $|a+b| \le |a|+|b|$ (Propiedad triangular)

COROLARIO T_4 : $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$

T_5) Si a es un número real y si $|a| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, entonces $a = 0$

T_6) $m < a < n \iff 0 \le |a| < \text{máx}\{|m|,|n|\}$

DEMOSTRACIÓN DE T_1: $|a| \le b \iff [b \ge 0 \wedge (-b \le a \le b)]$

($\Rightarrow$)

1) Por hipótesis se tiene: $|a| \le b$.

2) Por P_1 de 12.2 se cumple $0 \le |a| \le b$, por tanto $b \ge 0$

3) Aplicando la propiedad P_5 de 12.2: $\underbrace{-|a| \le a}_{(I)} \wedge \underbrace{a \le |a|}_{(II)}$, tendremos:

i) Aplicando (II) en $|a| \le b$ implica: $a \le |a| \le b \Rightarrow \boxed{a \le b}$ — (i), con $b > 0$

y *ii*) Aplicando (I): $-|a| \le a \iff |a| \ge -a$ en $|a| \le b$ implica: $-a \le |a| \le b$

$\Rightarrow -a \le b$

4) De (i) y (ii) implica: $-b \le a \le b$ $\Rightarrow \boxed{a \ge -b}$ — (ii)

($\Leftarrow$) *Queda como ejercicio...........* con $b \ge 0$

DEMOSTRACIÓN DE T_2: $|a| \ge b \iff [a \ge b \vee a \le -b]$

($\Rightarrow$)

1) Por hipótesis se tiene: $|a| \ge b$

2) Aplicando la definición de valor absoluto en $|a| = \begin{cases} a & , \text{ si } a \geq 0 \\ \vee & \\ -a & , \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Obtenemos: *i*) En $|a| \geq b$, si $a \geq 0$, implica: $a = |a| \geq b \Rightarrow \boxed{a \geq b}$

o *ii*) En $|a| \geq b$, si $a < 0$, implica: $-a = |a| \geq b \Rightarrow -a \geq b$

$$\Rightarrow \boxed{a \leq -b}$$

3) Por *i*) y *ii*) se ha obtenido: $|a| \geq b \Rightarrow a \geq b \vee a \leq -b$

($\Leftarrow$) *Queda como ejercicio*............

DEMOSTRACIÓN DE T$_3$: (1) $|a| \geq |b| \iff (a+b)(a-b) \geq 0$

(2) $|a| \leq |b| \iff (a+b)(a-b) \leq 0$

Prueba de (1):

i) Multiplicar miembro a miembro las desigualdades $\begin{cases} |a| \geq |b| \\ |a| \geq |b| \end{cases}$

Esto es posible porque el valor absoluto es positivo $\quad |a|^2 \geq |b|^2$

ii)
$$\Rightarrow \quad a^2 \geq b^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 - b^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad (a+b)(a-b) \geq 0$$

Prueba de (2): *Queda como ejercicio*...........

DEMOSTRACIÓN DE T$_4$: $|a+b| \leq |a| + |b|$, $\forall a \in I\!R$, $\forall b \in I\!R$

1) A partir de: $|a+b|^2 = (a+b)^2$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$= |a|^2 + 2ab + |b|^2, \text{ porque } |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2$$

2) Por la propiedad P$_5$ de 12.2, se tiene $a \leq |a|$

Del mismo modo se cumplirá: $ab \leq |ab|$

3) Multiplicar por 2: $2ab \leq 2|a||b|$, pues $|ab| = |a||b|$

4) Sumar: $|a|^2 + |b|^2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{2ab + |a|^2 + |b|^2}_{} \leq \underbrace{2|a||b| + |a|^2 + |b|^2}_{}$

$$\Rightarrow \quad |a+b|^2 \quad \leq \quad (|a|+|b|)^2$$

5) $\quad \Rightarrow \quad |a+b| \quad \leq \quad |a|+|b|$

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO T_4: $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

Debo probar: $\underbrace{\underbrace{-|a-b| \leq |a| - |b|}_{|b| \leq |a| + |a-b|}}_{(I)} \quad \wedge \quad \underbrace{\underbrace{|a| - |b| \leq |a-b|}_{|a| \leq |b| + |a-b|}}_{(II)}$

Veamos:

1) Probaremos (I):

Partir de $\quad |b| = |b+a-a|$

$$= |a-(a-b)| \leq |a| + |a-b|$$

$$\Rightarrow \quad |b| \leq |a| + |a-b|$$

$$\Longleftrightarrow \quad -|a-b| \leq |a|-|b|$$

2) Probaremos (II)

Partir de $\quad |a| = |a+b-b|$

$$= |b+(a-b)| \leq |b| + |a-b|$$

$$\Rightarrow \quad |a| \leq |b| + |a-b|$$

$$\Longleftrightarrow \quad |a| - |b| \leq |a-b|$$

$$\Rightarrow -|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$$

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$$

DEMOSTRACIÓN DE T_5: Si $a \in I\!R$ y si $|a| < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$

La demostración es por el método de reducción al absurdo, el cual consiste en aplicar la siguiente equivalencia lógica:

$$\left[\left(\underbrace{p_1}_{2>1} \wedge \underbrace{p_2}_{a \in I\!R} \wedge \underbrace{p_3}_{\substack{|a|<\varepsilon \\ \forall\, \varepsilon > 0}} \right) \Rightarrow \underbrace{q}_{a=0} \right] \equiv \left[\left(\underbrace{\sim q}_{a \neq 0} \wedge p_2 \wedge p_3 \right) \Rightarrow \underbrace{\sim p_1}_{2<1} \right]$$

Si negando la tesis q y aplicando las demás hipótesis, llego a negar la hipótesis P_1; el problema queda demostrado.

1. Suponer $\sim q$: $a \neq 0$
2. Si $a \neq 0$ entonces $\frac{|a|}{2} > 0$
3. La desigualdad $|a| < \varepsilon$ se cumple para todo $\varepsilon > 0$. En particular se cumple para $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$.
4. Luego, tendremos en $|a| < \varepsilon$, que: $|a| < \frac{|a|}{2} \iff 2 < 1$.
5. El resultado $2 < 1$ es la negación de P_1, pues $\sim P_1$: $2 < 1$.
6. Este absurdo se ha presentado, por suponer que $a \neq 0$, debe ser, entonces, que $a = 0$ ■

Aplicaciones del T_6 : $m < a < n \iff 0 \leq |a| < \text{máx}\{|m|, |n|\}$

1) Si $-3 < x < 2 \Rightarrow |x| < 3$, porque $3 = |-3| = \text{máx}\{|-3|, |2|\}$
2) Si $-8 < 2x - 1 < -3 \Rightarrow |2x - 1| < 8$, porque $8 = |-8| = \text{máx}\{|-8|, |-3|\}$
3) Si $\frac{1}{2} < 5 - 4x < 5 \Rightarrow |5 - 4x| < 5$, por que $5 = |5| = \text{máx}\left\{|5|, \left|\frac{1}{2}\right|\right\}$

4.13. PROBLEMAS RESUELTOS

4.13.1 DEMOSTRACIONES TEÓRICAS SOBRE VALOR ABSOLUTO

01 a) Probar que $|a - b| \leq |a| + |b|$, $\forall\, a \in I\!R$, $\forall\, b \in I\!R$

Prueba:

1) $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |(-b)| = |a| + |b|$, pues $|-b| = b$

2) $\Rightarrow |a - b| \leq |a| + |b|$

b) Demostrar que $|\,a\,| - |\,b\,| \leq |\,a + b|$, $\forall\; a \in \in I\!R$, $\forall\; b \in I\!R$.

Prueba:

1) Para aplicar adecuadamente la propiedad triangular, se parte de:

$$|a| = |a + b - b|$$
$$= |b + (a - b)| \leq |b| + |a - b|$$

2) $\Rightarrow |a| \leq |b| + |a - b|$

$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

02 Probar que $\big||a|-|b|\big| \leq |a+b|$, $\forall\, a \in I\!R$, $\forall\, b \in I\!R$

Debo probar: $-|a+b| \leq |a|-|b| \leq |a+b|$

$$\Longleftrightarrow \quad -|a+b| \leq |a|-|b| \quad \wedge \quad |a|-|b| \leq |a+b|$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{|b| \leq |a|+|a+b|}_{(\mathrm{I})} \quad \wedge \quad \underbrace{|a| \leq |b|+|a+b|}_{(\mathrm{II})}$$

Probemos la parte (I) $\wedge$ (II)

Parte (I)

1) $|b| = |b+a-a| = |(-a)+(a+b)| \leq |(-a)|+|a+b| = |a|+|a+b|$

$$\Rightarrow \quad |b| \leq |a|+|a+b|$$

$$\Longleftrightarrow \quad -|a+b| \leq |a|-|b| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1^*)$$

Parte (II)

2) $|a| = |a+b-b| = |(-b)+(a+b)| \leq |-b|+|a+b| = |b|+|a+b|$

$$\Rightarrow \quad |a| \leq |b|+|a+b|$$

$$\Longleftrightarrow \quad |a|-|b| \leq |a+b| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2^*)$$

3) Por $(1*)$ $\wedge$ $(2*)$: $-|a+b| \leq |a|-|b| \leq |a+b|$

$$\Longleftrightarrow \quad \big||a|-|b|\big| \leq |a+b|$$

03 Probar que $|\,a+b+c\,| \leq |\,a\,|+|\,b\,|+|\,c\,|$, $\forall\, a, b, c \in I\!R$.

Veamos:

1) $|a+b+c| = |a+(b+c)| \leq |a|+|b+c|$

2) Pero $|b+c| \leq |b|+|c|$

3) Luego: $|a+b+c| \leq |a|+|b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

$$\Rightarrow \quad |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$$

04 Probar que $|x|-|y|-|z| \leq |x-y-z|$, $\forall\, x, y, z \in I\!R$

Veamos:

La desigualdad es equivalente a: $|x| \leq |y|+|z|+|x-y-z|$

1) $|x| = |x-(y-y)+(z-z)|$

$$= |(y+z)+(x-y-z)| \leq |y+z| + |x-y-z|$$

$$\leq |y| + |z| + |x-y-z|$$

2) $\Rightarrow \ |x| \leq |y| + |z| + |x-y-z|$

$\Rightarrow \ |x| - |y| - |z| \leq |x-y-z|$

05 Probar que $\left| |a| - |b| \right| \leq \sqrt{|a^2 - b^2|}$

Prueba:

Debo probar que $\left| |a| - |b| \right|^2 \leq |a^2 - b^2|$

1) Por el corolario T_4 y por el problema 2 se tienen, respectivamente:

$\left| |a| - |b| \right| \leq |a-b|$

$\left| |a| - |b| \right| \leq |a+b|$

2) Multiplicar miembro a miembro:

$$\left| |a| - |b| \right|^2 \leq |a-b||a+b| = |(a-b)(a+b)| = |a^2 - b^2|$$

$\Rightarrow \ \left| |a| - |b| \right|^2 \leq |a^2 - b^2|$

$\Rightarrow \ \left| |a| - |b| \right| \leq \sqrt{|a^2 - b^2|}$

06 Demostrar que $\forall \ x, y \in I\!R : |x| + |y| \geq 2\sqrt{|x|}\ \sqrt{|y|}$

Veamos:

Si ensayamos elevando al cuadrado obtenemos:

$$|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \geq 4|x||y|$$

$\Longleftrightarrow \ |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \geq 0$

$\Longleftrightarrow \ (|x| - |y|)^2 \geq 0$

Luego la demostración partirá de $(|x| - |y|)^2 \geq 0$

1) $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, esto es válido según el corolario 8.1.2

2) $\Rightarrow \ |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \geq 0$

3) Sumar $4|x||y|$ en ambos miembros:

$$\Rightarrow |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 + 4|x||y| \geq 4|x||y|$$

$$\Rightarrow |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \geq 4|x||y|$$

$$\Rightarrow (|x| + |y|)^2 \geq 4|x||y|$$

$$\Rightarrow |x| + |y| \geq 2\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$$

07 Probar que: $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$

Veamos:

Si ensayamos, antes de demostrar, tenemos: $a^2 = |a|^2$, $b^2 = |b|^2$

Luego: $|a|^2 + |b|^2 \geq 2|ab| \iff |a|^2 + |b|^2 - 2|ab| \geq 0$

$$\iff (|a| - |b|)^2 \geq 0$$

Luego, la demostración debe partir de $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, según el corolario 8.1.2

08 Probar que: $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$, $\forall\, a \neq 0$

Veamos:

1) Como $a \neq 0$, entonces $a > 0 \vee a < 0$

2) **Caso 1** Si $a > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > 0$ y $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$

$$\iff a - 2 + \frac{1}{a} \geq 0$$

$$\iff \left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2$$

$$\Rightarrow \left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2 \quad \text{(porque } a > 0,\ \frac{1}{a} > 0 \text{ y } a + \frac{1}{a} > 0\text{)}$$

Caso 2 Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0$, luego $\sqrt{-a} > 0$. Por tanto: $\left(\sqrt{-a} - \frac{1}{\sqrt{-a}}\right)^2 \geq 0$

$$\iff -a - 2 + \frac{1}{-a} \geq 0$$

$$\iff -a + \frac{1}{-a} \geq 2$$

$$\Rightarrow \qquad -\left(a+\tfrac{1}{a}\right)\geq 2 \Rightarrow \left|a+\tfrac{1}{a}\right|\geq 2', \text{ porque } -a>0 \wedge -\tfrac{1}{a}>0$$

$$\text{entonces } -a-\tfrac{1}{a}=-\left(a+\tfrac{1}{a}\right)>0$$

$$\text{y } \left|-\left(a+\tfrac{1}{4}\right)\right| = \left|a+\tfrac{1}{a}\right|$$

Consecuencias:

i) Según el problema ⑧: $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geq 2 \quad ; \quad \forall\, a\in I\!R$, con $a\neq 0$ se deduce que:

$$\Big|\underbrace{\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a}}_{\text{son números reales inversos}}\Big|\geq 2 \quad , \quad \forall\, a\neq 0 \;,\; b\neq 0 \;,\; a,b\in I\!R$$

ii) Igualmente $\forall\, a,b,c\in I\!R \;,\; a\neq I\!R \;,\; b\neq 0 \;,\; c\neq 0$, deducimos:

1) $2\leq\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right|\leq\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{a}\right| \quad\Rightarrow\quad 2\leq\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{a}\right|$

2) $2\leq\left|\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right|\leq\left|\frac{a}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right| \quad\Rightarrow\quad 2\leq\left|\frac{a}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|$

3) $2\leq\left|\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right|\leq\left|\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right| \quad\Rightarrow\quad 2\leq\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|$

iii) $$(|a|+|b|)\left(\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}\right)=1+\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{a}\right|+1=2+\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{a}\right|\right)$$
$$\geq 2+2=4$$

Luego: $(|a|+|b|)\left(\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}\right)\geq 4$

iv) $$(|a|+|b|+|c|)\left(\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|c|}\right)=(|a|+|b|)\left(\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}\right)+\left|\frac{a}{c}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|+1$$

$$=\underbrace{(|a|+|b|)\left(\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}\right)}+\underbrace{\left(\left|\frac{a}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)}+\underbrace{\left(\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|\right)}+1$$

$$\geq \quad 4 \quad + \quad 2 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1$$

$$\geq \quad 9$$

Luego: $\quad (|a|+|b|+|c|)\left(\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|c|}\right)\geq 9$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{|a|}+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|c|}\geq\frac{9}{|a|+|b|+|c|}}$$

09 Probar que $(|a|+|b|+|c|)(a^2+b^2+c^2) \geq 9|abc|$, $\forall\, a,b,c \in I\!R$

Probaré para el caso: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, porque si $a=b=c=0$ es trivial.

Veamos:

Según el problema 7, tendremos:

1) $a^2+b^2 \geq 2|ab|$

2) $a^2+c^2 \geq 2|ac|$

3) $b^2+c^2 \geq 2|bc|$

4) Sumar: $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(|ab|+|ac|+|bc|)$

$$\Rightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq |ab|+|ac|+|bc|$$

5) Por $\frac{1}{|abc|} \Rightarrow \frac{1}{|abc|}(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{1}{|c|}+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|a|}$; pues $abc \neq 0$

6) Según la consecuencia (*iv*) del problema **8**: $\frac{1}{|c|}+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|a|} \geq \frac{9}{|a|+|b|+|c|}$

7) Volviendo al paso 5): $\frac{1}{|abc|}(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{1}{|c|}+\frac{1}{|b|}+\frac{1}{|a|} \geq \frac{9}{|a|+|b|+|c|}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|abc|}(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{9}{|a|+|b|+|c|}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (|a|+|b|+|c|)(a^2+b^2+c^2) \geq 9|abc|$$

10 Sean $a,b \in I\!R$, demostrar $|a|+|b| \leq |a+b|+|a-b|$

Prueba:

1) De $|2a| = |a+a+b-b| = |(a+b)+(a-b)| \leq |a+b|+|a-b|$

$\Rightarrow\ 2|a| \leq |a+b|+|a-b|$ .... (1*)

2) De $|2b| = |b+b+a-a| = |(a+b)+(-a+b)| \leq |a+b| + \underbrace{|-a+b|}_{|a-b|}$

$\Rightarrow\ 2|b| \leq |a+b|+|a-b|$ .... (2*)

3) Sumar miembro a miembro las desigualdades (1*) y (2*):

$$2(|a|+|b|) \leq 2(|a+b|+|a-b|)$$

$$\Longleftrightarrow \quad |a|+|b| \leq |a+b|+|a-b|$$

11 Si $a>0$, $b>0$, $c>0$. Demostrar: $|b-c|<a<b+c \iff |a-c|<b<a+c$

Veamos:

La demostración consiste en aplicar sucesivamente la propiedad:

$$-k<x<k \iff k>0 \ \wedge \ |x|<k$$

($\Rightarrow$) Debo probar que: $|b-c|<a<b+c$ implica $|a-c|<b<a+c$.

1) De la hipótesis: $\underbrace{|b-c|<a}<b+c$

2) $\Rightarrow$ $$-a<b-c<a<b+c$$

$$\begin{array}{lcccc} \Rightarrow -a<b-c & \wedge & b-c<a & \wedge & a<b+c \\ a>c-b & \wedge & b<a+c & \wedge & a-c<b \\ a-c>-b & & & & \end{array}$$

$$\underbrace{-b<a-c<b}<a+c$$

$$|a-c|<b<a+c$$

($\Leftarrow$) Debo probar que $|a-c|<b<a+c$ implica $|b-c|<a<b+c$
Queda como ejercicio..............

12 Demostrar que $\forall\, a,b,c \in I\!R$, se cumple: $(|a|+|b|)\,(|a|+|c|)\,(|b|+|c|) \geq \sqrt{8}\,|a\,b\,c|$

Prueba:

1) Según el problema 6: $|x|+|y| \geq 2\sqrt{|x|}\,\sqrt{y}$, $\forall\, x,y \in I\!R$ se obtendrá sucesivamente:

i) $|a|+|b| \geq 2\sqrt{|a|}\,\sqrt{|b|}$

ii) $|a|+|c| \geq 2\sqrt{|a|}\,\sqrt{|c|}$

iii) $|b|+|c| \geq 2\sqrt{|b|}\,\sqrt{|c|}$

2) Multiplicar miembro a miembro estas desigualdades:

$$(|a|+|b|)(|a|+|c|)(|b|+|c|) \geq 8|a||b||c| = 8|abc|$$

3) Luego: $(|a|+|b|)\,(|a|+|c|)\,(|b|+|c|) \geq 8|abc|$

13 Demostrar que: $\left|\frac{bc}{a}\right|+\left|\frac{ac}{b}\right|+\left|\frac{ab}{c}\right| \geq |a+b+c|$, $\forall\ a,b,c \in I\!R-\{0\}$

Prueba:

Teniendo como referencia el problema 8, en la consecuencia *ii*) obtuvimos:

1) $2 \leq \left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{a}\right|$ por $|c|$ $\Rightarrow$ $2|c| \leq \left|\frac{ac}{b}\right|+\left|\frac{bc}{a}\right|$

2) $2 \leq \left|\frac{a}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|$ por $|b|$ $\Rightarrow$ $2|b| \leq \left|\frac{ab}{c}\right|+\left|\frac{bc}{a}\right|$

3) $2 \leq \left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|$ por $|a|$ $\Rightarrow$ $2|a| \leq \left|\frac{ab}{c}\right|+\left|\frac{ac}{b}\right|$

4) Sumar: $2(|c|+|b|+|a| \leq 2\left(\left|\frac{ac}{b}\right|+\left|\frac{bc}{a}\right|+\left|\frac{ab}{c}\right|\right)$

$\Rightarrow$ $|a|+|b|+|c| \leq \left|\frac{ab}{c}\right|+\left|\frac{ac}{b}\right|+\left|\frac{bc}{a}\right|$

5) Pero $|a+b+c|=|(a+b)+c| \leq |a+b|+|c| \leq |a|+|b|+|c|$

6) Por (5) y (4): $|a+b+c| \leq \left|\frac{ab}{c}\right|+\left|\frac{ac}{b}\right|+\left|\frac{bc}{a}\right|$

14 Demostrar que $\forall\ a,b \in I\!R$, se cumple: $|a+b|=|a|+|b| \iff ab \geq 0$

Prueba:

$(\Rightarrow)$

1) Según la hipótesis: $|a+b|=|a|+|b|$

2) Elevar al cuadrado: $|a+b|^2 = (|a|+|b|)^2$

$\Rightarrow$ $(a+b)^2 = |a|^2+2|a||b|+|b|^2$, pero $|a|^2=a^2$

$\Rightarrow$ $a^2+2ab+b^2 = a^2+2|a||b|+b^2$ $\qquad |b|^2 = b^2$

$\Rightarrow$ $ab = |a||b|$

$= |ab|$

3) Si $|ab|=ab$ implica $ab \geq 0$

$(\Leftarrow)$ *Queda como ejercicio...*

15 Dados los números reales a, b, c, con $abc \neq 0$ y $a+b+c=0$

Demostrar que: $\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Prueba:

$$\text{De} \quad \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|^2 = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\frac{1}{ab}+2\frac{1}{ac}+2\frac{1}{bc}$$

$$= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(c+b+a)}{abc}$$

$$= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+0\text{, pues } \quad a+b+c=0 \quad \text{y} \quad abc \neq 0$$

$$= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

16 Probar que: $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4|abcd|$, $\forall\, a,b,c,d \in I\!R$

Prueba:

1) Se cumple: $(|x|-|y|)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; |x|^2+|y|^2 \geq 2|x||y|$, $\forall\, x,y \in I\!R$

2) Haciendo: $|x| = a^2$ y $|y| = b^2 \;\Rightarrow\; a^4+b^4 \geq 2a^2b^2$

3) Igualmente: $c^4+d^4 \geq 2c^2d^2$

4) Sumar: $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 2(a^2b^2+c^2d^2)$

5) Si en 1) hacemos $x = ab$, $y = cd$ obtenemos:

$$|ab|^2+|cd|^2 \geq 2|ab||cd|$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2b^2+c^2d^2 \geq 2|abcd|$$

6) Por 2: $\Rightarrow\; 2(a^2b^2+c^2d^2) \geq 4|abcd|$

7) Comparando 4) con 6) y por transitividad: $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4|abcd|$

17 Probar que: a) máx $\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}|a-b|$

b) mín $\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}|a-b|$

Prueba:

La demostración se hace en base a las siguientes definiciones:

Definición 1 Dado un conjunto S de números reales, se dice que "m" es el mínimo de S, si verifica las siguientes condiciones:

i) $m \in S$
ii) $m \leq s \ , \ \forall \, s \in S$

Se denota: $m = \text{mín}(S)$

Definición 2 Dado un conjunto S de números reales, se dice que "k" es el máximo de S, si verifica las siguientes condiciones:

i) $k \in S$
ii) $s \leq k \ , \ \forall \, s \in S$

Veamos:

Sobre el conjunto $\{a,b\}$ haremos 4 suposiciones:

1) Supongamos que $a = \min\{a,b\}$ entonces:

i) $a \in \{a,b\}$ lo cual es verdadero.

ii) $a \leq a \quad \wedge \quad a \leq b$

es **VERDADERO** (Prop. reflexiva)

Si $a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$, luego $|b-a| = b-a$

En consecuencia: $\text{mín}\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a) = a$

2) Supongamos que $b = \text{mín}\{a,b\}$, entonces:

i) $b \in \{a,b\}$, lo cual es verdadero.

ii) $b \leq a \quad \wedge \quad b \leq b$

es **VERDADERO** (Prop. reflexiva)

Si $b \leq a \Rightarrow a - b \geq 0$, luego $|a-b| = a-b$

En consecuencia $\text{máx}\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) = b$

3) Supongamos que $a = \text{máx}\{a,b\}$, entonces:

i) $a \in \{a,b\}$, lo cual es verdadero.

ii) $a \geq a \quad \wedge \quad a \geq b$

es **VERDADERO**

Si $a \geq b \Rightarrow a-b \geq 0$, luego $|a-b| = a-b$

En consecuencia: $\text{máx}\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b) = a$

4) Suponer que $b = \text{máx}\{a,b\}$, entonces:

i) $b \in \{a,b\}$, lo cual es verdadero.

ii) $b \geq a \;\wedge\; \underbrace{b \geq b}_{\text{es VERDADERO}}$

Si $b \geq a \Rightarrow a-b \leq 0$ luego $|a-b| = -(a-b) = b-a$

En consecuencia $\text{máx}\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a) = b$

4.13.2 DEMOSTRACIONES TEORICAS SOBRE DESIGUALDADES

18 Si a y b son números reales tales: que $0 < a < b$, demostrar que:

i) $a < \sqrt{ab} < \frac{ab}{2} < b$ *ii)* $\sqrt{b^2 - a^2} < b$

DEMOSTRACIÓN DE *i*)

1) Como: $0 < a < b \iff a > 0 \;\wedge\; a < b$

Multiplicar (1*) por a: $a \cdot a < ab$

$\Rightarrow a^2 < ab$

$\Rightarrow a < \sqrt{ab}$ .... (1*)

2) De $a < b \Rightarrow a-b < 0$ y $(a-b)^2 > 0$

$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 > 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab$

Sumar $2ab$: $\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab > 4ab$

$\Rightarrow (a+b)^2 > 4ab$

Como $ab > 0$ $\Rightarrow a+b > 2\sqrt{ab}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ .... (2*)

3) De $a < b$, al sumar "b" implica: $a+b < b+b$

$\iff a+b < 2b$

$\iff \frac{a+b}{2} < b$ .... (3*)

4) Por (1*), (2*) y (3*) implica: $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

DEMOSTRACIÓN DE *ii*) $\sqrt{b^2 - a^2} < b$

Si ensayamos, al elevar al cuadrado, obtenemos: $b^2 - a^2 < b^2 \Rightarrow -a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Entonces para la demostración partimos de $a^2 > 0$.

Veamos:

1) Por hipótesis se tiene: $0 < a < b$, luego $a^2 > 0$

2) Pero $a^2 > 0 \iff -a^2 < 0$

3) Sumar b^2: $\Rightarrow b^2 - a^2 < b^2$

$\Rightarrow (b-a)(b+a) < b^2$

4) $\Rightarrow \sqrt{(b-a)(b+a)} < b$, pues $\begin{cases} a+b>0, \text{ porque } a>0 \\ \qquad \wedge \quad b>0 \\ b-a>0, \text{ porque } a<b \end{cases}$

5) $\Rightarrow \sqrt{b^2 - a^2} < b$

19 Sean $a, b \in I\!R$. Demostrar que si $a < 1$ y $b > 1$, entonces $a + b > 1 + ab$

Prueba:

1) De $a < 1$ $\Rightarrow 1 - a > 0$

2) De $b > 1$ $\Rightarrow 1 - b > 0$

3) Multiplicar: $\Rightarrow (1-a)(1-b) > 0$

$\Rightarrow 1 - b - a + ab > 0$

$\Rightarrow a + b - 1 - ab < 0$

$\Rightarrow a + b < 1 + ab$

20 Si $a < b < 0$ y $0 < c < d$. Demostrar que: $\frac{ac+bd}{2} < bc$

Prueba:

1) De $a < b < 0$ $\Rightarrow b - a > 0$

Como $c > 0$, multiplicar $\Rightarrow (b-a)c > 0$

$\Rightarrow bc - ac > 0$

$\Rightarrow ac - bc < 0 \Rightarrow ac < bc$ .... (1*)

2) De $0 < c < d \quad \Rightarrow \quad d - c > 0$

Como $b < 0 \Rightarrow -b > 0 \quad \Rightarrow \quad (d-c)(-b) > 0$

$$\Leftrightarrow \quad (c-d)b > 0$$

$$\Rightarrow \quad cb - db > 0$$

$$\Rightarrow \quad bd - bc < 0 \Rightarrow bd < bc \; \ldots\ldots\ldots\ldots (2*)$$

3) Sumar: $(1*) \wedge (2*)$: $\quad ac + bd < 2bc \Rightarrow \frac{ac+bd}{2} < bc$

21 Demostrar: si $a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2 \quad , \quad a \in I\!R$

Prueba:

Si ensayamos a partir de $a + \frac{1}{a} \leq -2$ obtenemos: $a + \frac{1}{a} + 2 \leq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2+1+2a}{a} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(a+1)^2}{a} \leq 0 \quad , \text{ donde } \begin{cases} (a+1)^2 \geq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

Luego, para la demostración conviene partir de $(a+1)^2$

Veamos:

1) $(a+1)^2 \geq 0 \quad , \quad \forall\, a \in I\!R$

2) Como $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$

3) Al multiplicar la desigualdad 1) por $\frac{1}{a} < 0$, cambiará de sentido y obtenemos:

$$\frac{(a+1)^2}{a} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2+2a+1}{a} \leq 0 \Rightarrow a + 2 + \frac{1}{a} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad a + \frac{1}{a} \leq -2$$

22 Si $a > 0$ y $b < 0$, demostrar que $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-a}$

Prueba:

Si ensayamos con $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-a}$ obtenemos: $\frac{1}{b} < \frac{1}{b-a}$, pues $a > 0$.

Si multiplicamos por (-1) obtenemos: $\frac{1}{-b} > \frac{1}{a-b}$, donde $\begin{cases} -b > 0 \; , \text{ pues } b < 0 \\ a > 0 \Rightarrow a - b > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad a - b > -b$$

$$\Rightarrow \quad a > 0$$

Por lo tanto, conviene empezar la demostración de $a > 0$.
Veamos:

1) Por hipótesis se tiene: $a > 0$

2) También se tiene: $\quad b < 0 \Rightarrow -b > 0$

3) En 1) sumar $-b$ $\quad \Rightarrow a + (-b) > 0 + (-b)$

$\Rightarrow a - b > -b$

4) Invertir: $\quad \Rightarrow \frac{1}{a-b} < \frac{1}{-b}$, pues $\begin{cases} -b > 0 \\ a - b > 0 \end{cases}$, ya que: $a > 0$

$$\begin{array}{r} -b > 0 \\ \hline a + (-b) > 0 + 0 \\ a - b > 0 \end{array}$$

5) Multiplicar por a $\quad \Rightarrow \frac{a}{a-b} < \frac{a}{-b}$, pues $a > 0$

6) Por -1 $\quad \Rightarrow \frac{a}{b-a} > \frac{a}{b}$

23 Demostrar que $\frac{a^2}{a^4+1} \leq \frac{1}{2}$, $\forall\, a \in I\!R$.

Prueba:

Si ensayamos con $\frac{a^2}{a^4+1} \leq \frac{1}{2}$ obtenemos: $2a^2 \leq a^4 + 1 \iff a^4 - 2a^2 + 1 \geq 0$

$$\iff (a^2 - 1)^2 \geq 0$$

Luego, conviene partir de $(a^2 - 1)^2$ **para llegar a la demostración.**

Veamos:

1) Se cumple que: $\quad (a^2 - 1)^2 \geq 0$, $\forall\, a \in I\!R$

$\Rightarrow \quad a^4 - 2a^2 + 1 \geq 0$

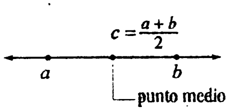
$\Rightarrow \quad a^4 + 1 \geq 2a^2$

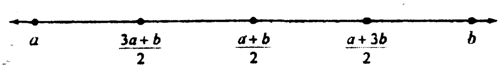
2) Multiplicar por $\frac{1}{a^4+1} \Rightarrow 1 \geq \frac{2a^2}{a^4+1}$, pues $a^4 + 1 > 0$, $\forall\, a \in I\!R$

3) Multiplicar por $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{a^2}{a^4+1} \iff \frac{a^2}{a^4+1} \leq \frac{1}{2}$

24 Si $a < b$, $a \in I\!R$, $b \in I\!R$, demostrar que: $a < \frac{3a+b}{4} < \frac{2a+2b}{4} < \frac{a+3b}{4} < b$

Prueba:





1) Si $a < b$, $\exists\, c = \frac{a+b}{2} \in I\!R$, tal que, $a < \frac{a+b}{2} < b \iff a < \frac{a+b}{2} \wedge \frac{a+b}{2} < b$

2) De $a<\frac{a+b}{2}$ implica $a<\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}<\frac{a+b}{2}$

punto medio entre a y $\frac{a+b}{2}$

$$\Longleftrightarrow \quad a<\frac{3a+b}{4}<\frac{a+b}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2*)$$

3) De $\frac{a+b}{2}<b$ implica $\frac{a+b}{2}<\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}<b$

punto medio entre $\frac{a+b}{2}$ y b.

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{a+b}{2}<\frac{a+3b}{4}<b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3*)$$

4) De (2*) $\wedge$ (3*) se deduce:

$$a<\frac{3a+b}{4}<\frac{a+b}{2}<\frac{a+3b}{4}<b$$

$$\Longleftrightarrow \quad a<\frac{3a+b}{4}<\frac{2a+2b}{4}<\frac{a+3b}{4}<b \text{ , pues } \frac{a+b}{2}=\frac{2(a+b)}{4}$$

25 Demostrar que: $(a^2+d^2)(b^2+c^2)\geq 4abcd$, $\forall\ a,b,c,d\in I\!R$

Prueba:

1) Se cumple: $(a-d)^2\geq 0 \Longleftrightarrow a^2-2ad+d^2\geq 0$

$$\Longleftrightarrow a^2+d^2\geq 2ad \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1*)$$

2) Se cumple: $(b-c)^2\geq 0 \Longleftrightarrow b^2-2bc+c^2\geq 0$

$$\Longleftrightarrow b^2+c^2\geq 2bc \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2*)$$

3) Multiplicar: (1*) por (2*): $(a^2+d^2)(b^2+c^2)\geq 4abcd$

26 Si $a,b\in I\!R$ tal que $a>b>0$, entonces: $\frac{a}{b}+\frac{3b}{a}>\frac{b^2}{a^2}+3$

Prueba:

Si ensayamos con la desigualdad: $\frac{a}{b}+\frac{3b}{a}>\frac{b^2}{a^2}+3$

Obtenemos: $\frac{a}{b}+\frac{3b}{a}-\frac{b^2}{a^2}-3>0 \Longleftrightarrow \frac{a^3+3ab^2-b^3-3a^2b}{a^2b}>0$

$$\Longleftrightarrow \frac{(a-b)^3}{a^2b}>0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

La desigualdad (*) nos ayuda a deducir, como debemos empezar la demostración.

Veamos:

1) Por hipótesis se tiene: $a > b$

2) De $a > b$ implica : $a - b > 0$

3) $\Rightarrow$ $(a-b)^3 > 0$ .... (3*)

4) Como $a > 0$ $\Rightarrow$ $a^2 > 0$

5) Como $b > 0$ $\Rightarrow$ $a^2 b > 0$ y $\frac{1}{a^2 b} > 0$ .... (5*)

6) Si multiplicamos (5*) por (3*) obtenemos: $\frac{(a-b)^3}{a^2 b} > 0$

$$\Rightarrow \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^2 b} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} - 3 + 3\frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{3b}{a} > \frac{b^2}{a^2} + 3$$

27 Demostrar que si $0 < a \le b$ entonces $\frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \le \frac{b^2}{a^2} + 3$

Demostración:

Es idéntico al problema anterior. Deberá partir de $(b-a) \ge 0$ ya que $b \ge a > 0$, además que $a > 0$ y $b > 0$.

Queda como ejercicio. ......

28 Sean $a, b, m, n \in I\!R$ tales que $b > 0$ y $n > 0$.

Si $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$ entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$

Prueba:

Previamente ensayemos con las desigualdades:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n} \iff \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} \quad \wedge \quad \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$$

$$\iff \underline{ab} + an < \underline{ba} + bm \quad \wedge \quad an + \underline{\underline{mn}} < bm + \underline{\underline{nm}}$$

$$\iff an < bm \quad \wedge \quad an < bm$$

$$\iff \frac{a}{b} < \frac{m}{n} \quad \wedge \quad \frac{a}{b} < \frac{m}{n}$$

En el ensayo, podemos apreciar que se han sumado los términos *ab* y *mn*. Ahora, ya estamos preparados para la demostración pedida.

Veamos:

1) Por hipótesis se tiene: $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$ y $b > 0$, $n > 0$

2) $\Rightarrow$ $an < mb$ (el sentido no cambia porque $b > 0 \wedge n > 0$)

3) En (2) sumar *ab*:

$$ab + an < ab + mb$$
$$\Rightarrow \quad a(b+n) < b(a+m)$$

Por $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b+n}$ en ambos miembros:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} \text{ , pues } \begin{cases} b > 0 \\ b+n > 0 \end{cases}$$

4) En (2) sumar *mn*:

$$an + mn < mb + mn$$
$$\Rightarrow \quad n(a+m) < m(b+n)$$

Por $\frac{1}{b+n} \cdot \frac{1}{n}$ en ambos miembros:

$$\frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n} \text{ , pues } \begin{cases} n > 0 \\ b+n > 0 \end{cases}$$

5) Por tanto: $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$ *(Propiedad transitiva)*

29 Demostrar que $\forall\ a, b \in I\!R^+$ se cumple: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

Demostración:

Antes de proceder a la demostración, conviene ensayar con la desigualdad dada, para darnos cuenta cómo y de dónde empezar.

De $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2}$ $\iff$ $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8} \leq \frac{a^3+b^3}{2}$

$$\iff a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 4a^3 - 4b^3 \leq 0$$

$$\iff -\underline{\underline{3a^3}} - \underline{\underline{3b^3}} + \underline{3a^2b} + \underline{3ab^2} \leq 0$$

$$\iff a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3$$

$$\iff ab(\cancel{a+b}) \leq (\cancel{a+b})(a^2 - ab + b^2) \quad , \quad (a+b) \in I\!R$$

$$\iff ab \leq a^2 - ab + b^2$$

$$\iff 0 \leq (a-b)^2$$

Entonces la demostración debe empezar por $(a-b)^2$

Veamos:

1) Por hipótesis se tiene que $a>0 \quad \wedge \quad b>0$

2) Pero $(a-b)^2 \geq 0$

3) $\Rightarrow \quad a^2-2ab+b^2 \geq 0$

4) $\Rightarrow \quad a^2-ab+b^2 \geq ab$

5) Por $(a+b)$ $\quad \Rightarrow \underbrace{(a+b)(a^2-ab+b^2)} \geq ab(a+b)$ pues $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ \Rightarrow a+b>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$

6) Por 3 $\quad \Rightarrow \quad 3a^3 + 3b^3 \geq 3a^2b+3ab^2$

7) $\quad \Rightarrow \overbrace{4a^3-a^3}+\overbrace{4b^3-b^3} \geq 3a^2b+3ab^2$

$\Rightarrow 4(a^3+b^3) \geq \underbrace{a^3+3a^2b+2ab^2+b^3}_{(a+b)^3}$

8) Por $\frac{1}{8}$ $\quad \Rightarrow \frac{(a^3+b^3)}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

30 Demostrar que si a, b y c están en progresión geométrica, se cumple:
$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^3$

Demostración:

1) Desarrollar el producto: $(a+b+c)(a-b+c)=((a+c)+b)((a+c)-b)$

$$=(a+c)^2-b^2$$

2) Como a, b y c están en Progresión Geométrica, consideremos:

$\begin{cases} a=mr^2 & \longleftarrow \text{ mayor} \\ b=mr & \longleftarrow \text{ medio} \\ c=m & \longleftarrow \text{ menor} \end{cases}$ y sustituir en 1):

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a-b+c) &= (mr^2+m)^2-m^2r^2 \\ &= m^2r^4+2m^2r^2+m^2-m^2r^2 \\ &= m^2r^4+m^2r^2+m^2 \\ &= (mr^2)^2+(mr)^2+m^2 \\ &= a^2+b^2+c^2\end{aligned}$$

A. PROBLEMAS SOBRE OPERACIÓN BINARIA

01 Sea $A = I\!R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Definimos la siguiente operación binaria en A

$$* : A \times A \longrightarrow A$$
$$(a,b) \longrightarrow a * b = a + b + 2ab$$

donde $x+y$, xy representan las usuales "suma" y "producto" de números reales x e y. Admitamos que * es una operación conmutativa y asociativa.

Según esto:

a) Hallar el elemento **NEUTRO** o identidad respecto de * .

b) Discutir la existencia de a^{-1}, el elemento inverso de $a \in A$, respecto de *.

c) Resolver $\left(\frac{1}{2} * x^{-1}\right) * 2 = \left((-x) * \frac{3}{2}\right) * 2$ donde $-x$ es el opuesto de x, con respecto a la adición de números reales.

Solución:

a) Por definición de elemento neutro se tiene:

$$\underbrace{a * e} = a \quad , \quad \forall\, a \in A$$
$$a + e + 2ae = a$$
$$e(1+2a) = 0 \quad , \quad a \neq -\tfrac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \qquad \boxed{e = 0}$$

b) Por definición de a^{-1}, se tiene:

$$\underbrace{a * a^{-1}} = \underbrace{e} \quad \text{si existe } e$$
$$a + a^{-1} + 2aa^{-1} = 0$$
$$a^{-1}(1+2a) = -a$$
$$a^{-1} = -\frac{a}{1+2a} \quad , \quad a \neq -\frac{1}{2}$$

c) Si admitimos que * es conmutativa y asociativa, entonces:

$$\left(\tfrac{1}{2} * x^{-1}\right) * 2 = \left((-x) * \tfrac{3}{2}\right) * 2$$
$$x^{-1} * \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} * 2\right)}_{\underbrace{\frac{1}{2}+2+2\left(\frac{1}{2}\right)(2)}_{\frac{9}{2}}} = (-x) * \underbrace{\left[\tfrac{3}{2} * 2\right]}_{\underbrace{\frac{3}{2}+2+2\left(\frac{3}{2}\right)(2)}_{\frac{19}{2}}}$$
$$x^{-1} * \tfrac{9}{2} = (-x) * \tfrac{19}{2}$$
$$\left(-\frac{x}{1+2x}\right) * \frac{9}{2} = (-x) * \frac{19}{2}$$
$$-\frac{x}{1+2x} + \frac{9}{2} + 2\left(\frac{-x}{1+2x}\right)\left(\frac{9}{2}\right) = -x + \frac{19}{2} + 2(-x)\left(\frac{19}{2}\right)$$
$$x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

02 Sean $M = \{1,2,3\}$ y $E = \{X / X \subset M \ \wedge \ X \neq \phi\}$

Definamos en E la operación binaria * siguiente:

$$* : E \times E \longrightarrow E$$
$$(A,B) \longmapsto A * B = \{\sup A, \sup B\}$$

Dar y justificar el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

a) $Sup(A \cup B) = Sup(A * B)$, $\forall\,(A,B) \in E \times E$

b) $Sup(A * B) = \{Sup\,A\} * \{Sup\,B\}$, $\forall\,(A,B) \in E \times E$

c) $\exists\, X \in E$, tal que $\forall\, A \in E$, $\{\sup(A * X)\} = X$

d) $\exists\, Y \in E$, tal que $\forall\, A \in E$, $A * Y = A$

Solución:

$E = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$

a) V   b) F

c) F   d) F

Ejemplos.-

$\{1\} * \{2\} = \{\sup\{1\}, \sup\{2\}\} = \{1,2\}$

$\{1\} * \{1,2\} = \{\sup\{1\}, \sup\{1,2\}\} = \{1,2\}$

$\{1\} * \{1,3\} = \{1,3\}$

$\{2\} * A = \{2,3\}$

$\{3\} * \{3\} = \{3\}$

B. PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Demostrar que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces: $\frac{2}{ab} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

02 Si $abc \neq 0$; demostrar que: $\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{|abc|^3}$

03 Si $a,b,c \in I\!R^+$, demostrar: a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

c) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{abc}$

04 Probar: $a^4 + b^4 \geq a^3 b + ab^3$, $\forall\, a,b \in I\!R$

05 Si: $a^2 + b^2 = 1 \wedge m^2 + n^2 = 1 \Rightarrow |am + bn| \leq 1$

06 Si a , b , c , $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$, son números positivos, probar:
$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$

07 Para números reales *a*, *b*, *c* demuestre que: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \Rightarrow a = b = c$

08 Si: $a+b=1$, demostrar que $a^4+b^4>\frac{1}{8}$

09 Sean $a,b,c,d\in I\!R$, tal que $b\neq 0$, $d\neq 0$. Demostrar que: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=-\left[\frac{bc-ad}{bd}\right]$

10 Demostrar que si $0<a<b<c$, entonces $\frac{a^3-b^3}{c(a-b)}>a-c$

11 Si $a<b<c$, expresar el conjunto A como intervalo $A=\left\{x\in I\!R\,/\,-1\leq\frac{ax+b}{bx-a}<1\right\}$

Rpta.: $x\in\left\langle\frac{a+b}{b-a},\frac{a-b}{a+b}\right]$

12 Si el conjunto solución de la inecuación $|x-a|\leq 2-(a+1)$ es $x\leq-\frac{1}{2}$. Hallar el valor de a.

Rpta.: $a=4$

13 Sean a, b, c, d números reales tales que $a\neq c$, $a>0$, $c>0$ y que $x>-\frac{b}{a}$, $x<-\frac{d}{c}$. Hallar la solución de $|ax+b|=|cx+d|$.

Rpta.: $x=-\frac{b+d}{a+c}$

4.14. ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

4.14.1 ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Las ecuaciones con valor absoluto se pueden presentar de diversas formas: unos serán de fácil e inmediata solución, otros necesitarán un análisis cuidadoso para encontrar la solución.

Algunas sugerencias que se pueden dar para resolver una ecuación con valor(es) absoluto(s) son:

1ro. Tener siempre presente la definición de valor absoluto,

$$|a|=\begin{cases} a\,,\text{si } a\geq 0 \\ -a\,,\text{si } a<0\end{cases} \quad \text{ó} \quad \boxed{[|a|=a\ ,\ \text{si } a\geq 0]\ \vee\ [|a|=-a\ ,\ \text{si } a<0]}$$

2do. Tener en cuenta la propiedad: $|a| \geq 0$, que nos indica que el valor absoluto siempe es positivo o cero, pero nunca es negativo.

3ro. Tener presentes las siguientes propiedades:

P_1) $|a| = 0 \iff a = 0$

P_2) $|a| = b \iff b \geq 0 \wedge [a = b \vee a = -b]$

P_3) $|a| = |b| \iff a = b \vee a = -b$

4to. Si una ecuación tiene dos o más valores absolutos, aplicar el **CRITERIO DE LOS PUNTOS REFERENCIALES.**

4.14.1.1. EJEMPLOS

01 Resolver: $2|2x-1| - 3 = 0$

Solución:

Para resolver aplicaremos la definición de valor absoluto, así:

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{Si } 2x-1 \geq 0 & \Rightarrow & 2(2x-1)-3=0 \\ x \geq \frac{1}{2} & \Rightarrow & 4x-2-3=0 \\ x \geq \frac{1}{2} & \Rightarrow & x=\frac{5}{4} \end{array}}_{\substack{\text{Como } 5/4 \text{ es mayor que } 1/2 \\ \text{entonces la solución es } 5/4}} \quad \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \vee \end{array} \quad \underbrace{\begin{array}{lll} \text{si } 2x-1 < 0 & \Rightarrow & 2(-2x+1)-3=0 \\ \text{si } x < \frac{1}{2} & \Rightarrow & -4x+2-3=0 \\ \text{si } x < \frac{1}{2} & \Rightarrow & x=-\frac{1}{4} \end{array}}_{\substack{\text{Como } -1/4 \text{ es menor que } 1/2 \\ \text{entonces la solución es } -1/4}}$$

Luego, el conjunto solución es: $C_S = \left\{ \frac{5}{4}, -\frac{1}{4} \right\}$

Otra forma de resolver es aplicando la propiedad P_2 :

Así: $2|2x-1|-3=0 \iff |2x-1| = \frac{3}{2}$, aplicar: $|a| = b \iff a = b \vee a = -b$

$$\begin{array}{lllll} \iff & 2x-1=\frac{3}{2} & \vee & 2x-1=-\frac{3}{2} \\ \iff & 2x=1+\frac{3}{2} & \vee & 2x=1-\frac{3}{2} \\ \iff & x=\frac{5}{4} & \vee & x=-\frac{1}{4} \end{array}$$

Luego: $C_S = \left\{ \frac{5}{4}, -\frac{1}{4} \right\}$

02 Resolver $\forall\, x \in I\!R$, $\big|\,|x-1| - 2x+1\big| = 0$

Solución:

$\big|\,|x-1| - 2x+1\big| = 0 \iff |x-1| - 2x+1=0$

Aplicar definición de valor absoluto.

$$\iff x-1 \geq 0 \Rightarrow x-1-2x+1=0 \quad \vee \quad x-1<0 \Rightarrow -x+1-2x+1=0$$

$$\iff x \geq 1 \Rightarrow -x=0 \quad \vee \quad x<1 \Rightarrow -3x+2=0$$

$$\iff \underbrace{x \geq 1 \Rightarrow x=0}_{\substack{\text{Pero } x=0 \text{ no es mayor} \\ \text{ni igual a 1, luego } x=0 \\ \textbf{NO} \text{ es solución}}} \quad \vee \quad \underbrace{x<1 \Rightarrow x=\tfrac{2}{3}}_{\substack{\text{Como } x=2/3 \text{ es menor} \\ \text{que 1, entonces } 2/3 \\ \text{es solución}}}$$

Luego: $C_S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

OTRA FORMA: De $|x-1| - 2x+1=0$

Aplicar P_2 : $\iff |x-1| = 2x-1 \iff 2x-1 \geq 0 \wedge [x-1=2x-1 \vee x-1=-2x+1]$

$$\iff x \geq \tfrac{1}{2} \quad \wedge \quad \left[x=0 \vee x=\tfrac{2}{3}\right]$$

$$\iff \left[\tfrac{1}{2}, +\infty\right[\cap \left\{0, \tfrac{2}{3}\right\} = \left\{\tfrac{2}{3}\right\}$$

Luego: $C_S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

03 Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $|2x^2+2x| = |-3x+3|$

Solución:

Aplicar P_3 : $2x^2+2x=-3x+3 \quad \vee \quad 2x^2+2x=-(-3x+3)$

$$2x^2+5x-3=0 \quad \vee \quad =3x-3$$

$$2x^3-x+3=0$$

$$(2x-1)(x+3)=0 \quad \vee \quad x=\frac{1 \pm \sqrt{1-4(2)(3)}}{2(2)}$$

$$\left[x=\tfrac{1}{2} \vee x=-3\right] \quad \vee \quad x=\frac{1 \pm \sqrt{-23}}{4} \Leftarrow \text{es imaginario.}$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}, -3\right\} \cup \phi$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}, -3\right\}$$

Luego: $C_S = \left\{ \frac{1}{2}, -3 \right\}$

04 Resolver $\forall x \in I\!R : |5x-1| - 5x+1 = 0$

Solución:

Aplicando la definición de valor absoluto:

A) $5x-1 \geq 0 \quad \wedge \quad 5x-1-5x+1=0 \quad \vee$

$\underbrace{x \geq \frac{1}{5}}_{\left[\frac{1}{5},+\infty\right[} \quad \wedge \quad \underbrace{0=0}_{\text{esta identidad, se cumple } \forall x \in I\!R} \quad \vee$

Al intersectar $\left[\frac{1}{5},+\infty\right[$ con $I\!R$ es $\left[\frac{1}{5},+\infty\right[$

B) $5x-1<0 \Rightarrow -5x+1-5x+1=0$

$x<\frac{1}{5} \quad \wedge \quad -10x+2=0$

$\underbrace{x<\frac{1}{5} \quad \wedge \quad x=\frac{1}{5}}_{\varnothing}$

Luego se tendrá: $C_S = \left[\frac{1}{5},+\infty\right[\cup \phi = \left[\frac{1}{5},+\infty\right[$

OTRA FORMA:

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Aplicando } P_2: & |5x-1| - 5x+1=0 & & \\
\Rightarrow & |5x-1| = 5x-1 & & \\
\Longleftrightarrow & 5x-1 \geq 0 & \wedge & [5x-1=5x-1 \ \vee \ 5x-1=-(5x-1)] \\
\Longleftrightarrow & x \geq \frac{1}{5} & \wedge & \left[\underbrace{0=0} \ \vee \ x=\frac{1}{5}\right] \\
\Longleftrightarrow & \left[\frac{1}{5},+\infty\right\rangle & \cap & \left[I\!R \cup \left\{\frac{1}{5}\right\} \right] \\
\Longleftrightarrow & x \in \left[\frac{1}{5},+\infty\right\rangle = C_S & &
\end{array}
$$

05 Resolver $\forall x \in I\!R \ ; \ \big|3-|x-1|\big| = |2x-1|$

Solución:

1) Aplicar P_2: $3-|x-1|=2x-1 \quad \vee \quad 3-|x-1|=-(2x-1)$

$\underbrace{4-2x-|x-1|=0}_{A} \quad \vee \quad \underbrace{2+2x-|x-1|=0}_{B}$

2) Resolver la ecuación A:

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{Si } x-1\geq 0 & \Rightarrow & 4-2x-(x-1)=0 \\ x\geq 1 & \Rightarrow & x=\frac{5}{3} \end{array}}_{\left\{\frac{5}{3}\right\}} \quad \vee \quad \underbrace{\begin{array}{lll} \text{Si } x-1<0 & \Rightarrow & 4-2x-(-x+1)=0 \\ x<1 & \Rightarrow & x=3 \end{array}}_{\phi}$$

Luego: $A=\left\{\frac{5}{4}\right\}\cup\phi=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

3) Resolver la ecuación B:

$$\underbrace{\begin{array}{lll} \text{Si } x-1\geq 0 & \Rightarrow & 2+2x-(x-1)=0 \\ x\geq 1 & \Rightarrow & 2+2x-x+1=0 \\ & & x=-3 \end{array}}_{\phi\text{, pues } -3 \text{ no es mayor o igual que } 1.} \quad \vee \quad \underbrace{\begin{array}{lll} \text{Si } x-1<0 & \Rightarrow & 2+2x-(-x+1)=0 \\ x<1 & \Rightarrow & x=-\frac{1}{3} \end{array}}_{\left\{-\frac{1}{3}\right\}\text{, pues } -\frac{1}{3}<1}$$

$\cup$

Luego: $B=\phi\cup\left\{-\frac{1}{3}\right\}=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

4) ***Conclusión:*** $C_S=A\cup B=\left\{\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right\}$

06 Resolver $\forall\, x\in I\!R$: $ax-b=c|x|$; a, b, c son positivos.

Solución:

Aplicando la definición de valor absoluto:

$$ax-b=c|x|$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{Si } x\geq 0 \Rightarrow ax-b=cx \quad \vee \quad \text{Si } x<0 \Rightarrow ax-b=c(-x)$$

$$x\geq 0 \Rightarrow (a-c)x=b \quad \vee \quad x<0 \Rightarrow ax-b=-cx$$

$$x=\frac{b}{a-c} \qquad\qquad \Rightarrow x(a+c)=b$$

$$\Rightarrow x=\frac{b}{a+c}$$

El número: $\frac{b}{a-c}$ será solución siempre que $a-c>0 \Leftrightarrow a>c$ con $a>0$, $b>0$, $c>0$.

El número: $\frac{b}{a+c}$ no es solución, porque no es negativo, pues $a>0$, $b>0$, $c>0$ $\Rightarrow \frac{b}{a+c}>0$. Luego **NO existe solución** en esta ecuación

Luego: $C_S=\left\{\frac{b}{a-c}\right\}$, si $a>c$.

07 Resolver $\forall x \in IR$: $\left|\, 2|x-a| - bx \,\right| = \left|\, 2b - |x-a| \,\right|$, $b<0$, $-2<a\leq 2$

Solución:

1) $\Longleftrightarrow \quad 2|x-a| - bx = 2b - |x-a| \quad \vee \quad 2|x-a| - bx = -2b + |x-a|$

$\Longleftrightarrow \quad 3|x-a| = bx + 2b \quad \vee \quad \underbrace{|x-a| = b(x-2)}_{B}$

$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{|x-a| = \frac{b(x+2)}{3}}_{A}$

2) Resolver A:

$$|x-a| = \frac{b(x+2)}{3} \Longleftrightarrow \frac{b(x+2)}{3} \geq 0 \quad \wedge \quad \left[x-a = \frac{b(x+2)}{3} \quad \vee \quad x-a = -\frac{b(x+2)}{3}\right]$$

$$x \leq -2 \quad \wedge \quad \left[3x-3a = bx+2b \;\vee\; 3x-3a = -bx-2b\right]$$

$$\text{pues } \; b<0 \qquad\qquad x = \frac{3a+2b}{3-b} \quad \vee \quad x = \frac{3a-2b}{b+3}$$

Ahora, nos toca analizar qué valores de x es solución:

i) Supongamos que:

$$\frac{3a+2b}{3-b} \leq -2 \Longleftrightarrow 3a+2b \leq -6+2b \Longleftrightarrow 3a \leq -6 \Longleftrightarrow a \leq -2$$

se puede multiplicar, porque $b<0 \Rightarrow -b>0$ y $3-b>0$

Luego: $x = \frac{3a+2b}{3-b}$ no es solución, porque $a \leq -2$. En datos se tiene $\begin{cases} b<0 \\ -2<a\leq 2 \end{cases}$

ii) Supongamos que:

$$\frac{3a-2b}{b+3} \leq -2 \Longleftrightarrow 3a-2b \leq -2b-6 \Longleftrightarrow 3a \leq -6 \Longleftrightarrow a \leq -2$$

se multiplica, sin cambiar el sentido,
siempre que $b+3>0 \Leftrightarrow b>-3$, como $-3<b<0$

Luego: $x = \frac{3a-2b}{b+3}$ no es solución, porque $a \leq -2$, Si $-3<b<0$

iii) En *ii*) si $b+3<0 \Longleftrightarrow \frac{3a-2b}{b+3} \leq -2$ implica: $3a-2b \geq -2b-6 \Longleftrightarrow a \geq -2$

Luego: $\boxed{x = \frac{3a-2b}{b+3}}$ es solución, si $-2<a\leq 2 \;\wedge\; b<-3$

3) Solución de B:

$$|x-a| = b(x-2) \iff b(x-2) \geq 0 \quad \wedge \quad [x-a = bx-2b \quad \vee \quad x-a = -bx+2b]$$

$$\iff x \leq 2 \quad \wedge \quad [x(1-b) = a-2b \ \vee \ x(1+b) = a+2b]$$

pues $b < 0$

$$\underset{(i)}{x = \frac{a-2b}{1-b}} \ \vee \ \underset{(ii)}{x = \frac{a+2b}{1+b}}$$

Analicemos qué valores de x es solución de la ecuación.

i) Supongamos que $\frac{a-2b}{1-b} \leq 2 \Leftrightarrow a-2b \leq 2-2b$, siempre que $1-b>0 \wedge \begin{cases} b<0 \\ -2<a\leq 2 \end{cases}$

$a \leq 2$.

Luego: $\boxed{x = \frac{a-2b}{1-b}}$ es solución para $-2 < a \leq 2 \ \wedge \ b < 0$

ii) Suponer que $\frac{a+2b}{1+b} \leq 2 \iff a+2b \leq 2+2b$ siempre que

$a \leq 2$

$1+b>0 \ \wedge \begin{cases} b<0 \\ -2<a\leq 2 \end{cases}$

$b > -1$

Luego: $\boxed{x = \frac{a+2b}{1+b}}$ es solución para $-2 < a \leq 2 \ \wedge \ -1 < b < 0$

iii) Si $1+b<0$ entonces $\frac{a+2b}{1+b} \leq 2$ implica $a+2b \geq 2+2b$

$a \geq 2$

Siempre que $\begin{cases} b<0 \\ -2<a\leq 2 \end{cases}$

Luego $x = \frac{a+2b}{1+b}$ es solución si $a=2 \ \wedge \ b<-1$

08 Resolver $\forall\, x \in I\!R : (|x-2|+3|x-1|+2(x+5)^2)(2|x-3|-x) = 0$

Solución:

1) El factor $|x-2|+3|x-1|+2(x+5)^2$ nunca será cero, porque es una suma de números positivos $\forall\, x \in I\!R$.

Lo único que puede ser igual a cero es: $2|x-3|-x$

2) Resolver: $2|x-3|-x=0$

Si $x-3\geq 0 \;\Rightarrow\; 2(x-3)-x=0$

$\quad x\geq 3 \;\Rightarrow\; x=6$

Luego: $x=6$ es solución porque

$\quad 6>3$

$\Rightarrow\; S_1=\{6\}$

$\vee \quad \cup$

Si $x-3<0 \;\Rightarrow\; 2(-x+3)-x=0$

$\quad x<3 \;\Rightarrow\; x=2$

Luego, $x=2$ es solución porque

$\quad 2<3$ es verdadero

$\Rightarrow\; S_2=\{2\}$

3) Conclusión: $C_S=S_1\cup S_2=\{6\}\cup\{2\}=\{6,2\}$

4.14.1.2 ECUACIÓN CON DOS O MÁS VALORES ABSOLUTOS (CRITERIO DE LOS PUNTOS REFERENCIALES)

El criterio de los puntos referenciales es muy sencillo de aplicarse para resolver ecuaciones o inecuaciones con dos o más valores absolutos y su procedimiento se explicará con algunos ejemplos.

Ejemplo 01 Resolver $\forall\, x\in I\!R:\; 2|x-2|-|x+3|=-5$ .... (*)

Solución:

PASO 1 Los puntos referenciales son los números reales que hacen cero cada valor absoluto. Así tendremos que:

De $|x-2|$ se obtiene el punto referencial $x=2$

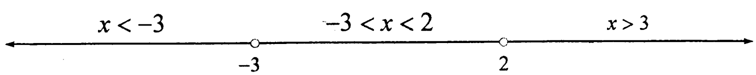
De $|x+3|$ se obtiene el punto referencial $x=-3$

PASO 2 Analizar si algunos puntos referenciales son soluciones de la ecuación dada. En el presente ejemplo observamos que:

i) Si $x=2 \Rightarrow$ la ecuación se convierte en: $0-|2+3|=-5$, lo cual es **VERDADERO** luego afirmamos que $\boxed{x=2}$ es solución de la ecuación.

ii) Si $x=-3 \Rightarrow$ la ecuación se convierte en: $2|-3-2|-0=-5$, lo cual es **FALSO**. Por tanto $x=-3$ no es solución de la ecuación.

PASO 3 Particionar (partir, dividir) la recta real por los puntos referenciales:



PASO 4 Analizar el "signo" de cada valor absoluto en cada intervalo que ha quedado particionado la recta real.

Veamos:

$$A: \text{Si } x<-3 \begin{cases} \text{Sumar } -2: & x-2<-5 \quad \Rightarrow |x-2|=-(x-2) \\ \text{Sumar } 3: & x+3<0 \quad \Rightarrow |x+3|=-(x+3) \end{cases}$$

Luego, la ecuación dada en (*) se convierte en:

$$2(-x+2)-(-x-3)=-5$$
$$-2x+4+x+3=-5$$
$$\boxed{x=12}$$ no es solución, porque $12<-3$ es FALSO.

Por tanto: $\boxed{A=\varnothing}$

$$B: \text{Si } -3<x<2 \begin{cases} \text{Sumar } -2: & -5<x-2<0 \quad \Rightarrow |x-2|=-(x-2) \\ \text{Sumar } 3: & 0<x+3<5 \quad \Rightarrow |x+3|=x+3 \end{cases}$$

Luego, la ecuación dada en (*) se convierte en:

$$2(-x+2)-(x+3)=-5$$
$$-2x+4-x-3=-5$$
$$\boxed{x=2}$$ no es solución, porque $-3<2<2$ es FALSO.

Por tanto: $\boxed{B=\varnothing}$

$$C: \text{Si } x>3 \begin{cases} \text{Sumar } -2: & x-2>1 \quad \Rightarrow |x-2|=x-2 \\ \text{Sumar } 3: & x+3>6 \quad \Rightarrow |x+3|=x+3 \end{cases}$$

Luego, la ecuación dada en (*) se convierte en:

$$2(x-2)-(x+3)=-5$$
$$2x-4-x-3=-5$$
$$\boxed{x=2}$$ no es solución, porque $2>3$ es FALSO.

Por tanto: $\boxed{C=\varnothing}$

PASO 5 Conclusión: $C_S=\{2\}\cup A\cup B\cup C$

$$C=\{2\}\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing=\{2\}$$

Ejemplo 02 Resolver $\forall\, x \in I\!R \; : \; |x^2 - x| + 2|x+1| - x^2 = 3$

Solución:

PASO 1 Factorizar el 1er. valor absoluto: $|x||x-1| + 2|x+1| - x^2 = 3$

PASO 2 Los puntos referenciales son: $\{0, 1, -1\}$

El punto referencial: $\boxed{x=1}$ es solución de la ecuación, los otros puntos referenciales no lo son:

PASO 3

	A	B	C	D	
$-\infty$	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$	$+\infty$

Puntos: -1, 0, 1

REGLA PRÁCTICA: 1°) Escoger un punto arbitrario en cada conjunto: A, B, C, D

2°) Con el punto escogido arbitrariamente, se analiza el signo de cada valor absoluto.

3°) Por ejemplo en A elegir $x = -5$; en B, $x = -\frac{1}{2}$; en C, $x = \frac{1}{2}$; en D, $x = 5$.

A: con $x = -5 \in A$ $\begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = -(x-1) \\ |x+1| = -(x+1) \end{cases}$ $\Rightarrow$ La ecuación original se convierte en:

$$(-x)(-x+1) + 2(-x-1) - x^2 = 3$$

$$x^2 - x - 2x - 2 - x^2 = 3$$

$$-3x - 2 = 3$$

$$-3x = 5$$

$$\boxed{x = -\tfrac{5}{3}} \in A$$

$x = -\frac{5}{3}$ es solución, porque $-\frac{5}{3} < -1$ es verdadero.

Luego: $\boxed{S_A = \left\{-\frac{5}{3}\right\}}$

B : Con $x = -\frac{1}{2} \in B$, la ecuación es: $(-x)(-x+1) + 2(x+1) - x^2 = 3$

$\begin{cases} |x| = -x \\ |x-1| = -(x-1) \\ |x+1| = x+1 \end{cases}$

$$x^2 - x + 2x + 2 - x^2 = 3$$

$$\boxed{x = 1} \notin B$$

No es solución, porque: $-1 < 1 < 0$ es FALSO.

Luego: $\boxed{S_B = \varnothing}$

C : Si $0 < x < 1$, la ecuación es: $x(-x+1)+2(x+1)-x^2=3$

con $x=\frac{1}{2}\in C$

$$\begin{cases} |x|=x \\ |x-1|=-(x-1) \\ |x+1|=x+1 \end{cases}$$

$$-x^2+x+2x+2-x^2=3$$
$$-2x^2+3x-1=0$$
$$2x^2-3x+1=0$$
$$(2x-1)(x-1)=0$$
$$x=\tfrac{1}{2} \vee x=1$$

es solución (para $x=\frac{1}{2}$) — no es solución (para $x=1$)

Luego: $\boxed{S_C=\left\{\frac{1}{2}\right\}}$

D : Si $x>1$, la ecuación es: $x(x-1)+2(x+1)-x^2=3$

con $x=5$

$$\begin{cases} |x|=x \\ |x-1|=x-1 \\ |x+1|=x+1 \end{cases}$$

$$x^2-x+2x+2-x^2=3$$
$$x+2=3$$
$$\boxed{x=1}\notin D$$

NO es solución porque $1>1$ es **FALSO**

Luego: $\boxed{S_D=\varnothing}$

PASO 4 Conclusión: $C_S=\{1\}\cup S_A\cup S_B\cup S_C\cup S_D$

$$C_S=\{1\}\cup\left\{-\frac{5}{3}\right\}\cup\varnothing\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\varnothing$$

$$C_S=\left\{1,-\frac{5}{3}.\frac{1}{2}\right\}$$

Ejemplo 03 Si $4\le a\le 6$, resolver $\forall\, x\in I\!R$: $|x-a|+|x-2a|+|x-3a|=12$

Solución:

PASO 1 Puntos referenciales $\begin{cases} x=a \\ x=2a \\ x=3a \end{cases}$

PASO 2 Analizar si algún punto referencial es solución de la ecuación.

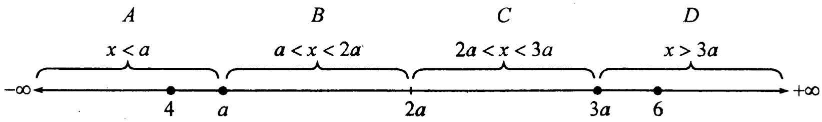
Si $x=a$, la ecuación se hace: $|a-a|+|a-2a|+|a-3a|=12$; $\forall\, a\in[4,6]$ es **FALSO.**

Si $x=2a$, la ecuación se hace: $|2a-a|+|2a-2a|+|2a-3a|=12$; $\forall\, a\in[4,6]$ es **FALSO.**

Si $x = 3a$, la ecuación se hace: $|3a-a|+|3a-2a|+|3a-3a| = 12$; $\forall\ a \in [4,6]$ es **FALSO**.

Por tanto, ningún punto referencial es solución de la ecuación.

PASO 3 Particionar la recta real por los puntos referenciales:



$$|x-a|+|x-2a|+|x-3a| = 12 \text{ .... } (*)$$

A) Si $\underbrace{x < a}$ $\Rightarrow$ $-x+a-x+2a-x+3a = 12$

$|x-a| = -(x-a)$ $\quad -3x+6a = 12$

$|x-2a| = -(x-2a)$ $\quad 3x-6a = -12$

$|x-3a| = -(x-3a)$ $\quad x-2a = -4$

$$\boxed{x = 2a-4}$$

¿Será $x = 2a-4$ solución de la ecuación?

Para ser solución, debe cumplir dos condiciones:

i) Que sea menor que "a".
ii) y que "a" esté en [4,6].

Veamos: $\quad 2a-4 < a \quad \wedge \quad 4 \le a \le 6$

$$\underbrace{a < 4 \quad \wedge \quad 4 \le a \le 6}_{\varnothing}$$

Por tanto, no existe solución en el intervalo $x < a$.

Es decir $\boxed{S_A = \varnothing}$

B) Si $a < x < 2a \Rightarrow (*)$: $x-a-x+2a-x+3a = 12$

$|x-a| = x-a$ $\qquad \boxed{x = 4a-12}$

$|x-2a| = -(x-2a)$

$|x-3a| = -(x-3a)$

Analizar: ¿Es $\quad a < 4a-12 < 2a \quad \wedge \quad 4 \le a \le 6$?

$\Rightarrow \quad (a < 4a-12 \ \wedge\ 4a-12 < 2a) \quad \wedge \quad 4 \le a \le 6$?

$$\underbrace{4 < a \ \wedge\ a < 6 \qquad \wedge \qquad 4 \le a \le 6}_{4 < a < 6}$$

Afirmamos que: $x = 4a - 12$ es solución $\forall\, a \in\,]4,6[$

Luego $\boxed{S_B = \{4a-12\}}$, $\forall\, a \in\,]4,6[$

C) Si $2a < x < 3a \Rightarrow (*)$: $x - a + x - 2a - x + 3a = 12$

$|x-a| = x-a$

$|x-2a| = x-2a$

$|x-3a| = -(x-3a)$

$$\boxed{x = 12}$$

Analizar: ¿Es $2a < 12 < 3a \quad \wedge \quad 4 \le a \le 6$

Veamos: $(2a < 12 \;\wedge\; 12 < 3a) \quad \wedge \quad 4 \le a \le 6$

$$\underbrace{\underbrace{a < 6 \;\wedge\; 4 < a}_{4 < a < 6} \quad \wedge \quad 4 \le a \le 6}_{4 < a < 6}$$

Afirmamos que $x = 12$, es solución, siempre que $4 < a < 6$

Por tanto $\boxed{S_C = \{12\}}$; $\forall\, a \in\,]4,6[$

D) Si $x > 3a \Rightarrow (*)$: $x - a + x - 2a + x - 3a = 12$

$|x-a| = x-a$

$|x-2a| = x-2a$

$|x-3a| = x-3a$

$$\boxed{x = 2a+4}$$

Analizar: ¿$2a + 4 > 3a \quad \wedge \quad 4 \le a \le 6$?

Veamos: $\underbrace{a < 4 \quad \wedge \quad 4 \le a \le 6}_{\varnothing}$

Afirmamos que: $x = 2a + 4$ no es solución

Luego, $S_D = \varnothing$

PASO 4 Conclusión: $C_S = S_A \cap S_B \cap S_C \cap S_D$

$C_S = \varnothing \cup \{4a-12\} \cup \{12\} \cup \varnothing$

$$\boxed{C_S = \{4a-12, 12\}}$$

4.14.2 INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

4.14.2.1 INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO QUE SE RESUELVEN APLICANDO LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

P$_1$) $|u(x)| \leq a \iff [a \geq 0 \wedge -a \leq u(x) \leq a]$

P$_2$) $|u(x)| \geq a \iff [u(x) \geq a \vee u(x) \leq -a]$

P$_3$) $|u(x)| < a \iff [a > 0 \wedge -a < u(x) < a]$

P$_4$) $|u(x)| > a \iff [u(x) > a \vee u(x) < -a]$

P$_5$) $|a| \geq |b| \iff |a|^2 \geq |b|^2 \iff a^2 \geq b^2 \iff (a-b)(a+b) \geq 0 \,,\ \forall\ a,b \in I\!R$

P$_6$) $|a| \leq |b| \iff |a|^2 \leq |b|^2 \iff a^2 \leq b^2 \iff (a-b)(a+b) \leq 0 \,,\ \forall\ a,b \in I\!R$

P$_7$) $|a| > |b| \iff |a|^2 > |b|^2 \iff a^2 > b^2 \iff (a-b)(a+b) > 0 \,,\ \forall\ a,b \in I\!R$

P$_8$) $|a| < |b| \iff |a|^2 < |b|^2 \iff a^2 < b^2 \iff (a-b)(a+b) < 0 \,,\ \forall\ a,b \in I\!R$

Ejemplos:

Aplicaciones de P$_1$

01 $|2x-1| \leq 5 \iff -5 \leq 2x-1 \leq 5$

$\iff -5+1 \leq 2x \leq 5+1$

por $\frac{1}{2}$ $\iff -4 \leq 2x \leq 6$

$\iff -2 \leq x \leq 3$

$\iff x \in [-2\ ,\ 3]$

02 $|3x-2| \leq x+1$

$\iff x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad [-(x+1) \leq 3x-2 \leq x+1]$

$\iff x \geq -1 \quad \wedge \quad [-x-1 \leq 3x-2 \ \wedge\ 3x-2 \leq x+1]$

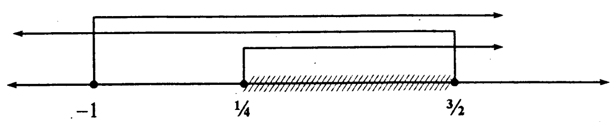
$\iff x \geq -1 \quad \wedge \quad [-x-3x \leq 1-2 \ \wedge\ 3x-x \leq 1+2]$

$\iff x \geq -1 \quad \wedge \quad [-4x \leq -1 \ \wedge\ 2x \leq 3]$

$\iff x \geq -1 \quad \wedge \quad [4x \geq 1 \ \wedge\ x \leq 3/2]$

$\iff x \geq -1 \quad \wedge \quad [x \geq 1/4 \ \wedge\ x \leq 3/2]$

$C_S = x \in \left[\frac{1}{4}\ ,\ \frac{3}{2}\right]$



Aplicaciones de P2

03 $|3x-5| \geq 7$

$\Longleftrightarrow \quad 3x-5 \geq 7 \quad \vee \quad 3x-5 \leq -7$

$\Longleftrightarrow \quad 3x \geq 12 \quad \vee \quad 3x \leq -2$

$\Longleftrightarrow \quad x \geq 4 \quad \vee \quad x \leq -\frac{2}{3}$

$\Longleftrightarrow \quad x \in [4, \infty[\; \cup \;]-\infty, -\frac{2}{3}]$

04 $|2x-1| \geq x+3$

$\Longleftrightarrow \quad 2x-1 \geq x+3 \quad \vee \quad 2x-1 \leq -(x+3)$

$\Longleftrightarrow \quad x \geq 4 \quad \vee \quad 2x-1 \leq -x-3$

$3x \leq -2$

$\Longleftrightarrow \quad x \geq 4 \quad \vee \quad x \leq -\frac{2}{3}$

$\Longleftrightarrow \quad x \in [4, \infty[\; \cup \; [-\infty, -\frac{2}{3}[$

05 $|x-1| \geq 1-x$

$\Longleftrightarrow \quad x-1 \geq 1-x \quad \vee \quad x-1 \leq -(1-x)$

$\Longleftrightarrow \quad 2x \geq 2 \quad \vee \quad x-1 \leq -1+x$

$\Longleftrightarrow \quad x \geq 1 \quad \vee \quad 0 \leq 0$

$\Longleftrightarrow \quad x \geq 1 \quad \vee \quad [\underbrace{0 < 0}_{\varnothing} \quad \vee \quad \underbrace{0 = 0}_{I\!R}]$

$\Longleftrightarrow \quad [1, +\infty[\quad \cup \quad I\!R = I\!R$

$\Longleftrightarrow \quad \boxed{C_S \in I\!R}$ ***Nota:*** La inecuación dada $|x-1| \geq -(x-1)$ es un caso particular de la propiedad: $|a| \geq -a$, $\forall\, a \in I\!R$

Nota: Si $x-1=a$, tendremos: $|a| \geq -a$, $\forall\, a \in I\!R$.

Lo cual ratifica que la solución del problema **05** es todo $I\!R$.

Aplicaciones de P_3

06 $\left| x - |x-1| \right| < 1$

$\iff \quad -1 < x - |x-1| < 1$

$\iff \quad -1 < x - |x-1| \quad \wedge \quad x - |x-1| < 1$

$\iff \quad \underbrace{|x-1| < x+1}_{A} \quad \wedge \quad \underbrace{x-1 < |x-1|}_{B}$

Solución de A:

$$|x-1| < x+1$$

$\iff \quad x+1>0 \;\wedge\; [-(x+1) < x-1 < x+1]$

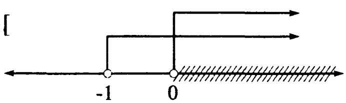
$\iff \quad x>-1 \wedge [-x-1 < x-1 \wedge x-1 < x+1]$

$\iff \quad x>-1 \;\wedge\; [0<2x \;\wedge\; -2<0]$

$\iff \quad x>-1 \;\wedge\; \underbrace{[x>0 \;\wedge\; \underbrace{-2<0}_{\mathbb{R}}]}_{x>0}$

$\iff \quad x>-1 \;\wedge\; x>0$

$A =]0\,,+\infty[$



Solución de B:

$$x-1<|x-1| \iff |x-1|>x-1$$

Aplicar P_4 :

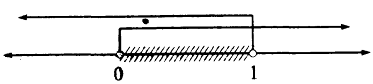
$$x-1>x-1 \;\vee\; x-1<-(x-1)$$
$$0>0 \;\vee\; 2x<2$$
$$\underbrace{\varnothing \;\vee\; x<1}_{x<1}$$

Luego la solución de B es: $\boxed{B =]-\infty,1[}$

Conclusión: $C_S = A \cap B$

$C_S =]0,+\infty[\;\cap\;]-\infty,1[$

$C_S =]0,1[$



07 $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 1$

$\iff \quad -1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$

$\iff \quad \underbrace{-1 < \frac{x-1}{x+1}}_{A} \quad \wedge \quad \underbrace{\frac{x-1}{x+1} < 1}_{B}$

Solución de A:

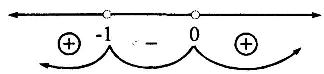
$$-1 < \frac{x-1}{x+1}$$

$\iff \quad 0 < \frac{x-1}{x+1} + 1$

$\iff \quad 0 < \frac{x-1+x+1}{x+1}$

$\iff \quad 0 < \frac{2x}{x+1}$

$\iff \quad 0 < \frac{x}{x+1}$



$\iff \quad A = x \in]-\infty,-1[\;\cup\;]0,+\infty[$

Solución de B:

$$\frac{x-1}{x+1} < 1$$

$\iff \quad \frac{x-1}{x+1} - 1 < 0$

$\iff \quad \frac{x-1-x-1}{x+1} < 0$

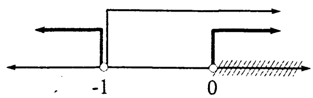
$\iff \quad \frac{-2}{x+1} < 0$

$\iff$ Como $-2<0$, entonces $x+1>0$; para que la fracción sea menor que cero (negativa).

De : $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

Luego : $B = x \in]-1,\infty[$

Conclusión:



$C_S = A \cap B$

$C_S = x \in \,]0,\infty[$

08 $|2x-1| < x+2$

Solución:

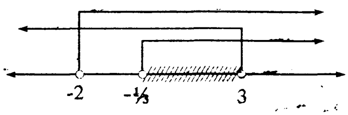
Aplicar P_3 .

$\Longleftrightarrow x+2>0 \;\wedge\; [-(x+2)<2x-1<x+2]$

$\Longleftrightarrow x>-2 \wedge [-x-2<2x-1 \wedge 2x-1<x+2]$

$\Longleftrightarrow \quad x>-2 \;\wedge\; [-3x<1 \;\wedge\; x<3]$

$\Longleftrightarrow \quad x>-2 \;\wedge\; [x>-1/3 \;\wedge\; x<3]$



Luego: $\quad C_S = x \in \left[-\frac{1}{3}, 3\right]$

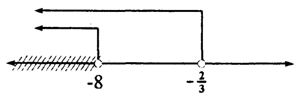
09 $|x-3| > 2x+5$, aplicar P_4

$\Longleftrightarrow \quad x-3>2x+5 \;\vee\; x-3<-(2x+5)$

$\Longleftrightarrow \quad -x>8 \;\vee\; x-3<-2x-5$

$\Longleftrightarrow \quad x<-8 \;\vee\; 3x<-2$

$\Longleftrightarrow \quad x<-8 \;\vee\; x<-2/3$



Luego: $\quad C_S = x \in \,]-\infty,-8[$

10 $\big|3 - |x-2|\big| > 5$, aplicar P_4 .

$\Longleftrightarrow \quad 3-|x-2|>5 \;\vee\; 3-|x-2|<-5$

$\Longleftrightarrow \quad -|x-2|>2 \;\vee\; -|x-2|<-8$

$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{|x-2|<-2}_{\varnothing} \;\vee\; |x-2|>8$

$\Longleftrightarrow \quad \varnothing \;\vee\; (x-2>8 \;\vee\; x-2<-8)$

$\Longleftrightarrow \quad \varnothing \;\vee\; (x>10 \;\vee\; x<-6)$

Luego: $\quad C_S = x \in \,]-\infty,-6[\; \cup \;]10,+\infty[$

APLICACIONES DE P_5 , P_6 , P_7 , P_8

Las aplicaciones de las propiedades P_5 , P_6 , P_7 , P_8 consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad y factorizar, para luego aplicar la regla de los signos.

11 $|3-2x| \geq |x-1| \longleftarrow$ Aplicar P_5

Solución:

1) Elevar al cuadrado ambos miembros:

$\Longleftrightarrow \quad |3-2x|^2 \geq |x-1|^2$

$\Longleftrightarrow \quad (3-2x)^2 \geq (x-1)^2$

$\Longleftrightarrow \quad (3-2x)^2 - (x-1)^2 \geq 0$

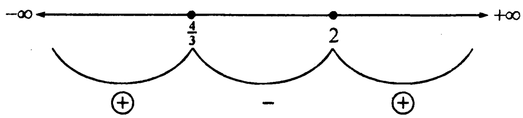
2) Factorizar:

$\Longleftrightarrow \quad [(3-2x)-(x-1)][(3-2x)+(x-1)] \geq 0$

$[4-3x][2-x] \geq 0 \quad \Leftarrow$ al multiplicar por (-1) cada factor, el sentido no cambia.

$(3x-4)(x-2) \geq 0$

3) Resolvemos por el método de los puntos referenciales:



$$C_S = x \in \left]-\infty, \tfrac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty[$$

(12) $\big|2-|x|\big| < |x-1|$

1) Elevar al cuadrado:

$\Longleftrightarrow \quad \big|2-|x|\big|^2 < |x-1|^2$

$\Longleftrightarrow \quad (2-|x|)^2 < (x-1)^2$

$\Longleftrightarrow \quad (2-|x|)^2 - (x-1)^2 < 0$

2) Factorizar:

$\Longleftrightarrow \quad [(2-|x|)-(x-1)][(2-|x|)+(x-1)] < 0$

$\Longleftrightarrow \quad (2-|x|-x+1)(2-|x|+x-1) < 0$

$\Longleftrightarrow \quad (-|x|-x+3)(-|x|+x+1) < 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$

3) Porque $|x| = \begin{cases} x\ , & \text{si } x \geq 0 \\ -x\ , & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Entonces la inecuación (*) se va a desdoblar en dos inecuaciones diferentes.

A) Si $x \geq 0$, entonces la inecuación (*) se convierte en:

$$(-x-x+3)(-x+x+1)<0$$

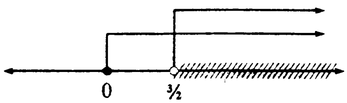
$$\Longleftrightarrow \quad (-2x+3)(1) < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x-3 > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x > 3$$

$$\Longleftrightarrow \quad x > \tfrac{3}{2}$$

Luego, la solución para A es:



$$A = x \in \left]\tfrac{3}{2}, +\infty\right[$$

B) Si $x<0$, entonces la inecuación (*) se convierte en:

$$(x-x+3)(x+x+1)<0$$

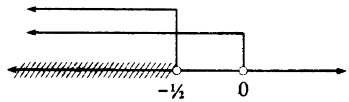
$$\Rightarrow 3(2x+1)<0$$

$$\Rightarrow 2x+1<0$$

$$\Rightarrow 2x<-1$$

$$x<-\tfrac{1}{2}$$

Luego, la solución para B es:



$$B = x \in \left]-\infty, -\tfrac{1}{2}\right[$$

4) ***Conclusión.-***

$$C_S = A \cup B$$

$$C_S = B \cup A$$

$$C_S = \left]-\infty, -\tfrac{1}{2}\right[\;\cup\; \left]\tfrac{3}{2}, +\infty\right[$$

4.14.2.2 INECUACIONES CON DOS O MÁS VALORES ABSOLUTOS

Recomendaciones para resolver desigualdades con dos o más valores absolutos:

1ro) Analizar cada valor absoluto, teniendo en cuenta la definición.

$$|a| = \begin{cases} a\ , & \text{si } a \geq 0 \\ -a\ , & \text{si } a<0 \end{cases}$$

2do) Hallar los puntos referenciales de cada valor absoluto.

3ro) Con los puntos referenciales **PARTICIONAR** la recata real.

4to) En cada intervalo de la recta particionada, analizar el signo de cada valor absoluto.

5to) Resolver cada inecuación particular que se obtiene en cada uno de los intervalos que forman la partición de la recta real.

6to) El conjunto solución es la unión de todas las soluciones particulares.

Ejemplos:

01 Resolver $\forall x \in IR$: $3|x-2| - 2|x| \leq 5$

PASO 1 Hallar los puntos referenciales.

De $|x-2|=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$ donde: $|x-2| = \begin{cases} x-2\,, \text{si } x \geq 2 \\ -x+2\,, \text{si } x<2 \end{cases}$

De $|x|=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ $|x| = \begin{cases} x\,, \text{ si } x \geq 0 \\ -x\,, \text{ si } x<0 \end{cases}$

puntos referenciales

PASO 2 Ubicar los puntos referenciales en la recta real.

$x<0$ $\quad 0 \leq x < 2 \quad$ $x \geq 2$

$-\infty \longleftarrow 0 \longrightarrow 2 \longrightarrow +\infty$

La recta real ha quedado **PARTICIONADA** por los intervalos:

$I_1 =]-\infty, 0[$

$I_2 = [0, 2[$

$I_3 = [2, +\infty[$

Donde: $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = IR$

PASO 3 Ahora, analicemos el signo de cada valor absoluto en cada intervalo: I_1, I_2, I_3. La forma más sencilla de hallar el signo de cada valor absoluto: $|x-2|$, $|x|$ es eligiendo un número real arbitrario (ud. lo elige) en cada intervalo I_1, I_2, I_3.

Por ejemplo:

En I_1, al elegir $x=-2$

→ el signo de $|x-2|$ es: $-(x-2)$ porque $|\underbrace{-2-2}|$ ← es negativo.

→ el signo de $|x|$ es: $-x$ porque $|-2|$ ← es negativo.

En I_2, al elegir $x = 1$

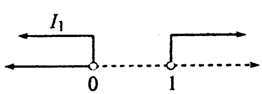
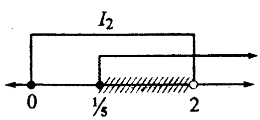
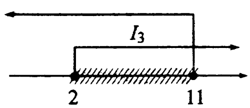
- el signo de $|x-2|$ es: $-(x-2)$, porque $\underbrace{|-1-2|}$ es negativo.
- el signo de $|x|$ es: x, porque $|1|$ es positivo.

En I_3, al elegir $x = 3$

- el signo de $|x-2|$ es: $(x-2)$, porque $\underbrace{|3-2|}$ es positivo.
- el signo de $|x|$ es: x, porque $|\ 3\ |$ es positivo.

Todo esto, se puede resumir haciendo el siguiente cuadro:

$$3|x-2| - 2|x| \leq 5$$

I_1: $x<0$	I_2: $0 \leq x < 2$	I_3: $x > 2$
$x = -2$	$x = 1$	$x = 3$
$\lvert x-2\rvert = -x+2$	$\lvert x-2\rvert = -x+2$	$\lvert x-2\rvert = x-2$
$\lvert x\rvert = -x$	$\lvert x\rvert = x$	$\lvert x\rvert = x$
$3(-x+2)-2(-x) \leq 5$	$3(-x+2)-2(x) \leq 5$	$3(x-2)-2(x) \leq 5$
$-x+6 \leq 5$	$-5x+6 \leq 5$	$x-6 \leq 5$
$-x \leq -1$	$-5x \leq -1$	$x \leq 11$
$x \geq 1$	$x \geq \frac{1}{5}$	
		
$S_1 = \varnothing$	$S_2 = \left[\frac{1}{5}, 2\right[$	$S_3 = [2, 11]$

Conclusión: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$$= \left[\tfrac{1}{5}, 11 \right].$$

02 Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\left| \dfrac{x-3}{x^2-4x+8} \right| \le \dfrac{1}{|x-3|}$

Solución:

1) Analizando el denominador de la fracción del primer miembro obtenemos:

$$x^2-4x+8 = \underbrace{x^2-4x+4}-4+8$$

$$= (x-2)^2+4 \Leftarrow \text{es positivo } \forall\, x \in I\!R \text{, porque la suma de números reales positivos, es positivo.}$$

Por tanto: $|x^2-4x+8| = x^2-4x+8$

2) $\dfrac{|x-3|}{x^2-4x+8} \le \dfrac{1}{|x-3|} \quad \Rightarrow \quad |x-3|^2 \le x^2-4x+8$, si $x \neq 3$

los denominadores son positivos, si $x \neq 3$

$$\Rightarrow \quad (x-3)^2 \le x^2-4x+8$$

$$\Rightarrow \quad x^2-6x+9 \le x^2-4x+8$$

$$\Rightarrow \quad -2x \le -1$$

$$\Rightarrow \quad 2x \ge 1 \Longleftrightarrow x \ge \tfrac{1}{2}$$

3) Luego: $C_S = x \in \left[\tfrac{1}{2}, +\infty \right[\; - \; \{3\}$

03 Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\left| \dfrac{1}{|x+2|} \right| < \left| \dfrac{x}{x^2+4x+4} \right|$

Solución:

1) El 1er. miembro: $\left| \dfrac{1}{|x+2|} \right| = \dfrac{1}{|x+2|}$

2) El 2do. miembro: $\left| \dfrac{x}{(x+2)^2} \right| = \dfrac{|x|}{|x+2|^2}$, pues $|(x+2)^2| = |x+2|^2 = (x+2)^2$

3) Luego la inecuación se convierte:

$$\frac{1}{|x+2|} < \frac{|x|}{|x+2|^2} \quad \Rightarrow \quad |x+2|^2 < |x||x+2| \text{ , si } x \neq -2$$

$$\Rightarrow \quad |x+2| < |x|$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2 < x^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2 - x^2 < 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+2-x)(x+2+x) < 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(2x+2) < 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x+2 < 0$$

$$\Rightarrow \quad x+1 < 0$$

$$\Rightarrow \quad x < -1$$

4) El conjunto solución es: $C_S = \left]-\infty,-1\right[\; - \; \{-2\}$

$\boxed{04}$ Resolver en $I\!R$: $x^2 - 6 \geq (|x-1| + |x-2|)\,(|1-x| - |2-x|)$

Solución:

1) Aplicar las propiedades $\begin{cases} |1-x| = |x-1| \\ |2-x| = |x-2| \end{cases}$

la inecuación se convierte en:

$$x^2 - 6 \geq (|x-1| + |x-2|)(|x-1| - |x-2|)$$

2) $\Rightarrow \; x^2 - 6 \geq (|x-1|^2 - |x-2|^2)$, Pero: $\begin{cases} |x-1|^2 = (x-1)^2 \\ |x-2|^2 = (x-2)^2 \end{cases}$

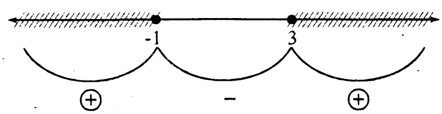
$$\Rightarrow \; x^2 - 6 \geq [(x-1)^2 - (x-2)^2]$$

$$\Rightarrow \; x^2 - 6 \geq [x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x - 4]$$

$$\Rightarrow \; x^2 - 6 \geq 2x - 3$$

$$\Rightarrow \; x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \; (x-3)(x+1) \geq 0$$



3) ***Conclusión:*** $C_S = x \in \left]-\infty,-1\right] \cup [3,+\infty[$

05 Resolver: $\left|\dfrac{x^2-4x-5}{|x|-1}\right| < \left|\dfrac{x^2-10x+25}{x+3}\right|$

Solución:

1) Los numeradores de las fracciones del primer y segundo miembro son factorizables, de modo que la inecuación se convierte en:

$$\left|\frac{(x-5)(x+1)}{|x|-1}\right| < \frac{|(x-5)^2|}{|x+3|}$$

$$\Rightarrow \quad |x-5||x+1||x+3| < |x-5|^2\big||x|-1\big| \text{ , si } x \neq 3 , x \neq \pm 1$$

2) Simplificar el término $|x-5|$ porque es factor común y positivo si $x \neq 5$.

3) $\Rightarrow |x+1||x+3| < |x-5|\big||x|-1\big|$, si $x \neq 5$

4) Al definir $|x|$, la inecuación (3) se subdivide en la unión de S_1 y S_2:

S_1) Si $x \geq 0 \Rightarrow$ (3) se convierte en: $|x+1||x+3| < |x-5||x-1|$

$$\Rightarrow (x+1)^2(x+3)^2 - (x-5)^2(x-1)^2 < 0$$

$$\Rightarrow [(x+1)(x+3)-(x-5)(x-1)][(x+1)(x+3)+(x-5)(x-1)] < 0$$

$$\Rightarrow [x^2+4x+3-(x^2-6x+5)][x^2+4x+3+x^2-6x+5] < 0$$

$$\Rightarrow (10x-2)(2x^2-2x+8) < 0$$

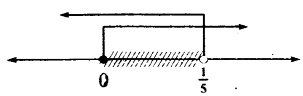
$$\Rightarrow 2(5x-1)2(x^2-x+4) < 0 \quad \text{, multiplicar por } \tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (5x-1)\left(x^2-x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}+4\right) < 0$$

$$\Rightarrow (5x-1)\underbrace{\left[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{15}{4}\right]}_{\text{es positivo } \forall x \in I\!R} < 0$$

$$\Rightarrow 5x-1 < 0$$

Si $x \geq 0 \quad \Rightarrow x < \frac{1}{5}$



Luego: $\boxed{S_1 = \left[\, 0 , \tfrac{1}{5} \right[}$

S_2) Si $x<0 \Rightarrow$ (3) se convierte en: $|x+1||x+3| < |x-5||-x-1|$

$\Rightarrow |x+1||x+3| < |x-5||x+1|$, pues $|-x-1| = |x+1|$

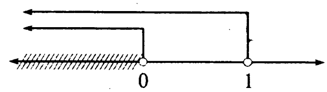
$\Rightarrow |x+3| < |x-5|$, si $x \neq -1$, al simplificar $|x+1|$

$\Rightarrow (x+3)^2 < (x-5)^2$

$\Rightarrow x^2+6x+9 < x^2-10x+25$

$\Rightarrow 16x < 16$

Si $x<0 \Rightarrow x < 1$



Luego: $\boxed{S_2 =]-\infty,0[\quad x \neq -1}$

5) ***Conclusión:*** $S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty,\frac{1}{5}\right[$, $x \neq -3$, $x \neq -1$

06 Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\dfrac{|4-x|+|2x+3|}{|x-1|-1} \leq 2$

Solución:

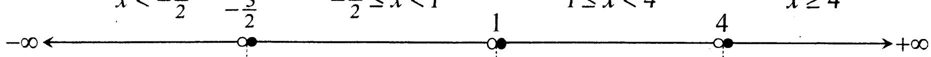
1) Como $|4-x| = |x-4|$, entonces la inecuación es equivalente a: $\dfrac{|x-4|+|2x+3|}{|x-1|-1} \leq 2$

2) Los puntos referenciales son $\left\{-\frac{3}{2}, 1, 4\right\}$ que se han obtenido al igualar a cero cada valor absoluto. Además, tener en cuenta que el denominador no debe ser cero, es decir:
$|x-1|-1 \neq 0 \iff |x-1| \neq 1 \iff x \neq \{2,0\}$

3) Los puntos referenciales **PARTICIONAN** a la recta real en cuatro intervalos.
Cada intervalo es cerrado por derecha y abierto por izquierda. En $+\infty$ y en $-\infty$ los intervalos siempre son abiertos.

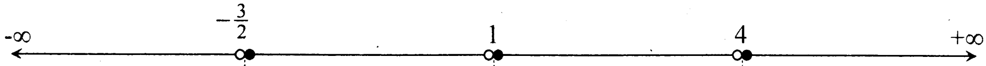
Luego, en cada intervalo se analiza el signo de cada valor absoluto, eligiendo un punto arbitrario

Resumiendo obtenemos lo siguiente:



$x < -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} \leq x < 1$	$1 \leq x < 4$	$x \geq 4$
$x=-3$	$x=0$	$x=2$	$x=5$
$\lvert x-4\rvert = -x+4$	$\lvert x-4\rvert = -x+4$	$\lvert x-4\rvert = -x+4$	$\lvert x-4\rvert = x-4$
$\lvert 2x+3\rvert = -2x-3$	$\lvert 2x+3\rvert = 2x+3$	$\lvert 2x+3\rvert = 2x+3$	$\lvert 2x+3\rvert = 2x+3$
$\lvert x-1\rvert = -x+1$	$\lvert x-1\rvert = -x+1$	$\lvert x-1\rvert = x-1$	$\lvert x-1\rvert = x-1$

$$\frac{|x-4|+|2x+3|}{|x-1|-1} \le 2$$

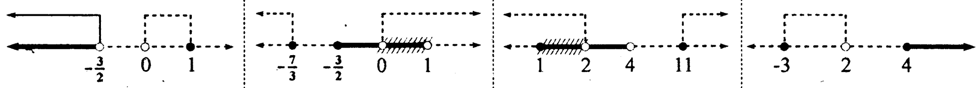


$$\frac{-x+4-2x-3}{-x+1-1} \le 2$$
$$\frac{-3x+1}{-x} - 2 \le 0$$
$$\frac{-3x+1+2x}{-x} \le 0$$
$$\frac{-x+1}{-x} \le 0$$
$$\frac{x-1}{x} \le 0$$

$$\frac{-x+4+2x+3}{-x+1-1} \le 2$$
$$\frac{x+7}{-x} - 2 \le 0$$
$$\frac{x+7+2x}{-x} \le 0$$
$$\frac{3x+7}{-x} \le 0$$
$$\frac{3x+7}{x} \ge 0$$

$$\frac{-x+4+2x+3}{x-1-1} \le 2$$
$$\frac{x+7}{x-2} - 2 \le 0$$
$$\frac{x+7-2x+4}{x-2} \le 0$$
$$\frac{-x+11}{x-2} \le 0$$
$$\frac{x-11}{x-2} \ge 0$$

$$\frac{x-4+2x+3}{x-1-1} \le 2$$
$$\frac{3x-1}{x-2} - 2 \le 0$$
$$\frac{3x-1-2x+4}{x-2} \le 0$$
$$\frac{x+3}{x-2} \le 0$$



$S_1 = \varnothing$ $\qquad S_2 =]0,1[$ $\qquad S_3 = [1,2[$ $\qquad S_4 = \varnothing$

Conclusión.- El conjunto solución es:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$
$$=]0\,,2[$$

$\boxed{07}$ $\big|\,|x-2|-3\,\big| \le 4-x$

Solución:

Esta desigualdad se puede resolver por puntos referenciales o aplicando la propiedad:

$|a| \le b \iff b \ge 0 \;\wedge\; [-b \le a \le b]$

1) Si aplicamos la propiedad, obtenemos:

$$\iff \quad 4-x \ge 0 \quad \wedge \quad [-(4-x) \le |x-2|-3 \le 4-x]$$
$$-x \ge -4$$
$$\iff \quad x \le 4 \quad \wedge \quad [-4+x \le |x-2|-3 \le 4-x]$$
$$\iff \quad x \le 4 \quad \wedge \quad [-1+x \le |x-2| \le 7-x]$$

2) $\iff \quad x \le 4 \quad \wedge \quad [\underbrace{-1+x \le |x-2|}_{A} \;\wedge\; \underbrace{|x-2| \le 7-x}_{B}]$

3) ***Resolviendo A:*** $|x-2| \ge x-1$

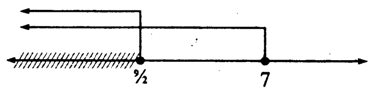
$$\Rightarrow \quad x-2 \ge x-1 \quad \vee \quad x-2 \le -(x-1)$$
$$\Rightarrow \quad -2 \ge -1 \quad \vee \quad x-2 \le -x+1$$
$$\Rightarrow \quad \underbrace{2 \le 1} \quad \vee \quad 2x \le 3$$
$$\Rightarrow \quad \underbrace{\varnothing \quad \vee \quad x \le \tfrac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow \quad x \le \tfrac{3}{2}$$

Luego: $\boxed{A = \left]-\infty, \tfrac{3}{2}\right]}$

4) ***Resolviendo B:*** $|x-2| \le 7-x$

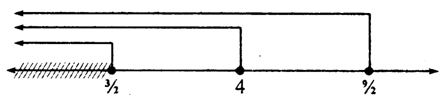
$$\iff \quad 7-x \ge 0 \quad \wedge \quad [-(7-x) \le x-2 \le 7-x]$$
$$\iff \quad x \le 7 \quad \wedge \quad [\; -7+x \le x-2 \quad \wedge \quad x-2 \le 7-x \;]$$
$$\iff \quad x \le 7 \quad \wedge \quad [\; -7 \le -2 \quad \wedge \quad 2x \le 9 \;]$$
$$\iff \quad x \le 7 \quad \wedge \quad \underbrace{[\; \underbrace{7 \ge 2}_{IR} \quad \wedge \quad x \le \tfrac{9}{2} \;]}_{x \le \frac{9}{2}}$$

Luego: $\boxed{C_S = \left]-\infty, \tfrac{3}{2}\right]}$



5) Sustituir en 2): $\quad x \le 4 \;\wedge\; \left\{ \left]-\infty, \tfrac{3}{2}\right] \cap \left]-\infty, \tfrac{9}{2}\right] \right\}$

Luego: $\boxed{C_S = \left]-\infty, \tfrac{3}{2}\right]}$



08 $\left|3x+\frac{7}{12}\right| \le \left|2x+\frac{1}{3}\right| + \left|x+\frac{1}{4}\right|$

Solución:

Porque: $\left|3x+\frac{7}{12}\right| = \left|\left(2x+\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{4}\right)\right| \le \left|2x+\frac{1}{3}\right| + \left|x+\frac{1}{4}\right|$ (Propiedad triangular) afirmamos que el conjunto solución es todo $I\!R$

Es decir $\boxed{C_S = I\!R}$

09 Resolver $\forall\, x \in I\!R:\ \big|\,|3x-12|-6\,\big| + |x| < 3$

Solución:

Factorizar el número 3.

$\iff \quad \big|\,3|x-4|-6\,\big| + |x| < 3$

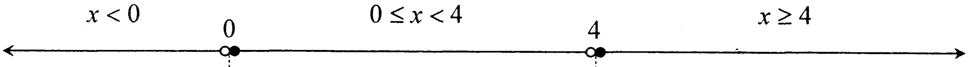
$\iff \quad 3\big|\,|x-4|-2\,\big| + |x| < 3$ ....(1)

Los puntos referenciales de $|x-4|$ y $|x|$, se obtienen así: $\begin{cases} |x-4| = 0 \Rightarrow x=4 \\ \quad |x| = 0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$

Ahora, resolver la inecuación:

$3\big|\,|x-4|-2\,\big| + |x| < 3$ ....(1)

$x<0$ (hasta 0)	$x \leq 0 < 4$ (de 0 a 4)	$x \geq 4$ (desde 4)
con $x=-2$	con $x=2$	con $x=5$
obtenemos:	obtenemos:	obtenemos:
$\|x-4\| = -x+4$	$\|x-4\| = -x+4$	$\|x-4\| = x-4$
$\|x\| = -x$	$\|x\| = x$	$\|x\| = x$
Ahora; la inecuación (1) es:	Ahora; la inecuación (1) es:	Ahora; la inecuación (1) es:
$3\|-x+4-2\|-x<3$	$3\|-x+4-2\| + x<3$	$3\|x-4-2\| + x<3$
$3\|-x+2\|-x<3$	$3\|-x+2\| + x<3$	$3\|x-6\| + x<3$
$3\|x-2\|-x<3$	$3\|x-2\| + x<3$	$\uparrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	Punto referencial: $x=6$
Punto referencial: $x=2$	Punto referencial: $x=2$	



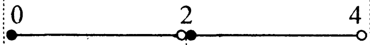
El punto referencial $x = 2$ no pertenece al conjunto $x < 0$, entonces no existe solución.

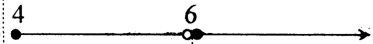
Esto es:

$$S_1 = \varnothing$$

El punto referencial $x = 2$ se encuentra en el conjunto $0 \leq x < 4$, entonces debemos particionar el conjunto: $0 \leq x < 4$

El punto referencial $x = 6$ se encuentra en el conjunto $x \geq 4$, entonces debemos particionar el conjunto: $x \geq 4$.





con $x = 1$

Obtenemos:

$|x-2| = -x+2$

La inecuación es:

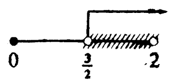
$3(-x+2)+x<3$

$-3x+6+x<3$

$-2x<-3$

$2x>3$

$x>\frac{3}{2}$



$A_1 = \left]\frac{3}{2}, 2\right[$

con $x = 3$

Obtenemos:

$|x-2| = x-2$

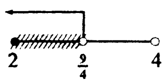
La inecuación es:

$3(x-2)+x<3$

$3x-6+x<3$

$4x<9$

$x<\frac{9}{4}$



$A_2 = \left]2, \frac{9}{4}\right[$

$$S_2 = A_1 \cup A_2 = \left]\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right[$$

con $x = 5$

Obtenemos:

$|x-6| = -x+6$

La inecuación es:

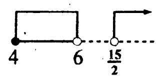
$3(-x+6)+x<3$

$-3x+18+x<3$

$-2x<-15$

$2x>15$

$x>\frac{15}{2}$



$B_1 = \varnothing$

con $x = 7$

Obtenemos:

$|x-6| = x+6$

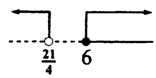
La inecuación es:

$3(x-6)+x<3$

$3x-18+x<3$

$4x<21$

$x<\frac{21}{4}$



$B_2 = \varnothing$

$$S_3 = B_1 \cup B_2 = \varnothing$$

Conclusión: El conjunto solución es: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$$= \left]\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right[$$

10 Resolver: $\left| 2|x-1| + x^2+9 \right| \leq \left| |x-2| + |x^2+9| \right|$

Solución:

1) Si observamos los términos dentro de los valores absolutos externos del primer y segundo miembro notaremos que son sumas de términos positivos, por tanto la inecuación dada es equivalente a:

$$\iff \quad 2|x-1| + x^2+9 \leq |x-2| + |x^2+9|$$

2) Como: $|x^2+9| = x^2+9$, $\forall\, x \in I\!R$; entonces se reduce la inecuación a;

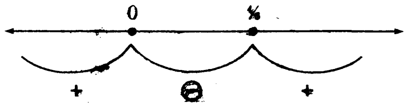
$\iff \quad 2|x-1| \le |x-2|$

3) Ahora, podemos elevar al cuadrado ambos miembros y factorizar:

$\iff \quad 4(x-1)^2-(x-2)^2 \le 0$

$\iff \quad [2(x-1)-(x-2)][2(x-1)+(x-2)] \le 0$

$\iff \quad x(3x-4) \le 0$



$\iff \quad \boxed{C_S = x \in \left[\,0\,,\tfrac{4}{3}\,\right]}$

4.14.2.3 PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON SIMPLES ANÁLISIS

$\boxed{1}$ Resolver en $I\!R$: $\underbrace{\dfrac{x-|x-1|}{|x+1|+2}}_{a} - \underbrace{\dfrac{||x+2|-|x+3||}{|2x-1|+3}}_{b} \ge 0$

Hacer: $\quad a = \dfrac{x-|x-1|}{|x+1|+2} \quad , \quad b = \dfrac{||x+2|-|x+3||}{|2x-1|+3}$

La siguiente proposición es una inferencia: Si $[a-b \ge 0 \;\wedge\; b \ge 0] \;\Rightarrow\; a \ge 0$

Arriba tenemos que $b \ge 0 \quad \forall\, x \in I\!R$

Entonces, bastará hallar la solución de $a \ge 0$, porque la solución de $a-b \ge 0$ estará contenido en la solución de $a \ge 0$.

Resolver: $\quad \dfrac{x-|x-1|}{|x+1|+2} \ge 0$

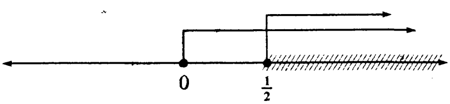
$\iff \quad x-|x-1| \ge 0$, porque $|x+1|+2>0 \quad \forall\, x \in I\!R$

$\iff \quad |x-1| \le x$

$\iff \quad x \ge 0 \;\wedge\; [-x \le x-1 \le x]$

$\quad\quad\;\; x \ge 0 \;\wedge\; [-x \le x-1 \quad \wedge \quad x-1 \le x]$

$\quad\quad\;\; x \ge 0 \;\wedge\; [x \ge \tfrac{1}{2} \quad \wedge \quad \underbrace{-1 \le 0}_{I\!R}]$



Luego, $A = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ es la solución de la inecuación.

Sobre el universo A, resolver $a - b \geq 0$

$$\frac{x-|x-1|}{|x+1|+2} - \frac{\big||x+2|-|x+3|\big|}{|2x-1|+3} \geq 0$$

De cada valor absoluto, se obtiene los puntos referenciales: $\left\{1, -1, -2, -3, \frac{1}{2}\right\}$. De éstos sólo $x = 1$ particiona al conjunto A.

$\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{1}{2} \leq x < 1 \qquad$ 1 $\qquad x \geq 1$

Para $\frac{1}{2} \leq x < 1$:

con $x = 0.7$ obtenemos:

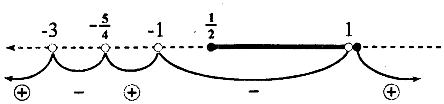
$$|x-1| = -x+1$$
$$|x+1| = x+1$$
$$|x+2| = x+2$$
$$|x+3| = x+3$$
$$|2x-1| = 2x-1$$

La inecuación es:

$$\frac{x-(-x+1)}{x+1+2} - \frac{|x+2-(x+3)|}{2x-1+3} \geq 0$$

$$\frac{2x-1}{x+3} - \frac{1}{2x+2} \geq 0$$

Simplificar: $\dfrac{(4x+5)(x-1)}{2(x+3)(x+1)} \geq 0$



El intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ no se intersecta con el conjunto solución.

Luego: $S_1 = \varnothing$

Para $x \geq 1$:

con $x = 2$, obtenemos:

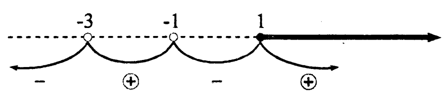
$$|x-1| = x-1$$
$$|x+1| = x+1$$
$$|x+2| = x+2$$
$$|x+3| = x+3$$
$$|2x-1| = 2x-1$$

La inecuación es:

$$\frac{x-(x-1)}{x+1+2} - \frac{|x+2-(x+3)|}{2x-1+3} \geq 0$$

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x+2} \geq 0$$

Simplificar: $\dfrac{x-1}{2(x+3)(x+1)} \geq 0$



La intersección de $[1, +\infty[$ con el conjunto solución es:

$S_2 = [1, +\infty[$

Por tanto, la solución de $a-b\geq 0$, es $B=S_1\cup S_2=[1,+\infty[$

Conclusión: Se cumple que $B\subset A$, por lo tanto el conjunto solución es:

$$\begin{aligned} C_S &= A\cap B \\ &= [1,+\infty[\end{aligned}$$

12 $\dfrac{|x|x|-4|}{|x|+2}<\dfrac{x}{||x+3|-1|}$

Solución:

1) En esta ecuación podemos apreciar que:
   a) El numerador del primer miembro es positivo o cero $\forall\, x\in I\!R$, es cero para $x=2$.
   b) El denominador del primer miembro es positivo $\forall\, x\in I\!R$
   c) El denominador del segundo miembro es ≥ 0, es cero para $x=-2$, $x=-4$.

   Por tanto, la inecuación se puede escribir de la forma:

   $$\frac{|x|x|-4|\,||x+3|-1|}{|x|+2}<x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

2) La solución de ésta desigualdad depende de $x>0$.

3) Ahora, analicemos los signos de cada valor absoluto en la inecuación A cuando $x>0$.

   Veamos:

   Si $x>0$, entonces: $|x|=x$, $|x+3|=x+3$, $|x+2|=x+2$

   Luego, la inecuación se hace:

   $$\frac{|x^2-4||x+2|}{x+2}<x \iff \frac{|x-2||x+2||x+2|}{x+2}<x$$
   $$\iff \frac{|x-2|(x+2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}<x\ ,\ x\neq -2$$
   $$\iff |x-2|(x+2)<x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

4) Ahora, resolver B sobre el universo $x>0$.

   De $|x-2|$ obtenemos el punto referencial $x=2$, que va a particionar el conjunto $x>0$ en dos conjuntos.

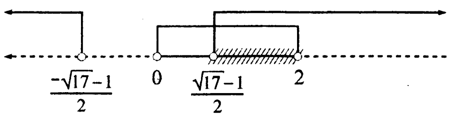
$$|x-2|(x+2) < x$$

$0 < x < 2$	$x \geq 2$
$\lvert x-2\rvert = -(x+2)$	$\lvert x-2\rvert = x-2$

Caso $0 < x < 2$

La inecuación es:

$$-(x-2)(x+2) < x$$
$$-(x^2-4) < x$$
$$x^2-4 > -x$$
$$x^2+x > 4$$
$$x^2+x+\tfrac{1}{4} > 4+\tfrac{1}{4}$$
$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 > \tfrac{17}{4}$$
$$x+\tfrac{1}{2} > \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad x+\tfrac{1}{2} < -\frac{\sqrt{17}}{2}$$
$$x > \frac{\sqrt{17}-1}{2} \quad \vee \quad x < \frac{-\sqrt{17}-1}{2}$$

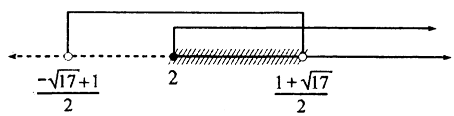


Solución: $B_1 = \left]\frac{\sqrt{17}-1}{2}, 2\right[$

Caso $x \geq 2$

La inecuación es:

$$(x-2)(x+2) < x$$
$$x^2-4 < x$$
$$x^2-x < 4$$
$$x^2-x+\tfrac{1}{4} < 4+\tfrac{1}{4}$$
$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 < \tfrac{17}{4}$$
$$-\frac{\sqrt{17}}{2} < x-\tfrac{1}{2} < \frac{\sqrt{17}}{2}$$
$$\frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$



Solución: $B_2 = \left]2, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right[$

5) ***Conclusión:*** El conjunto solución de la inecuación será:

$$B = B_1 \cup B_2$$
$$B = \left]\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{\sqrt{17}+1}{2}\right[\qquad \text{con} \quad x \neq 2$$

13 Sean a y c números reales, tales que $a \neq c$, $a > 0$, $c > 0$ y que $x > -\frac{b}{a}$, $x < -\frac{d}{c}$

Hallar el conjunto solución de la inecuación: $|ax+b| \leq |cx+d|$

Solución:

1) De $x > -\frac{b}{a} \Rightarrow ax > -b$, pues $a > 0$

$\Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow |ax+b| = ax+b$

2) De $x < \frac{-d}{c} \Rightarrow cx < -d$, pues $c > 0$

$\Rightarrow cx + d < 0 \Rightarrow |cx+d| = -(cx+d)$

3) Luego la inecuación dada se hace:

$$ax + b \le -cx - d$$
$$\Rightarrow ax + cx \le -b - d$$
$$\Rightarrow (a+c)x \le -b-d$$

$\Rightarrow \boxed{x \le -\frac{b+d}{a+c}}$ pues $a + c > 0$

ya que $a > 0$, $c > 0$.

4.15 POTENCIA ENÉSIMA DE UN NÚMERO REAL

4.15.1 INTRODUCCIÓN

Tanto en Álgebra como en Aritmética, se presentan las potencias enteras no negativas de números reales, tales como: 2^3, 5^0, $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, $(-3)^7$, ..., etc. donde:

2^3 : es la tercera potencia del número real 2 e indica $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5$: es la potencia cinco del número real ½ e indica $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

⋮

a^n : Se lee "potencia n-ésima del término real a"

En seguida formalicemos la definición de potencia entera no negativa.

4.15.2 DEFINICIÓN

Para todo número real $a \neq 0$ y $n \in I\!N$ se cumplen:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}_{n \text{ veces}} , \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Donde la expresión a^n es la potencia n-ésima del número real a.

El número real "a" que se repite "n" veces como factor se llama **BASE**

El número real "n" se llama **EXPONENTE** e indica las veces que la base "a" se repite como factor.

4.15.3 DEFINICIÓN

Si m y n son números naturales y $a \neq 0$, definimos:

1) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}$

4.15.4 PROPIEDADES

Si m, n son números enteros positivos y "a" es número real diferente de cero, se cumplen las siguientes propiedades:

P_1) $(a^m)(a^n) = a^{m+n}$

P_2) $(a^m)^n = a^{mn}$

4.15.5 APLICACIONES

01 Probar que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

<u>Demostración:</u>

$$\begin{aligned}(a+b)[a-b] &= (a+b)a + (a+b)(-b)\\ &= a(a+b) + (-b)(a+b)\\ &= a \cdot a + ab - ba - b^2\\ &= a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

02 Probar que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Demostración:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= (a+b)(a)+(a+b)(b)\\ &= a(a+b)+(b)(a+b)\\ &= a\cdot a + ab + ba + bb\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

03 Demostrar que $a^2 = b^2 \iff a = b \ \vee \ a = -b$

Demostración:

$(\Rightarrow)$ 1) $a^2 = b^2$

2) Sumar $-b^2$: $a^2 + (-b^2) = b^2 + (-b^2)$

$\Rightarrow \quad a^2 - b^2 = 0$

3) Por el problema 1 se cumple que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

4) Luego: $(a+b)(a-b) = 0$

5) $\Rightarrow \quad a+b=0 \quad \vee \quad a-b=0$ ...... según Teo. 4.9

$\Rightarrow \quad a=-b \quad \vee \quad a=b$

$(\Leftarrow)$ *Queda como ejercicio...........*

4.16 RADICALES

4.16.1 INTRODUCCIÓN

En Álgebra y Aritmética frecuentemente nos encontramos con números de la forma: $\sqrt{5}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, ... etc. que las llamamos **RADICALES** y proceden, generalmente de resolver una ecuación de la forma: $x^n = a$ donde $a \geq 0$ y $n \in I\!N^+$

Por ejemplo:

1) $\sqrt{5}$ procede de resolver la ecuación $x^2 = 5$

2) $\sqrt[5]{3}$ procede de resolver la ecuación $x^5 = 3$

3) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ procede de resolver la ecuación $x^3 = \frac{2}{3}$

4) $\sqrt[n]{a}$ es el único número real no negativo que satisface la ecuación $x^n = a$.

4.16.2 DEFINICIÓN:

Sean $a \geq 0 \wedge n \in I\!N^+$. Al único número real no negativo $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ que satisface la ecuación $x^n = a$ se llama "**RAÍZ n-ÉSIMA NO NEGATIVA DE a**".

Es decir:

$x^n = a \Longleftrightarrow x = \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\text{raíz } n\text{-ésima de } a.} = a^{\frac{1}{n}}$	si $a \geq 0 \wedge n \in I\!N^+$

La notación $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ es la raíz n-ésima no negativa de a.

no negativa significa que $\sqrt[n]{a} \geq 0$

"a" es la expresión subradical.

"n" es el índice de la raíz n-ésima.

4.16.3 PROPIEDADES

Para $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $n, m \in I\!N^+$, se cumplen:

P_1) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$

P_2) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

P_4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

P_5) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, siempre que $b > 0$

Demostración de P_1) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$

1) Según la definición 16.2, tenemos: $\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow a = x^n$, si $a \geq 0$, $n \in I\!N^+$

2) Según la propiedad de potencia n-ésima y la propiedad P_2 de 4.15.4, se cumple que:

$$\underbrace{(x^n)}^m = x^{nm}\text{, donde } x^n = a \text{ según 1)}$$

$$\Rightarrow \quad a^m = x^{nm}$$

3) Pero $x^{nm} = a^m$ implica $x = \sqrt[nm]{a^m}$ .... (según def. 4.16.2)

4) Por 1) y 3) obtenemos: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$

Demostración de P_2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

1) Según la definición 4.16.2, si $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x \Rightarrow x^m = \sqrt[n]{a}$

Debo probar que $x = \sqrt[mn]{a}$ o su equivalente $x^{mn} = a$.

Veamos:

2) Por la propiedad P_1 : $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$

3) Al sustituir 2) en 1) se obtiene $x^m = \sqrt[mn]{a^m}$

4) Por la propiedad P_2 de potencia n-ésima se tiene: $(x^m)^n = x^{mn}$, donde $x^m = \sqrt[mn]{a^m}$

Luego $\left(\sqrt[mn]{a^m}\right)^n = x^{mn}$

$$\Rightarrow \qquad (\sqrt[n]{a})^n = x^{mn} \quad \text{........... según 2)} \quad \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

5) $\Rightarrow \qquad a \quad = x^{mn}$, pues $(\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

6) $\Rightarrow \qquad x = \sqrt[mn]{a}$

7) Sustituir 6) en 1): $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Demostración de P_3) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

1) Por definición de raíz n-ésima se tiene: $\begin{cases} \sqrt[n]{a}=x \Rightarrow x^n=a \\ \sqrt[n]{b}=y \Rightarrow y^n=b \end{cases}$

2) Igualmente definimos: $\sqrt[n]{ab}=z \Rightarrow z^n=ab$

3) Pero $(x\,y)^n=x^n y^n$

$\Rightarrow$ $(x\,y)^n=ab$ .... por 1)

4) La ecuación $(x\,y)^n=ab$ implica $x\,y=\sqrt[n]{ab}$ (pues $\sqrt[n]{ab}$ es una solución no negativa de $(xy)^n=ab$)

5) Por 1) .... $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

4.17. RACIONALIZACIÓN DE RADICALES

Aplicando las definiciones de potencia entera no negativa, de raíz n-ésima no negativa y de los productos notables:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$$

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n \quad , \ \forall\, n\geq 2 \ , \ n\in I\!N \, .$$

Se verifican que los siguientes productos, son números racionales siempre que a y b son números racionales.

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$$

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$$

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a+b$$

$$(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{n}+\cdots\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$$

Cada uno de los factores del primer miembro es un **FACTOR RACIONALIZANTE** del otro factor.

La racionalización de radicales se aplican para convertir expresiones con radicales en expresiones racionales.

Ejemplos:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{(x-a)(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})}=\frac{(x-a)(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{x-a}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{x-a}\ ,\ x\neq a$

3) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}=\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\,\sqrt[5]{2^2}}=\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{\sqrt[5]{4}}{2}$

4.18. ECUACIONES E INECUACIONES CUADRÁTICAS

4.18.1 ECUACIÓN CUADRÁTICA

4.18.1.1. DEFINICIÓN.

Si a, b, c son números reales cualesquiera y $a\neq 0$, diremos que $P(x)=ax^2+bx+c$ es un polinomio cuadrático en x, con $x\in I\!R$.

Ejemplos:

1) $P(x)=\frac{1}{4}x^2+x+2$

3) $P(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}$

2) $P(x)=x^2-4$

4) $P(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

4.18.1.1.1. PROPOSICIÓN

La gráfica del polinomio real de variable real $P(x)=ax^2+bx+c\ ,\ a\neq 0$; es una parábola de vértices en $\left(-\frac{b}{2a}\,,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ y eje paralelo al eje de las ordenadas (eje Y).

Si $a>0$, entonces la parábola se abre hacia arriba.

Si $a<0$, entonces la parábola se abre hacia abajo.

PRUEBA:

En $P(x) = ax^2 + bx + c$, completar cuadrados con respecto a x.

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \cdots\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

VÉRTICE $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y.

Ejemplos:

1) $P(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - 4x + \cdots) + 2$$

$$P(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2$$

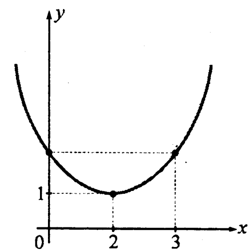
$$= \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1 + 2$$

$$= \frac{1}{4}(x-2) + 1$$

VÉRTICE(2,1)

$a = \frac{1}{4} > 0$, se abre hacia arriba

EJE FOCAL // EJE Y



2) $P(x) = -2x^2 - x + 1$

$$= -2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \cdots\cdots\right) + 1$$

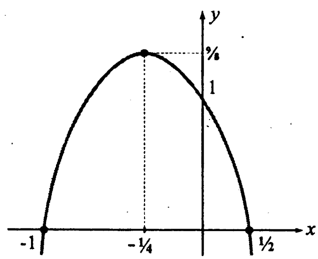
$$= -2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 1$$

$$= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} + 1$$

$$= -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

VÉRTICE $\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$

$a = -2 < 0$, se abre hacia abajo



4.18.1.2 DEFINICIÓN

Si a, b, c son números reales y $a \neq 0$, diremos que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es una **ECUACIÓN CUADRÁTICA**.

4.18.1.2.1 DEFINICIÓN

Diremos que el número "α" (real o complejo) es **RAÍZ** del polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ si, y sólo si $P(\alpha) = 0$.

Ejemplos:

1) El número complejo $2i$, es raíz de $P(x) = x^2 + 4$, porque:

$$P(2i) = (2i)^2 + 4 = -4 + 4 = 0 \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad , \quad i^2 = -1$$

2) El número racional $\frac{1}{2}$ es raíz de $P(x) = -2x^2 - x + 1$, porque:

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) = -2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} + 1 = 0$$

4.18.1.3 TEOREMA

La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ es equivalente a la ecuación $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Demostración.

1) En $ax^2 + bx + c = 0$, formemos un trinomio cuadrado perfecto con respecto a x:

$$a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \cdots\right) + c = 0$$, asociar los términos: $ax^2 + bx$ y factorizar a, obteniéndose: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$

$$a\left(\underbrace{x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \tfrac{b^2}{4a^2}\right) + c = 0$$, donde $\frac{b^2}{4a^2}$ se obtiene del siguiente modo:

1°) Dividir $\frac{b}{a}$ entre 2: $\frac{b}{2a}$

2°) Elevar al cuadrado $\frac{b}{2a}$ y se obtiene $\frac{b^2}{4a^2}$

3°) Sumar y restar el número $\frac{b^2}{4a^2}$

$$a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{ab^2}{4a^2} + c = 0$$

$$a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c = 0$$

2) Multiplicar por $\frac{1}{a}$, $a \neq 0$

$$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 = \tfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

4.1.8.1.3.1 COROLARIO

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ son:

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

Prueba:

1) Según el teorema 4.1.8.1.3 se tiene que:

$$ax^2+bx+c=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \iff \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\iff \left|x+\frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}$$

2) Del cual se deduce: $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \vee \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

son las raíces de la ecuación cuadrática.

4.18.1.4 DISCRIMINANTE DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Definición.- Llamamos discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ al número $\Delta=b^2-4ac$.

4.18.1.4.1 TEOREMA

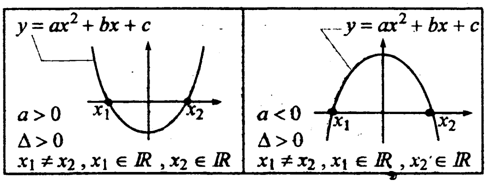
La ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$:

1) Tiene dos raíces reales diferentes, sí y sólo si, $\Delta>0$.
2) Tiene solamente una raíz real, sí, y sólo si, $\Delta=0$
3) No tiene raíces reales, sí, y sólo si $\Delta<0$

Prueba:

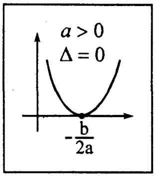
i) Según el corolario 4.18.1.3.1, se tiene que las raíces de la ecuación cuadrática son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$



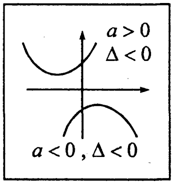
ii) Analizando el signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

1) Si $\Delta > 0$, entonces $\sqrt{\Delta}$ es un número real y por tanto las raíces x_1 y x_2 son reales y diferentes expresados por:
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$



2) Si $\Delta = 0$, entonces $\sqrt{\Delta} = 0$ y por tanto las raíces x_1 y x_2 son: $x_1 = \frac{-b}{2a}$, $x_2 = \frac{-b}{2a}$ que son iguales.

Por tanto, la ecuación cuadrática tiene una sola raíz real.



3) Si $\Delta < 0$, entonces $\sqrt{\Delta}$ no es número real y las raíces x_1 y x_2 son números complejos conjugados expresados por: $x_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$, siendo $i = \sqrt{-1}$. En este caso, la parábola no corta al eje x.

4.18.1.5 PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

TEOREMA. Si r_1 y r_2 son las raíces reales (iguales o diferentes) de $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\boxed{r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \ \wedge \ r_1 r_2 = \frac{c}{a}}$

2) $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$

Demostración:

i) Según 4.13.1.3.1 y 4.18.1.4.1, las raíces reales de $ax^2+bx+c=0$, son:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{ donde } b^2-4ac>0$$
$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ii) Al sumar: $r_1 + r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$

iii) Al multiplicar: $r_1 r_2 = \dfrac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} = \dfrac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$

$$= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

iv) Por otro lado, si $b^2-4ac=0$, las raíces son: $r_1 = \frac{-b}{2a}$, $r_2 = \frac{-b}{2a}$

Al sumar: $r_1 + r_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{-b}{2a} = -\frac{b}{a}$

Al multiplicar: $r_1 \cdot r_2 = \frac{b^2}{4ac}$, de $b^2-4ac=0 \Rightarrow b^2 = 4ac$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

v) Por otro lado, el polinomio cuadrático ax^2+bx+c se puede escribir de la forma:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\cdots\cdots+\frac{c}{a}\right) = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]$$

$$= a\left[x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]$$

$$= a[x-r_1][x-r_2]$$

4.18.1.6 SIGNO DEL POLINOMIO CUADRÁTICO $P(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$.

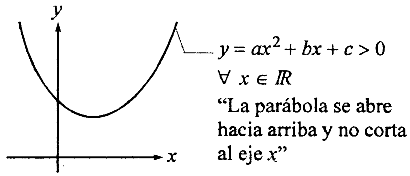
TEOREMA. $\underbrace{ax^2+bx+c>0 \ , \ \forall\, x \in I\!R}_{\text{indica que la parábola se abre hacia arriba sin cortar al eje } x}$, sí y sólo si, $a>0 \wedge b^2-4ac<0$

(Un polinomio cuadrático es positivo $\forall\, x \in I\!R$, si, el coeficiente de x^2 es positivo y el discriminante es negativo).

Demostración:

($\Rightarrow$) 1) El polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ se puede escribir equivalentemente como:

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$



2) Por hipótesis se tiene: $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] > 0 \quad , \quad \forall\ x \in I\!R$

3) Por regla de los signos para el producto, se cumple:

$$a > 0 \quad \wedge \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{a^2} > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

$$\vee$$

$$a < 0 \quad \wedge \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

4) Según la hipótesis, la inecuación en (I) debe ser:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0 \ , \ \forall\ x \in I\!R$ y esto es posible sólo cuando $b^2 - 4ac < 0$,

puesto que: $b^2 - 4ac < 0$ implica $-(b^2 - 4ac) > 0$, $\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2} > 0$ y por tanto

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$, $\forall\ x \in I\!R$.

5) La inecuación (II) no cumple la hipótesis, por tanto se descarta.

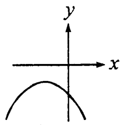
6) En consecuencia:

$$P(x) > 0 \ , \ \forall\ x \in I\!R \ \Rightarrow \ a > 0 \ \wedge \ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0 \ , \ \forall\ x \in I\!R$$

$$\Rightarrow \ a > 0 \ \wedge \ b^2 - 4ac < 0$$

($\Leftarrow$) *Queda como ejercicio...........*

4.18.1.6.1 COROLARIO



$$\underbrace{ax^2+bx+c<0 \ , \ \forall\, x\in IR}_{\text{indica que la parábola se abre hacia abajo sin cortar al eje } x.} \iff a<0 \ \wedge \ b^2-4ac<0$$

4.18.2. INECUACIÓN CUADRÁTICA

Las inecuaciones cuadráticas son de las forma:

$$ax^2+bx+c\geq 0 \quad ; \quad ax^2+bx+c>0$$

$$ax^2+bx+c\leq 0 \quad ; \quad ax^2+bx+c<0$$

cuyas soluciones se pueden obtener de, por lo menos, dos formas:

a) Aplicando la regla de los signos (o métodos de los puntos referenciales) si el polinomio ax^2+bx+c tiene raíces reales.

b) Aplicando la técnica de completación de cuadrados.

Para aplicar la técnica de completación de cuadrados, se estudian tres teoremas importantes:

4.18.2.1. TEOREMA: Si a y b son números reales positivos, entonces:
$a<b$ sí, y sólo si $a^2<b^2$

4.18.2.2 TEOREMA: Si $b>0$, entonces:

$$\boxed{a^2<b \text{ si, y sólo si, } -\sqrt{b}<a<\sqrt{b}}$$

4.18.2.3 TEOREMA: Si $b\geq 0$, entonces:

$$\boxed{a^2>b \text{ si, y sólo si, } a>\sqrt{b} \ \vee \ a<-\sqrt{b}}$$

***Demostración de* 4.18.2.1**

($\Rightarrow$) 1) Si $0 < a < b$, multiplicar por a $\Rightarrow$ $0 < a^2 < ab$

2) Si $0 < a < b$, multiplicar por b $\Rightarrow$ $0 < ab < b^2$

3) Por (1) y (2) y aplicando la transitividad de desigualdades: $a^2 < b^2$

($\Leftarrow$) Se tiene: a y b son postivos y $a^2 < b^2$

4) $a^2 < b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0$

$\Rightarrow (a-b)(a+b) < 0$ .... (4*)

5) Como $a+b > 0$, puesto que $a > 0$, $b > 0$ y el producto en (4*) es negativo, entonces $a-b < 0$, lo cual implica $a < b$.

***Demostración de* 4.18.2.2**

1) Por hipótesis $a^2 < b$, con $b > 0$.

2) En $a^2 < b$ hacemos $b = (\sqrt{b})^2$ y $a^2 = |a|^2$

3) Luego: $a^2 < b \iff |a|^2 < (\sqrt{b})^2$

$\iff |a| < (\sqrt{b})$ implicando 4.18.2.1

$\iff -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$, según la proposición:

$|x| < m \iff -m < x < m$, siempre que $m > 0$

***Demostración de* 4.18.2.3**

1) Por hipótesis: $a^2 > b$, con $b \geq 0$

2) En $a^2 > b$, hacemos $b = (\sqrt{b})^2$ y $a^2 = |a|^2$

3) Luego: $a^2 > b \iff |a|^2 > (\sqrt{b})^2$ aplicar 4.18.2.1

$\iff |a| > \sqrt{b}$ aplicar: $|x| > m \iff x > m \vee x < -m$, si $m \geq 0$

$\iff a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b}$

4.18.3 APLICACIONES

01 Resolver: $-2x^2-5x+3>0$

Solución:

$$-2x^2-5x+3>0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x^2+5x-3<0$$

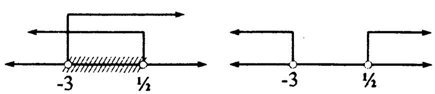
FACTORIZAR:

$$\Longleftrightarrow \quad (2x-1)(x+3)<0$$

APLICAR LA REGLA DE LOS SIGNOS:

$$\Longleftrightarrow (2x-1<0 \wedge x+3>0) \vee (2x-1>0 \wedge x+3<0)$$

$$\Longleftrightarrow (\ x<\tfrac{1}{2} \ \wedge \ x>-3\ ) \vee (\ x>\tfrac{1}{2} \ \wedge \ x<-3)$$



]-2,½[$\qquad\qquad$ $\varnothing$

$$\Longleftrightarrow \quad C_S = \left]-3,\tfrac{1}{2}\right[\cup \phi = \left]-3,\tfrac{1}{2}\right[$$

Aplicando la técnica de completación de cuadrados:

$$-2x^2-5x+3>0 \quad \text{por } -\tfrac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2+\tfrac{5}{2}x-\tfrac{3}{2}<0 \ , \quad \left(\tfrac{5/2}{2}\right)^2=\tfrac{25}{16}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{x^2+\tfrac{5}{2}x+\tfrac{25}{16}}-\tfrac{25}{16}-\tfrac{3}{2}<0$$

Sumar y restar $\frac{25}{16}$.

$$\Longleftrightarrow \quad \left(x+\tfrac{5}{4}\right)^2<\tfrac{49}{16}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\tfrac{7}{4}<x+\tfrac{5}{4}<\tfrac{7}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\tfrac{7}{4}-\tfrac{5}{4}<x<\tfrac{7}{4}-\tfrac{5}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -3<x<\tfrac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x\in\left]-3,\tfrac{1}{2}\right[$$

02 Resolver: $4x^2+5x+9\le 0$

Solución:

Completando cuadrados:

$$\Rightarrow \ x^2+\tfrac{5}{4}x+\tfrac{9}{4}\le 0$$

$$\Rightarrow \ \underbrace{x^2+\tfrac{5}{4}x+\tfrac{25}{64}}-\tfrac{25}{64}+\tfrac{9}{4}\le 0$$

$$\Rightarrow \ \underbrace{\left(x+\tfrac{5}{8}\right)^2+\tfrac{119}{64}\le 0}_{\text{es falso } \forall\, x\in I\!R}$$

Luego: $C_S=\varnothing$

PASOS A SEGUIR:

1) Convertir en "+1" el coeficiente de x^2. En este caso: multiplicar por $\frac{1}{4}$.
2) Tomar el coeficiente de x : $\frac{5}{4}$; dividir entre 2 : $\frac{\frac{5}{4}}{2}=\frac{5}{8}$, elevar al cuadrado $\frac{5}{8}$: $\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$. Sumar y restar el número $\frac{25}{64}$.
3) Así, se ha formado el trinomio cuadrado perfecto: $x^2+\frac{5}{4}x+\frac{25}{64}=\left(x+\frac{5}{8}\right)^2$.
4) Aplicar la proposición que corresponde.

03 Resolver: $x^2+x+1>0$

Solución:

Completando cuadrados:

$$x^2+x+1>0$$

$$\iff x^2+x+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}+1>0$$

$$\iff \underbrace{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}>0}_{\substack{\textbf{ES VERDADERO}\\ \forall x\in I\!R}}$$

Luego: $C_S = I\!R$

04 La solución de $(x-2)^2<0$ es: $\varnothing$

05 La solución de $(x-2)^2\leq 0$ es: $\{2\}$

06 La solución de $(x-2)^2>0$ es: $I\!R-\{2\}$

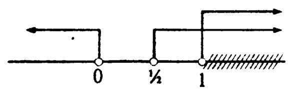
07 La solución de $(x-2)^2\geq 0$ es: $I\!R$

08 Si $0<x-1<x$, resolver $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2>\frac{1}{16}$

Solución:

$$0<x-1 \wedge x-1<x \quad\Rightarrow\quad x-\tfrac{1}{4}>\tfrac{1}{4} \vee x-\tfrac{1}{4}<-\tfrac{1}{4}$$

$$\underbrace{1<x \wedge \overset{I\!R}{-1<0}}_{x>1} \quad\Rightarrow\quad x>\tfrac{1}{2} \vee x<0$$



$$C_S=\{x\in I\!R / x>1\} =]1,+\infty[$$

09 Dada la ecuación: $mx^2-(3m+1)x+m+3=0$

¿Qué valores debe tomar "m" para que: a) las raíces sean reales y diferentes, b) para que las raíces sean iguales y c) para que las raíces no sean reales?

Solución:

1) El discriminante de la ecuación cuadrática es:

$$(3m+1)^2-4m(m+3)=9m^2+6m+1-4m^2-12m$$

$$=5m^2-6m+1$$

2) Analicemos el discriminante:

a) La ecuación tiene raíces reales y diferentes:

$$\Longleftrightarrow \quad 5m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad m^2 - \tfrac{6}{5}m + \tfrac{1}{5} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad m^2 - \tfrac{6}{5}m + \tfrac{9}{25} - \tfrac{9}{25} + \tfrac{1}{5} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(m - \tfrac{3}{5}\right)^2 - \tfrac{4}{25} > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(m - \tfrac{3}{5}\right)^2 > \tfrac{4}{25}$$

$$\Longleftrightarrow \quad m - \tfrac{3}{5} > \tfrac{2}{5} \quad \vee \quad m - \tfrac{3}{5} < -\tfrac{2}{5}$$

$$\Longleftrightarrow \quad m > 1 \quad \vee \quad m < \tfrac{1}{5}$$

$$\Longleftrightarrow \quad m \in \left]-\infty, \tfrac{1}{5}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$$

b) La ecuación tiene raíces reales e iguales $\Longleftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad m = 1 \ \vee \ m = \tfrac{1}{5}$$

c) La ecuación de las raíces no reales:

$$\Longleftrightarrow \quad 5m^2 - 6m + 1 < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(m - \tfrac{3}{5}\right)^2 < \tfrac{4}{25}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\tfrac{2}{5} < m - \tfrac{3}{5} < \tfrac{2}{5}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{5} < m < 1$$

10 Sean k_1, k_2, k_3 y k_4 $(k_1 < k_2 < k_3 < k_4)$ cuatro valores enteros no nulos de k tal que la desigualdad: $\left|\dfrac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$ es válido para todo x real.

Determinar el conjunto solución de la inecuación $\dfrac{(x-k_1)(x-k_2)}{(x-k_3)(x-k_4)} \geq 0$

Solución:

1) Se tiene: $\left|\dfrac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$

$$\Longleftrightarrow \quad -3 < \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} \quad \wedge \quad \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x - 1} < 3$$

$$\iff \quad 0<\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}+3 \qquad \wedge \qquad \frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}-3<0$$

$$\iff \quad 0<\frac{x^2-kx+1+3(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \qquad \wedge \qquad \frac{x^2-kx+1-3(x^2+x+1)}{x^2+x+1}<0$$

$$\iff \quad 0<\frac{4x^2+(3-k)x+4}{x^2+x+1} \qquad \wedge \qquad \frac{-2x^2-(k+3)x-2}{x^2+x+1}<0$$

$$\underbrace{\phantom{0<\frac{4x^2+(3-k)x+4}{x^2+x+1}}}_{A} \qquad \wedge \qquad \underbrace{\frac{2x^2+(k+3)x+2}{x^2+x+1}>0}_{B}$$

(1*) $\quad ¿ < k < ? \qquad\qquad ¿ < k < ?$

2) Analizar en A :

a) El denominador: x^2+x+1 es positivo $\forall\, x \in I\!R$, porque el discriminante es negativo y coeficiente de x^2 es positivo.

b) Como la fracción es positiva y el denominador es positivo $\forall\, x \in I\!R$, entonces:

$$\underbrace{4x^2+(3-k)x+4>0\ ,\ \forall\, x\in I\!R}_{\text{El polinomio cuadrático es positivo para todo } x \text{ real.}} \iff \underbrace{4>0}_{\text{coeficiente de } x^2} \wedge \overbrace{(3-k)^2-4(4)(4)<0}^{\text{el discriminante es negativo}}$$

$$(k-3)^2<64$$

$$-8<k-3<8$$

$$-5<k<11$$

3) Analizar en B:

a) El denominador es positivo $\forall\, x \in I\!R$.

b) Como la fracción es positivo $\forall\, x \in I\!R$, entonces:

$$2x^2+(k+3)x+2>0,\ \forall\, x\in I\!R \iff 2>0 \ \wedge\ (k+3)^2-4(2)(2)<0$$

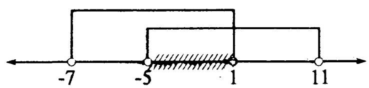
$$(k+3)^2<16$$

$$-4<k+3<4$$

$$-7<k<1$$

4) Volviendo al paso (1*):

$-5<k<11 \quad \wedge \quad -7<k<1$

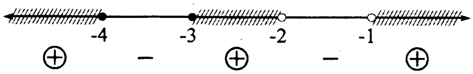


Luego: $\quad -5<k<1$

Los valores enteros no **NULOS** que están dentro del intervalo $-5<k<1$, son $\{-4,-3,-2,-1\}$.

5) Ahora resolvamos la inecuación:

$$\frac{(x+4)(x+3)}{(x+2)(x+1)} \geq 0 \iff x \in \left]-\infty,-4\right[\cup \left[-3,-2\right[\cup \left]-1,+\infty\right[$$



11 Si r, s es el conjunto solución de $ax^2+bx+c=0$, hallar el valor de:

a) $\frac{r^2}{s}+\frac{s^2}{r}$, b) $r^{-3}+s^{-3}$

Solución:

a) $\frac{r^2}{s}+\frac{s^2}{r}=\frac{r^3+s^3}{sr}$

1) De
$$\begin{aligned}(r+s)^3 &= r^3+3r^2s+3rs^2+s^3\\ &= r^3+s^3+3rs(r+s)\\ \Rightarrow\quad r^3+s^3 &= (r+s)^3-3rs(r+s) \quad , \quad \text{como} \begin{cases} r+s=-\frac{b}{a}\\ rs=\frac{c}{a}\end{cases}\\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)\\ &= -\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{3abc-b^3}{a^3}\end{aligned}$$

2) Sustituir en a) $\frac{r^3+s^3}{sr}=\frac{\frac{(3abc-b^3)}{a^3}}{\frac{c}{a}}=\frac{3abc-b^3}{a^2c}$

b) $r^{-3}+s^{-3}=\frac{1}{r^3}+\frac{1}{s^3}=\frac{s^3+r^3}{(rs)^3}=\frac{(3abc-b^3)/a^3}{\frac{c^3}{a^3}}=\frac{3abc-b^3}{c^3}$

4.19 ECUACIONES E INECUACIONES CON RADICALES

4.19.1 ECUACIONES CON RADICALES

Las ecuaciones con radicales son igualdades con incógnitas que aparecen dentro de radicales.

Ejemplo: $\sqrt{2x-1}=3$, $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}=4$, $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=4$, ……, etc.

PROPIEDADES $\begin{cases} P_1)\ \sqrt{a} \geq 0 \quad , \quad \forall\, a \geq 0 \\ P_2)\ \sqrt{a} = 0 \iff a = 0 \end{cases}$

Para resolver ecuaciones que contienen raíces cuadradas tener en cuenta, el siguiente teorema.

4.19.1.1 TEOREMA: Si $b \geq 0$ entonces: $\sqrt{a} = b \iff a = b^2$

Según este teorema, para elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación $\sqrt{a} = b$, debe cumplirse previamente que $b \geq 0$.

Implícitamente está indicando que el universo es: $a \geq 0$.

4.19.1.2 TEOREMA: Si $b \geq 0$ entonces: $\sqrt{a} = b \iff a = b^2$.

Según este teorema, para elevar al cuadrado ambosmiembros de la ecuación $\sqrt{a} = b$, debe cumplirse previamente que $b \geq 0$.

Implícitamente está indicando que el universo es: $a \geq 0$.

4.19.1.3 TEOREMA: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0$

Ejemplos:

1) $\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

2) $\sqrt{2x-1} = 3 \iff 2x - 1 = (3)^2$, Si $2x - 1 \geq 0$

$\iff 2x - 1 = 9$, si $x \geq \frac{1}{2}$

$x = 5$, si $x \geq \frac{1}{2}$

$\iff C_S = \{5\}$

3) $\sqrt{x-1} = -3 \iff C_S = \varnothing$, porque $b < 0$.

4) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x^3-8} = 0$

$\iff x^2 - 4 = 0 \wedge x - 2 = 0 \wedge x^3 - 8 = 0$

$\iff \{2, -2\} \cap \{2\} \cap \{2\} = \{2\}$

PROBLEMA 01 Resolver $\forall\, x \in I\!R:\ \sqrt{7-3x} = 3-x$

Solución:

Aplicar el teorema: Si $b \geq 0$ entonces $\sqrt{a} = b \iff a = b^2$

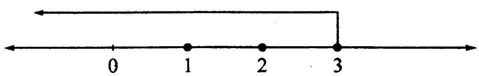
Asi:

$$3-x \geq 0 \qquad \wedge \qquad \underbrace{\text{Elevar al cuadrado}}$$

$$-x \geq -3 \qquad\qquad 7-3x = 9-6x+x^2$$

$$0 = x^2-3x+2$$

$$x \leq 3 \qquad \wedge \qquad 0 = (x-2)(x-1)$$



. El conjunto solución es $C_S = \{1,2\}$

PROBLEMA 02 $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$

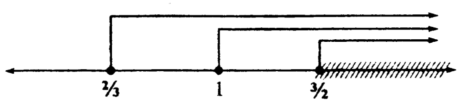
Solución:

En primer lugar, hallar la **RESTRICCIÓN**, que será el **UNIVERSO** de las soluciones.

La restricción es:

$$2x-3 \geq 0 \quad \wedge \quad x-1 \geq 0 \quad \wedge \quad 3x-2 \geq 0$$

$$x \geq \tfrac{3}{2} \quad \wedge \quad x \geq 1 \quad \wedge \quad x \geq \tfrac{2}{3}$$



Luego, el conjunto universo será $U = \left[\, \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$

Sobre este universo deben estar las soluciones.

En segundo lugar, elevar al cuadrado:

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (2x-3)+2\sqrt{2x-3}\,\sqrt{x+1}+x-1=3x-2$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{(2x-3)(x-1)}=2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(2x-3)(x-1)}=1$$

$\Longleftrightarrow$ Elevar al cuadrado.

Entonces: $(2x-3)(x-1)=1$

$$2x^2-5x+3=1$$

$$2x^2-5x+2=0$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & \times & -1 \\ x & & -2 \end{array}$$

$$(2x-1)(x-2)=0$$

$$x=\frac{1}{2} \quad \vee \quad x=2$$

En este caso, sólo $x=2\in U$

Por tanto: $\mathcal{C}_S=\{2\}$

¡cuidado!

Si se tiene: $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{c}$

hacer:

1° Resolver: $a\geq 0 \ \wedge\ b\geq 0 \ \wedge\ c\geq 0$

2° No elevar al cuadrado la diferencia $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Sólo se eleva al cuadrado cuando se tiene una suma de raíces cuadradas.

3° En este caso, hacer:

$$\sqrt{a}=\underbrace{\sqrt{b}+\sqrt{c}}_{\text{suma de raíces cuadradas}}$$

4° Elevar al cuadrado.

4.19 INECUACIONES CON RADICALES

Para resolver inecuaciones con radicales (raíz cuadrada), aplicar, según el caso, los siguientes teoremas:

(T$_1$) $\quad 0\leq\sqrt{a}\leq\sqrt{b} \iff 0\leq a\leq b$

(T$_2$) $\quad 0\leq\sqrt{a}<\sqrt{b} \iff 0\leq a<b$

(T$_3$) $\quad \sqrt{a}\leq b \iff a\leq b^2$, siempre que $a\geq 0 \ \wedge\ b\geq 0$

(T$_4$) $\quad \sqrt{a}<b \iff a<b^2$, siempre que $a\geq 0 \ \wedge\ b>0$

(T$_5$) $\quad \sqrt{a}\geq b \iff [a\geq 0\ ,\ \text{si}\ b<0] \vee [a\geq b^2\ ,\ \text{si}\ b\geq 0]$

(T$_6$) $\quad \sqrt{a}>b \iff [a\geq 0\ ,\ \text{si}\ b<0] \vee [a>b^2\ ,\ \text{si}\ b\geq 0]$

(T$_7$) $\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0 \iff a\geq 0 \ \wedge\ b\geq 0$

(T$_8$) $\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}\leq 0 \iff a=0 \ \wedge\ b=0$

Ejemplos:

$\boxed{01}$ Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{13-x}<0$

Solución:

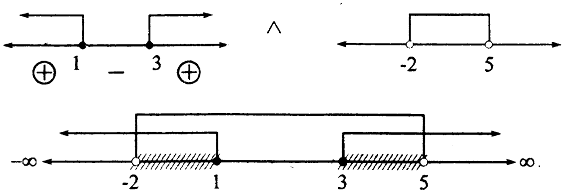
$$\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{13-x}<0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2-4x+3}<\sqrt{13-x} \;\; \ldots\ldots\ldots \quad \text{Aplicar } (T_2)$$

$$0 \le x^2-4x+3 < 13-x$$

$$0 \le x^2-4x+3 \quad \wedge \quad x^2-4x+3<13-x$$

$$0 \le (x-3)(x-1) \quad \wedge \quad x^2-3x-10<0$$

$$(x-5)(x+2)<0$$



El conjunto solución es: $C_S = x \in \,]-2,1] \cup [3,5[$

$\boxed{\text{PROBLEMA 03}}$ Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x^2-3x+2}<0$

Solución:

En este caso no existe ningún número real que satisface ésta inecuación, porque: $\sqrt{a} \ge 0 \;\wedge\; \sqrt{b} \ge 0$, $\forall\, a \ge 0 \;\wedge\; b \ge 0$.

Es falso que $\sqrt{a}<0 \;\wedge\; \sqrt{b}<0$, $\forall\, a \ge 0, b \ge 0$.

Luego, decimos que el conjunto solución de la inecuación

$\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x^2-3x+2}<0$, es $\boxed{C_S=\varnothing}$

$\boxed{\text{PROBLEMA 04}}$ Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\underbrace{\sqrt{x^2+x-6}}_{a}+\underbrace{\sqrt{x^2-3x+2}}_{b} \le 0$

Solución:

Aplicar el T_8 :

$$\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x^2-3x+2}\leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2+x-6=0 \quad \wedge \quad x^2-3x+2=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x+3)(x-2)=0 \quad \wedge \quad (x-2)(x-1)=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\{-3,2\} \quad \wedge \quad \{2,1\}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad C_S=\{2\}$$

PROBLEMA 05 Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\sqrt{bx^2+x}<1-bx$, si $b\leq -1$

Solución:

Aplicar T_4 :

$$\sqrt{bx^2+x}<1-bx \quad \Longleftrightarrow \quad bx^2+x<(1-bx)^2\ ,\ \text{si}\ \ bx^2+x\geq 0 \quad \wedge \quad 1-bx>0$$

$$\Longleftrightarrow \quad bx^2+x<1-2bx+b^2x^2\ ,\ \text{si}\ \ x(bx+1)\geq 0 \ \wedge\ 1>bx$$

$$\Longleftrightarrow \quad b(1-b)x^2+(2b+1)x-1<0\ ,\ \text{si}\ \ \underbrace{x(-bx-1)\leq 0 \ \wedge\ -1<-bx}_{B}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{b(b-1)x^2-(2b+1)x+1>0}_{A}\ ,$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{I\!R} \quad \wedge \quad \left[\,0,-\tfrac{1}{b}\,\right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad C_S=x\in\left[\,0,-\tfrac{1}{b}\,\right]$$

En (A) la solución es todo $I\!R$, porque el coeficiente de x^2 es positivo y el discriminante es negativo.

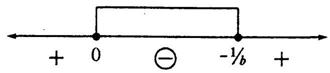
Pues: *i)* $b(b-1)>0$, ya que $b<-1 \ \Rightarrow\ b-1<-2$

ii) $\Delta=(2b+1)^2-4b(b-1)(1)$

$=8b+1<0$, pues $b<-1 \ \Longleftrightarrow\ 8b<-8 \ \Longleftrightarrow\ 8b+1<-7$

En (B) se tiene:

i) La solución de $x(-bx-1)\leq 0$ es: $\boxed{x\in\left[\,0,-\frac{1}{b}\,\right]}$, donde $b<-1$



ii) La solución de $-1<-bx$ es $\boxed{x>\frac{1}{b}}$, donde $b<-1$

iii) Al intersectar ambas soluciones se obtiene: $\left[\,0,-\frac{1}{b}\,\right]$

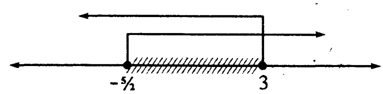
PROBLEMA 06 Resolver $\forall\, x\in I\!R$: $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3-x}<2$

Solución:

1) En primer lugar, hallar el conjunto **UNIVERSO** ***U*** de la solución:

$$x\in U \iff 2x+5\geq 0 \quad\wedge\quad 3-x\geq 0$$

$$\iff x\geq-\frac{5}{2} \quad\wedge\quad x\leq 3$$



$$x\in U=\left[\,-\frac{5}{2},3\,\right]$$

2) En segundo lugar, antes de elevar al cuadrado ambos miembros de la inecuación, se debe garantizar que el primer miembro y el segundo miembro sean positivos.

Pero: $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3-x}\leq 2$

$\iff \sqrt{2x+5}\leq\sqrt{3-x}+2 \longleftarrow$ ambos miembros son positivos $\forall\, x\in\left[\,-\frac{5}{2},3\,\right]$

Elevar al cuadrado:

$\iff 2x+5\leq 3-x+4\sqrt{3-x}+4$

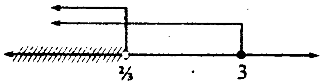
$\iff \frac{3x-2}{4}\leq\sqrt{3-x}$

$\iff \sqrt{3-x}\geq\frac{3x-2}{4}$ .... Aplicar (T_5)

(A)

$3 - x \geq 0$, si $\frac{3x-2}{4} < 0$

$x \leq 3$, si $x < \frac{2}{3}$



Luego $A = \left\langle -\infty, \frac{2}{3} \right\rangle$

$\vee$ $\cup$

(B)

$3 - x \geq \frac{(3x-2)^2}{16}$, si $\frac{3x-2}{4} \geq 0$

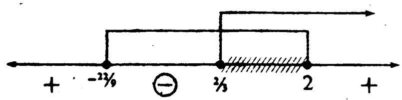
$16(3 - x) \geq (3x-2)^2$

$48 - 16x \geq 9x^2 - 12x + 4$, si $x \geq \frac{2}{3}$

$0 \geq 9x^2 + 4x - 44$

$$\begin{array}{ccc} 9x & & +22 \\ & \times & \\ x & & -2 \end{array}$$

$(9x+22)(x-2) \leq 0$, si $x \geq \frac{2}{3}$

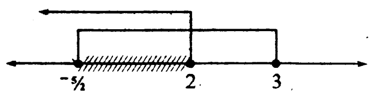


Luego: $B = \left[\frac{2}{3}, 2 \right]$

3) Unir A con B: $A \cup B = \langle -\infty, 2]$

4) ***Conclusión:*** $C_S = U \cap (A \cup B)$

$$C_S = \left[-\frac{5}{2}, 2 \right]$$



PROBLEMA 07

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-2}{2+\sqrt{x+2}}} \leq 2 - x$$

Solución:

Paso 1.- Antes de elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad, analicemos las restricciones.

Las restricciones (**UNIVERSO DE LA SOLUCIÓN**), son:

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{2+\sqrt{x+2}} \geq 0$$

$\downarrow$

RESTRICCIÓN:

La restricción de la raíz cuadrada $\sqrt{x+2}$ es: $x + 2 \geq 0$

$x \geq -2$

Para $x \geq -2$, el denominador es positivo.

$\wedge$ $\wedge$

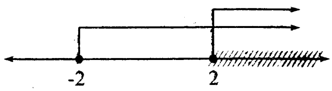
$2 - x \geq 0$

$2 \geq x$

$x \leq 2$

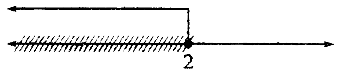
Como la fracción es positiva, entonces el denominador debe ser positivo o cero.

$$\sqrt{x+2}-2\geq 0$$
$$\sqrt{x+2}\geq 2$$
$$\Rightarrow \quad x+2\geq 4$$
$$x\geq 2$$



$U_1 = x\in[2,\infty\rangle$

$\cap$



$U_2 = x \in \,]-\infty,2]$

El universo solución es: $U = U_1 \cap U_2 = \{2\}$

2) Como el universo de la solución es $U=\{2\}$, ya no tendría sentido elevar al cuadrado ambos miembros de la inecuación. A lo más debemos verificar si $x=2$ es solución o no de la inecuación. Si sustituimos $x=2$ en la inecuación, satisface la relación igual, por tanto: $\boxed{S=\{2\}}$ es el conjunto solución.

PROBLEMA 08 $\quad \sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{3-\sqrt{4-x^2}}} \geq \underbrace{x^2-4x-26}_{b}$

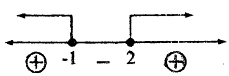
Solución: Aplicar el teorema T_5

1) En primer lugar, hallemos el universo del conjunto solución, que es la restricción de la subradical.

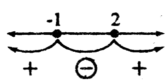
$$\frac{x^2-x-2}{3-\sqrt{4-x^2}}\geq 0 \iff [x^2-x-2\geq 0 \wedge 3-\sqrt{4-x^2}>0] \vee [x^2-x-2\leq 0 \wedge 3-\sqrt{4-x^2}<0]$$

$$\iff [x^2-x-2\geq 0 \wedge 3-\sqrt{4-x^2}>0] \vee [x^2-x-2\leq 0 \wedge 3-\sqrt{4-x^2}<0]$$

$$\iff [(x-2)(x+1)\geq 0 \wedge \sqrt{4-x^2}<3] \vee [(x-2)(x+1)\leq 0 \wedge \sqrt{4-x^2}>3]$$



$\wedge \quad 0\leq 4-x^2<9 \quad \vee$



$\wedge \quad 4-x^2>9$

$0\leq 4-x^2 \wedge 4-x^2<9$

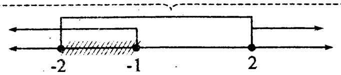
$x^2\leq 4 \wedge \underbrace{x^2>-5}_{I\!R}$

$\underbrace{-2\leq x\leq 2 \wedge I\!R}$

$\underbrace{]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[\quad \wedge \quad -2\leq x\leq 2}$

$\underbrace{x^2<-5}_{\varnothing}$

$\underbrace{[-1,2] \quad \cap \quad \varnothing}_{\varnothing}$



$U_1 = [-2,-1]\cup\{2\} \quad \vee \quad U_2=\varnothing$

Luego, el universo del conjunto solución es: $U = x \in [-2,-1] \cup \{2\}$

2) La solucón de la inecuación $\sqrt{a} \geq b$ tiene dos alternativas, según T_5 :

$$\sqrt{a} \geq b \iff \{[a \geq 0 \ , \text{ si } b<0] \ \vee \ [a \geq b^2 \ , \text{ si } b \geq 0]\} \text{ siempre que } x \in U$$

ambas soluciones están restringidas por el universo: $U = [-2,-1] \cup \{2\}$

Pero resulta que $b = x^2 - 4x - 26$ es **NEGATIVO** para todo $x \in U$

$$= \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{} - 4 - 26$$

$$= (x-2)^2 - 30$$

Probemos:

Si $x \in U = [-2,-1] \cup \{2\} \Rightarrow -2 \leq x \leq -1 \quad \vee \quad x = 2$

$$-4 \leq x-2 \leq -3$$

$$4 \geq -(x-2) \geq 3 \qquad\qquad b = (2-2)^2 - 30 = -30$$

$$16 \geq (x-2)^2 \geq 9$$

$$-14 \geq \underbrace{(x-2)^2 - 30}_{b} \geq -21$$

Lo cual prueba que b es negativo para todo $x \in U$

3) ***Conclusión:*** Como $b < 0 \Rightarrow$ la solución es el universo $U = [-2,-1] \cup \{2\}$

PROBLEMA 09 Resolver: $\sqrt{2x-1} \geq |x|$

Solución:

Del teorema T_5 : $\sqrt{a} \geq b \iff \underbrace{[a \geq 0 \text{, si } b<0]}_{A} \vee \underbrace{[a \geq b^2 \text{, si } b \geq 0]}_{B}$

aplicar sólo la parte B: $a^2 \geq b$, si $b \geq 0$, porque $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Veamos: $\sqrt{2x-1} \geq |x|$

elevar al cuadrado: $2x-1 \geq x^2$

$$0 \geq x^2-2x+1$$

$$0 \geq (x-1)^2$$

$(x-1)^2 \leq 0$ es la única solución.

$$x = 1$$

$$C_S = \{1\}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver:

01 $|2x+5|-|x-4| \leq |x^2-1|$

02 $(\sqrt{|x-1|-3}-\sqrt{5-|x-4|})(\sqrt{|x-1|-3}+\sqrt{5-|x-4|}) \leq |x|-6$

03 Sean los conjuntos:

$A = \{x \in I\!R \,/\, \big|x+|x-3|\big| < \sqrt{3-x}\}$

$B = \left\{x \in I\!R \,/\, \dfrac{x^2-x+3}{x} > 0\right\}$

Hallar los conjuntos A, B, $A \cup B$ y $A \cap B'$.

04 Si $A = \left\{x \in I\!R \,/\, \left|\dfrac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\dfrac{1}{x-2}\right|\right\}$, hallar CA.

05 Resolver: $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}-2\sqrt{2}=0$

06 Resolver: $\sqrt{\dfrac{x}{|x-2|}} < 1$

07 Si $x^2 - 3x < 2$, resolver $\left|\frac{x-5}{x+1}\right| < 3x$

08 Si A y B son los conjuntos solución correspondiente a las inecuaciones en $I\!R$:
$\frac{(x-1)^2-1}{(x+3)(2-5x)} < 0$, $\frac{(x+3)(3-5x)}{(x+1)(2x-3)} \geq 0$, determinar $A \cap B$.

09 Determinar el conjunto solución, en $I\!R$, de la siguiente inecuación: $\frac{|x+4|-|x-5|}{x-7} \leq 1$

10 *i*) Sean $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ y $b = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$

Dado el número $2 \in [a,b]$, determinar el número $t \in [0,1]$ tal que $2 = ta + (1-t)b$.

ii) Sean a y b números reales fijos, tales que $a < b$.
Demostrar que dado $K \in [a,b]$, existe un número $t \in [0,1]$ tal que $K = ta + (1-t)b$

11 Los números reales r y s son soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z} \wedge a \neq 0$.
Determinar una ecuación cuadrática con coeficientes enteros, expresados en términos de a, b, y c, cuyas raíces sean los números reales $\frac{1+r}{1-r}$ y $\frac{1+s}{1-s}$.

12 Resolver: *i*) $\frac{b-a}{dx-b} < -1$, si a, b, c, d son números reales, tal que $d < 0 < a < b$.

ii) $\frac{x-2}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-3}$, siempre que $(2x-1) \in]-1, 9[$

13 Sea x un número real tal que $|x| < 1$.

a) Si $\alpha_1 = \frac{2x-1+\sqrt{1+8x^2}}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{2x-1-\sqrt{1+8x^2}}{2}$

hallar los intervalo de variación de α_1 y α_2 .

b) Demostrar que: $n^2 + (1-2x)n - (x+x^2) > 0$; se verifica $\forall\, n \in I\!N$, $n \geq 2$.

14 Resolver en $I\!R$: $\sqrt{3x+2} - \sqrt{4-x} \leq 2$

15 Supóngase que α y β son raíces reales y diferentes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
Sean s la suma y p el producto de estas raíces.
Resolver: $(s^2 - 4p)x^2 + (s^3 - 4ps)x - p^2 = 0$
Dar las soluciones, solamente en términos de α y β.

16 Discutir la existencia de el(los) valor(es) de m para el (los) que las raíces reales diferentes α y β de la ecuación: $3(m-1)x^2-4(m-1)x+2m-1=0$ satisface la condición $\beta=3\alpha$.

17 Sean a, b, c números reales, con $a\neq 0$, $a+b+c=0$. Si la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ tiene por conjunto solución $\{r,s\}$, hallar la ecuación cuadrática que tiene por conjunto solución $\left\{\frac{r}{1-S},\frac{S}{1-r}\right\}$.

18 Sea $A=\left\{x\in[1,+\infty[\,/\,\frac{|1-|x-1||}{x}<\frac{|x|}{|x-2|}\right\}$. Hallar A. Así mismo hallar el $Sup\,A$ y el $Inf\,A$, si existen.

19 Resolver $\forall\, x\in I\!R$, tal que: $-a^2+2a-4<a^2-ax-2<6a^2-2a+3$, $a\in I\!R$.

20 Resolver en $I\!R$ la inecuación: $\sqrt{x^2+2-\sqrt{4x^2+8}}<x+1$

21 Sea a un número real negativo y fijo. Resolver en $I\!R$ para x:
$\big||2x-a|-|3x+2a|\big|=x-a$

22 Sea $A=\left\{x\in I\!R\,/\left[\!\left[\frac{x}{2}-1\right]\!\right]=-2\right\}$ y

$B=\left\{x\in I\!R\,/\frac{1}{3-x}<4\right\}$. Hallar $\complement A\cup\complement B$.

23 Resolver la inecuación $\left[\!\left[\frac{x}{2}+2\right]\!\right]-x+3\geq 2x$, para $-1<x<-\frac{1}{2}$.

24 Resolver $\left|\frac{x^2-4x-5}{|x|-1}\right|<\left|\frac{x^2-10x+25}{x+3}\right|$

25 Resolver en $I\!R$: $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3-x}\leq 2$.

26 Dado los conjuntos: $A=\left\{x\in I\!R\,/\left|\frac{1}{|x+2|}\right|<\left|\frac{x}{x^2+4x+4}\right|\right\}$, $A=\langle-\infty,-1\rangle-\{-2\}$

$B=\{x\in I\!R\,/|x-2|=x-2\}$, $B=[2,+\infty\rangle$

Hallar $A\cap B$.

27 Resolver: $\sqrt{1-\dfrac{|x^2-2x-3|}{2x+|x^2-4x+4|+1}}+\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{x^2-8x+12}}{\sqrt{8-x}+1}+4} \leq 0$

28 Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$\dfrac{(a-x)\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b+\dfrac{(b-x)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}$ **R.** $x=a$, $x=b$, $x=\frac{a+b}{2}$

29 Si $p_1 \cdot p_2=2(q_1+q_2)$, demostrar que por lo menos una de las ecuaciones:

$$x^2+p_1x+q_1=0 \quad ; \quad x^2+p_2x+q_2=0$$

tienen raíces reales.

30 a) $\sqrt{\left(\left[\!\left[\frac{x}{[\![x]\!]}\right]\!\right]-1\right)^2}=0$ b) $|x+2|<[\![x+2]\!]$ c) $|x+1|<[\![x+1]\!]$

31 Si r y s son soluciones de $3x^2-2(k+1)x+k-1=0$ y $9rs^2+3r^3+9r^2s+3s^3=192$ Determinar los valores reles de k, r y s.

32 Resolver: a) $\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}}=x-a$, sabiendo que $a<0$ y $a^2-b^2<0$

b) $\sqrt{x^2-9x+18}+\sqrt{x^2-6x-16}>0$

33 Sea $A=\left\{x\in IR\,/\,\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}>0\right\}$

Si $\frac{1}{x}\in \complement A$, hallar el menor valor de M tal que $\left|\frac{x-7}{2x+5}\right|\leq M$.

34 Resolver: *i)* $2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}$; $a,b\neq 0$

ii) $\sqrt{x^2+x-20}-\sqrt{x+16}<0$ **R.** $]-6,-5[\,\cup\,[4,6[$

iii) $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x-2}>3$ **R.** $[2,3[\,\cup\,]6,+\infty[$

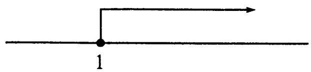
35 Resolver y analizar, según los valores del parámetro "k" la ecuación:

$$\sqrt{x+k}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=0$$

Sugerencia: 1°. Hallar el universo de la ecuación:

$$x+k \geq 0 \quad \wedge \quad x-1 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x-1 \geq 0$$

$$x \geq -k \quad \wedge \quad \underbrace{x \geq 1 \quad \wedge \quad x \geq \tfrac{1}{2}}_{x \geq 1}$$



2°. Analizar para $\begin{cases} \text{a)} -k < 1 \\ \text{b)} -k > 1 \end{cases}$

3°. Elevar al cuadrado: $\sqrt{x+k} = \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}$

36 Resolver para $x \in I\!R$: $\sqrt{\dfrac{x^2+12-2x+\sqrt{x^2-16-6x}}{x-|x^2+6x+8|+4}} \geq x^2+4x-8$

37 Resolver analíticamente, la siguiente inecuación en $I\!R$: $\dfrac{(2x+1)(2-x)}{x-5} \leq 0$

38 Si $A = \{ x \in I\!R \,/\, [\![x^2-2x]\!] = 2 \}$ y

$B = \{ x \in I\!R \,/\, \sqrt{x^2-2x} < 1 \}$. Hallar $A \cap B$.

39 Dados los conjuntos: $A = \{ x \in I\!R \,/\, [\![x+1]\!]^2 - [\![x+1]\!] - 2 < 0 \}$

$$B = \left\{ x \in I\!R \,/ \left[\!\!\left[\frac{5+|2x-6|}{x+2} - 4 \right]\!\!\right] = 0 \right\}$$

Hallar: $A - B$.

40 Hallar $a, b \in I\!R$ tal que: Si $x \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right] \Rightarrow \frac{5}{8} \leq \frac{x+a}{x+b} \leq \frac{6}{7}$

41 Si $a, b \in I\!R$ tales que $a < 0 < b$, resolver analíticamente en $I\!R$ la siguiente inecuación para la variable x.

$$\frac{a}{ax+b} < \frac{b}{2(bx-a)}$$

Solución:

$$\frac{a}{ax+b} < \frac{b}{2(bx-a)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{ax+b} - \frac{b}{2(bx-a)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2a(bx-a)-b(ax+b)}{2(ax+b)(bx-a)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{2abx-2a^2-abx-b^2}{2(ax+b)(bx-a)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{abx-2a^2-b^2}{2(ax+b)(bx-a)} < 0$$

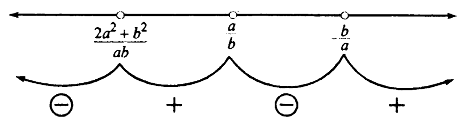
Según datos:

$$\left.\begin{array}{l} a<0 \Rightarrow -a>0 \\ b>0 \end{array}\right\} \rightarrow -ab>0$$

$$\Rightarrow \frac{-abx+(2a^2+b^2)}{(-ax-b)(bx-a)} < 0$$

Puntos críticos $\begin{cases} -abx+2a^2+b^2=0 \rightarrow x=\frac{2a^2+b^2}{ab} \\ -ax-b=0 \rightarrow x=-\frac{b}{a} \\ bx-a=0 \rightarrow x=\frac{a}{b} \end{cases}$

Se cumple: $\frac{2a^2+b^2}{ab} < \frac{a}{b} < -\frac{b}{a}$



Analizando, hallamos:

$$C_S = \left\{ x \in I\!R \ / \ x < \frac{2a^2+b^2}{ab} \ \vee \ \frac{a}{b} < x < \frac{-b}{a} \right\}$$

42 Hallar el conjunto solución de: $|x^2-2x+5| < |x^2-4x+7|$

43 Resolver $\forall\, x \in I\!R$: $\frac{|x-6|}{x} > -x$

44 Hallar el complemento del conjunto solución de:

$|x+5| \le \left|\frac{3x}{5}+2\right| + \left|\frac{2}{5}x+3\right|$. ***R.*** $\varnothing$

45 Resolver en $I\!R$: $|2x-4| - |4-x| > |x+1|$

46 Hallar los valores de k, tal que $\forall\, x \in I\!R$ se cumple: $\frac{3(2k+1)x^2-2(4k+5)x+5k+9}{5x^2-6x+5} < k+2$

47 Sea la sucesión $\{y_n\}_{n\in I\!N^+}$ una sucesión de funciones reales de variable real tal que $y_n = nx^2 + n\sqrt{14}x + \frac{1}{4}(n^2+45)$. Hallar la suma de valores de n para los cuales las gráficas correspondientes intersecta al eje X en dos puntos diferentes.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Grupo 01 (DEMOSTRACIONES)

01 Para todo $a \in IR$, con $a \neq 0$; probar que: $a^2 + a^{-2} \geq 2$

02 Si $a > 0$, $b > 0$; demostrar: $(a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a-b)^2$

03 Si $a > 0$, $b > 0$; demostrar: $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

04 Si $a > 0$, $b > 0$; demostrar: $(a+b)^4 \leq 8a^4 + 8b^4$

05 Si $a > 0$, $b > 0$; demostrar: $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$

06 Si $a > 0$, $b > 0$; demostrar: $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

Demostrar que para $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, se cumplen:

07 $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

08 $(a+b)(b+c)(a+c) > 8abc$

09 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

10 Para cualquier número real a, se verifica: $a^2 + 1 \geq \frac{2a}{a^2+1}$

11 Demuéstrese que si $a \geq b \geq c > 0$, entonces: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

Demuéstrese por inducción matemática, que para cualquier n natural se verifican las siguientes desigualdades:

12 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$

13 $\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2$

Demuéstrese que para $n \geq 1$ (n es cualquier número natural) se verifican las siguientes desigualdades:

14 $(n!) \geq n^n$

15 $\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$

16 $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

17 $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

18 $(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$

19 $n! < \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$

20 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

21 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1} > 1$

22 $(1+\alpha)^n > 1+\alpha n$, **para** $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, $(n \geq 2)$

Grupo 02 **(INECUACIONES LINEALES)**

Resolver en $\mathbb{R}$:

01 $3x > 9$

02 $-2x > 3$

03 $\frac{1}{2}x \leq \frac{1}{3}$

04 $3-5x > 5$

05 $4-2x > x-2$

06 $2(3x-2) > 4(2x-1)$

07 $3(2-3x) \geq 4(1-4x)$

08 $\frac{9y+1}{4} \leq 2y-1$

09 $4x-1 \geq 4(x-2)+7$

10 $\frac{1-t}{2} < \frac{3t-7}{3}$

11 $0.1(0.03x+4) \geq 0.02x+0.434$

12 $\frac{5y-1}{-3} < \frac{7(y+1)}{-2}$

13 $2x-1 < 4x-3 < 21-8x$

14 $\frac{x-1}{2} \leq \frac{4-3x}{4} \leq \frac{5-x}{6}$

15 $2-3x \geq x-1 \geq 5x-3$

16 $2(3-2x) \leq \frac{x}{2} \leq -3(2-3x)$

17 $5x-1 > x > -12+5x$

18 $3-3x < 1-x < 5x-11$

19 $-2(4-2x) > x-8 \geq \frac{1}{2}(-32+4x)$

20 $\frac{1}{2}(x-3) \leq 2-3x \leq 4-x$

Respuestas: 01) $x > 3$ 02) $x < -\frac{3}{2}$ 03) $x < \frac{2}{3}$ 04) $x < -\frac{2}{5}$

05) $x < 2$ 06) $x < 0$ 07) $\left]-\frac{2}{7}, +\infty\right[$ 08) $]-\infty, -5[$ 09) $]-\infty, +\infty[$

10) $\left]\frac{17}{9}, +\infty\right[$ 11) $]-\infty, -2]$ 12) $\left]-\infty, -\frac{23}{11}\right[$ 13) $]1, 2[$ 14) $\left]\frac{2}{7}, \frac{6}{5}\right]$

15) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 16) $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$ 17) $\left]\frac{1}{4}, 3\right[$ 18) $]2, +\infty[$ 19) $]0, 8[$

20) $[-1, 1]$

Grupo 03 (INECUACIONES CUADRÁTICAS)

Resolver en $I\!R$:

01 $x - x^2 \geq 0$

02 $3 - 2x - x^2 < 0$

03 $-3 + 7x - 2x^2 \geq 0$

04 $4x^2 - x < 0$

05 $1 - x - 6x^2 \leq 0$

06 $-2x^2 + 7x - 3 \leq 0$

07 $x(1-2x) < x^2 - x - 1$

08 $(x-2)(x+3) \geq (2x-1)(x-3)$

09 $x(3-2x) \leq (3-x)(x-2)$

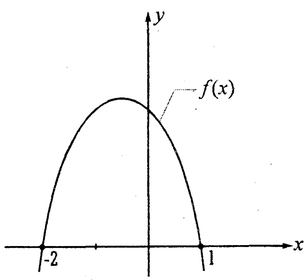
10 $(2x-1)(x+3) \leq x(x+9) - 7$

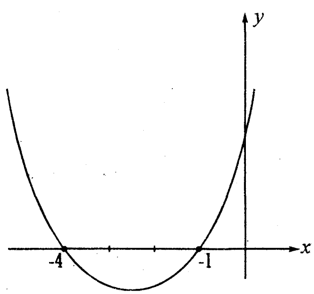
Las siguientes gráficas corresponden a la función cuadrática.

a) $f(x) > 0$ corresponde a la parte de la gráfica que está encima del eje X,

b) $f(x) < 0$ corresponde a la parte de la gráfica que está debajo del eje X.

Mirando sólo la gráfica $f(x)$, resolver las inecuaciones pedidas.





11 a) Resolver $f(x) > 0$

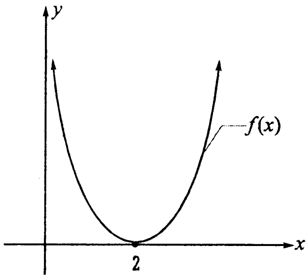
b) Resolver $f(x) < 0$

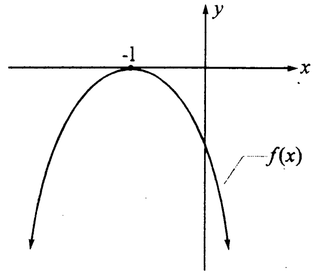
c) Resolver $f(x) \leq 0$

12 a) Resolver $f(x) > 0$

b) Resolver $f(x) < 0$

c) Resolver $f(x) \geq 0$





13 a) Resolver $f(x)>0$

b) Resolver $f(x)\le 0$

14 a) Resolver $f(x)>0$

b) Resolver $f(x)<0$

c) Resolver $f(x)\le 0$

d) Resolver $f(x)\ge 0$

15 Para qué valores reales de k, la solución de la inecuación $x^2-kx+4>0$ es todo $I\!R$.

16 Para qué valores reales de k, la solución de la inecuación $(2-k)x^2+2kx-8\ge 0$ es todo $I\!R$.

Respuestas:

01) $[0,1]$ **02)** $]-\infty,-3[\ \cup\ ]1,+\infty[$ **03)** $\left[\frac{1}{2},3\right]$

04) $\left]0,\frac{1}{4}\right[$ **05)** $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$ **06)** $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[3,+\infty\right[$

07) $\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[\ \cup\ ]1,+\infty[$ **08)** $[4-\sqrt{7},4+\sqrt{7}]$ **09)** $x\in I\!R$

10) $\{2\}$ **11)** a) $]-2,1[$; b) $]-\infty,-2[\ \cup\ ]1,+\infty[$; c) $]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$

12) a) $]-\infty,-4[\ \cup\ ]-1,+\infty[$; b) $]-4,-1[$; c) $]-\infty,-4]\cup[-1,+\infty[$

13) a) $I\!R-\{2\}$; b) $\{2\}$ **14)** a) $\varnothing$; b) $I\!R-\{-1\}$; c) $I\!R$; d) $\{-1\}$

15) $-4<k<4$ **16)** $4-2\sqrt{2}\le k\le 4+2\sqrt{2}$ **17)** $k\in\left]-\infty,\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{3+\sqrt{17}}{2},+\infty\right[$

18) $P(x)=-2x^2-2x+4$; $-2x^2-2x+4\ge 0$

19) $P(x)=-3(2x+3)(2x-1)$; $P(x)<0$ **20)** $M=10$

Grupo 04 (INECUACIONES POLINÓMICA)

Resolver en $I\!R$:

01 $x^3+2x^2-x-2>0$ **02** $x^3+2x^2-x-2\geq 0$ **03** $x^3+2x^2-x-2<0$

04 $x^3+2x^2-x-2\leq 0$ **05** $x^4-x^3-7x^2+x+6<0$

06 $x^5-2x^4-9x^3+14x^2+20x-24\geq 0$

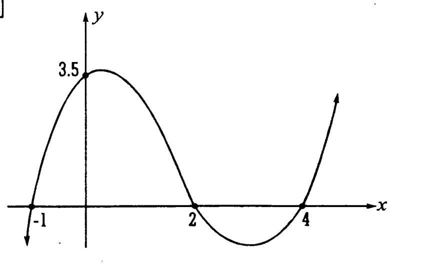
A continuación se dan tres gráficas que corresponden a un polinomio $P(x)$ de grado 3.

Se pide:

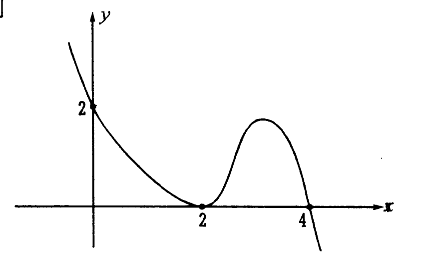
a) Resolver, para cada caso, las inecuaciones (i) $P(x)\geq 0$, (ii) $P(x)<0$, mirando sólo cada gráfica.

b) Hallar, en cada caso, el polinomio $P(x)$.

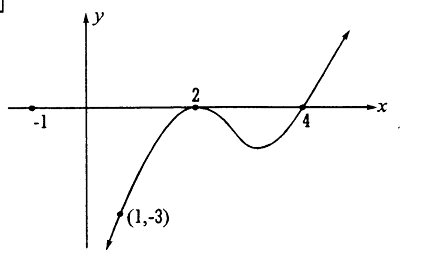
07



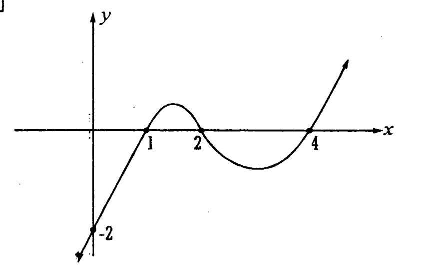
08



09



10



10.b Un científico tiene una data sobre la temperatura T (en °C) durante un período de 24 horas. Si t denota el tiempo en horas y $t=0$ corresponde a las 0.00 horas, encontrar un polinomio de cuarto grado que satisfaga la información de la siguiente data:

t (horas)	0	5	12	19	24
T (°C)	0	0	10	0	0

Además, resolver $P(x)\leq 0$.

Resolver en $I\!R$:

11 $16+16x-x^4-x^5>0$

12 $6x^6+13x^5-18x^4-31x^3+26x^2+12x-8\leq 0$

13 $x^5+x^4-2x^3\leq 0$

14 $x^6+x^5-2x^4>0$

15 $(x-1)^5(x+2)^4(x+3)^7\leq 0$

16 $(x^2-1)(4x-x^3)\geq 0$

17 $(1+x+2x^2)(3x^2+5x-2)(x^2+x+12)>0$

18 $x^2(1-x)(x+3)^5(2x-1)^4>0$

19 $(x+2)(x+5)\leq(x+2)(x-2)(x+5)$

20 $(x-2)(x^2+4)(x-x^3)\geq 0$

<u>**Solución:**</u> **01)** $]-2,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ **02)** $[-2,-1]\cup[1,+\infty[$ **03)** $]-\infty,-2[\,\cup\,]-1,1[$

04) $]-\infty,-2[\,\cup\,[-1,1]$ **05)** $]-2,-1[\,\cup\,]1,3[$ **06)** $[1,2]\cup[3,+\infty[\,\cup\{-2\}$

07) a) (i) $[-1,2]\cup[4,+\infty]$, (ii) $]-\infty,-1[\,\cup\,]2,4[$; b) $P(x)=\frac{3\cdot 5}{8}(x+1)(x-2)(x-4)$

08) a) (i) $]-\infty,4]$, (ii) $]4,+\infty[$; b) $P(x)=-\frac{1}{8}(x-2)^2(x-4)$

09) a) (i) $[4,+\infty[$, (ii) $]-\infty,4[$; b) $P(x)=(x-2)^2(x-4)$

10) a) (i) $[1,2]\cup[4,+\infty]$, (ii) $]-\infty,1[\,\cup\,]4,+\infty[$; b) $P(x)=\frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-4)$

10.b) $P(x)=705.6x(x-5)(x-19)(x-24)$, $[0,5]\cup[19,24]$

11) $]-\infty,-2[\,\cup\,]-1,2[$ **12)** $\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right]\cup\{-2,1\}$ **13)** $]-\infty,-2]\cup[0,1]$

14) $]-\infty,-2[\,\cup\,]1,+\infty[$ **15)** $[-3,1]$ **16)** $]-\infty,-2[\,\cup\,[-1,0]\cup[1,2]$

17) $[-4,-2[\,\cup\,\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right[\,\cup\,]1,3[$ **18)** $]-3,1[\,-\,\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$

19) $[-5,-2]\cup[3,+\infty[$ **20)** $[-1,0]\cup[1,2]$

Grupo 05 (INECUACIONES RACIONALES)

Resolver en $I\!R$.

01 $\dfrac{2x-1}{x-2}\geq 1$ **02** $\dfrac{x-2}{x-1}\leq 2$ **03** $\dfrac{2x-3}{x+1}\geq 4$ **04** $\dfrac{2x-1}{x+2}\leq 4$.

¿Qué valores reales tendrá "x", si "y" es un número real?

05 $y=3\pm 2\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ **06** $y=5\sqrt{\frac{x-x^2}{x+3}}$ **07** $y=2x^2-5x+3\sqrt{1-\frac{1}{x}}$

¿Qué valores reales tendrá "x" para que "y" sea un número real?

08 $y = 3x - 2Log_2\left(\frac{1}{x} - x\right)$ **09** $y = 5\,Ln\left(\frac{1-x}{x^2-4}\right)$ **10** $y = x^2 - x + 2\,Ln\left(\frac{3}{1-x}\right)$

Resolver en $I\!R$ las siguientes inecuaciones:

11 $\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x-12} < 0$ **12** $\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x-12} \le 0$ **13** $\frac{2x^4+3x^3-6x^2-5x+6}{x^3-7x^2+18x-40} \le 0$

Resolver en $I\!R$:

14 $\frac{x-2}{x+2} \ge \frac{2x-3}{4x-1}$ **15** $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$ **16** $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} > \frac{8}{x^2-1}$

17 $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} < 3$ **18** $\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+8} + \frac{1}{x+6} \ge 0$

19 $\frac{(x^2+4)(x-1)^2}{(x+1)(x-2)} < 0$ **20** $\frac{x-x^3}{(x-1)(x-2)} \ge 0$ **21** $\frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2} \le 0$

22 $\frac{x^2+2x^2-x-2}{x^3+4x} \ge 0$ **23** $\frac{(1-x)(x^2+2x+1)}{x^2-2x} \ge 0$

24 Sean los conjuntos: $A = \left\{x \in I\!R : \frac{1}{x} \in [2,+\infty[\right\}$

$B = \left\{x \in I\!R : \frac{3x-1}{x-2} \in]-\infty,0]\right\}$. Hallar $A \cap B$

25 Sean los conjuntos: $A = \left\{x \in I\!R : \frac{2}{x-1} \in [-1,3]\right\}$ $B = \left\{x \in I\!R : \frac{x+2}{x-3} \in]-\infty,0]\right\}$
Hallar $A \cap B$.

26 Sean los conjuntos: $A = \left\{x \in I\!R : \frac{x}{x-1} \in]-2,2[\right\}$ $B = \left\{x \in I\!R : \frac{3x-4}{x-3} \in]-\infty,2]\right\}$
Hallar $A \cap B$.

27 Sean los conjuntos: $A = \left\{x \in I\!R : \frac{x-2}{x} \in [-3,2]\right\}$ $B = \left\{x \in I\!R : \frac{2x-1}{x+2} \in [-5,1]\right\}$
Hallar $A \cap B$.

28 Sean los conjuntos: $A = \left\{x \in I\!R \,;\, x - \frac{4}{x} \ge 0\right\}$ $B = \left\{x \in I\!R : 1 < \frac{5}{x^2+4} \le x\right\}$
Hallar: a) $A \cap B$ b) $A - B$ c) $B - A$

29 **Sean los conjuntos:** $A=\left\{x\in I\!R: \frac{4-x}{x-1}\geq 0\right\}$ $\quad$ $B=\left\{x\in I\!R: 1\leq \frac{2}{x}\right\}$

Hallar: a) $(B-A)\cup(A-B)$ $\quad$ b) $A\cap B$

30 **Sean los conjuntos:** $A=\left\{x\in I\!R: \frac{x^4-5x^2+4}{x^4-x^3-7x^2+x+6}\leq 0\right\}$

$B=\left\{x\in I\!R: \frac{x^3+5x^2-6x-5}{6x^3+7x^2-x-2}\geq 0\right\}$ $\quad$ Hallar: $\quad A\cap B$

Respuestas:

01) $]-\infty,-1]\cup]2,+\infty[$ $\quad$ **02)** $]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$ $\quad$ **03)** $\left[-\frac{7}{2},-1\right[$

04) $\left]-\infty,-\frac{9}{2}\right]\cup]-2,+\infty[$ $\quad$ **05)** $[0,1[$ $\quad$ **06)** $]-\infty,-3[\cup[0,1]$

07) $]-\infty,0[\cup[1,+\infty[$ $\quad$ **08)** $]-\infty,-1[\cup]0,1[$ $\quad$ **09)** $]-\infty,-2[\cup]0,2[$

10) $]-\infty,1[$ $\quad$ **11)** $]-6,-2[\cup\left]\frac{1}{2},2\right[$ $\quad$ **12)** $]-6,-2]\cup\left[\frac{1}{2},2\right[$

13) $\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-2,5[$ $\quad$ **14)** $]-\infty,-2[\cup\left]\frac{1}{4},1\right]$ $\quad$ **15)** $]-\infty,1[\cup\left]\frac{3}{2},2\right[\cup]3,+\infty[$

16) $]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]3,+\infty[$ $\quad$ **17)** $I\!R-\{-1\}$

18) $]-8,-6[\cup[-5\sqrt{2},0]\cup[R\sqrt{2},6[\cup]8,+\infty[$

19) $]-1,2[-\{1\}$ $\quad$ **20)** $]-\infty,-1]\cup[0,2[-\{1\}$

21) $]1,2[$ $\quad$ **22)** $]-\infty,-2]\cup[-1,0[\cup[1,+\infty[$

23) $]-\infty,0[\cup[1,2[\cup\{-1\}$ $\quad$ **24)** $A=\left]0,\frac{1}{2}\right]$; $B=\left[\frac{1}{3},2\right[$; $A\cap B=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

25) $A=]-\infty,-1]\cup]2,+\infty[$; $B=[-2,3[$; $A\cap B=[-2,-1]\cup[2,3[$

26) $A=\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[\cup]2,+\infty[$; $B=[-2,3[$; $A\cap B=\left[-2,\frac{2}{3}\right[\cup]2,3[$

27) $A=]-\infty,-2]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$; $B=\left[-\frac{9}{7},+\infty\right[$; $A\cap B=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

28) $A=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$; $B=[1,+\infty[$

a) $A\cap B=B$; b) $A-B=]-\infty,-1[$; c) $B-A=\{1\}$

29) $A=]-1,4]$; $B=]0,2]$

a) $(A-B)\cup(B-A)=]0,-1]\cup]2,4[$; b) $A\cap B=]-1,2]$

30) $A=[2,3[$; $B=]-\infty,-5]\cup\left]-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right[\cup[1,+\infty[$; $A\cap B=A$.

Grupo 06 (APLICACIÓN DE INECUACIONES LINEALES CON VALOR ABSOLUTO Y RACIONALES)

01 Dadas las coordenadas de los puntos P y Q, en la recta real, hallar los valores de $x \in I\!R$ que cumplen las condiciones que se dan a continuación.

a) Coordenada de P es $a = 2x+1$, coordenada de Q es $b = 4$
 i) La distancia de P a Q es 3 unidades.
 ii) La distancia de P a Q es menor que 3 unidades.

b) Coordenada de P es $a = 2x-1$, coordenada de Q es $b = 4-8x$
 i) La distancia de P a Q es 5 unidades
 ii) La distancia de P a Q es menor que 5 unidades.

R: a) (*i*) $\{0, 3\}$, (*ii*) $0 < x < 3$ **b)** (*i*) $\{0, 1\}$, (*ii*) $0 < x < 1$

02 Si $-2 < (1-2x)^2 - 3 < 6$, ¿en qué intervalos se encuentra x?

03 Si $(3-2x) \in [-3, 4]$, ¿a qué intervalo pertenece x?

R: 02) $x \in]-1, 0[\cup]1, 2[$, 03) $4 - \frac{1}{2} \le x \le 3$

04 Si $2 < x < 5$, hallar el mayor m y el menor M, tal que $m < \frac{5x-3}{x} - 2 < M$

R: $m = \frac{3}{2}$, $M = \frac{13}{5}$

05 Si $5 < \frac{2x+3}{3x} < 8$, hallar el menor "b" y el mayor "a", tal que , $a < x < b$.

R: $a = \frac{3}{22}$, $b = \frac{3}{13}$

06 Si $|x-1| - 3$ es un elemento del conjunto $A = \{y \in I\!R : 6 < y < 13\}$, hallar x.

R: $x \in]-15, -8[\cup]10, 17[$

07 Si $\frac{3}{|2x-3|} \in \left]\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right[$, ¿a qué intervalo pertenece x? **R:** $x \in \left]\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right[$

08 Sea $0 < a < b$. Si $\frac{a}{b} < \frac{abx - 2a + ab}{b(b-x)} < \frac{2a}{b}$, hallar x. **R:** $x > \frac{b+2}{b}$

09 Si $0 < a < b$, probar que $\frac{2}{a} > \frac{1}{a} > \frac{2}{a+b}$

10 Si $0 < a < b$, probar que $0 < \frac{a(b-a)}{a+b} < \frac{b(b-a)}{a+b}$

APLICACIÓN DE LA PROPIEDAD: $k \le y \le c$ implica $|y| \le máx\{|k|,|c|\}$

Ejemplo: Si $-5 < 3x-1 < -2$, entonces $|3x-1| < 5$ porque 5 es el valor máximo del conjunto $\{|-5|,|-2|\} = \{5, 2\}$.

Esta propiedad se aplica en el límite de una función real de variable real.

11 Si $2 < x < 4$, probar que $|2x+3| < 11$

12 Si $3 < x < 6$, probar que $|7-2x| < 9$

13 Si $3 < x < 5$, probar que $\left|\frac{2x}{x-2}\right| < 10$

14 Si $|x-1| < \frac{1}{3}$, probar que $\frac{1}{|2x-1|} < 3$

15 Si $|x| < \frac{1}{2}$, probar que $\frac{1}{|2x+\sqrt{3}|} < \frac{1}{|\sqrt{3}-1|}$

16 Si $|x-2| < 1$, probar que $\frac{1}{|3x-2|} < 1$

17 Si $|x-1| < \frac{1}{2}$, probar que $\frac{1}{|x-2|} < 2$

18 Si $\left|x+\frac{4}{5}\right| < \frac{1}{5}$, probar que $\frac{1}{|5x+2|} < 1$

19 Si $|2x-1| < 2$, probar que $\frac{1}{|2x-5|} < \frac{1}{2}$

20 Si $|3x+8| < 2$, probar que $\frac{1}{|6x-3|} < \frac{1}{15}$

Grupo 07 (APLICACIÓN DE LAS INECUACIONES)

01 El producto bruto interno (PBI) de un país está proyectado en $t^2+4t+60$ miles de millones de dólares, donde t se mide en años a partir del año en curso. Determínese el instante en que el PBI del país excederá por vez primera los 72 mil millones.

R: $t \ge 2$. El PBI excederá por vez primera los 72 millones cuando $t = 2$; es decir, dentro de 2 años.

02 Determine el costo mínimo C (en dólares) dado que $5(C-25) \ge 1.75 + 2.5\,C$

R: el costo mínimo es 50.7 , pues $C \ge 50.7$

03 Determine la ganancia máxima P (en dólares) dado que $6\,(P-2500) \leq 4\,(P+2400)$
R: $P \leq 4100$, la máxima ganancia es 4100.

04 La relación entre las temperaturas Celsius (°C) y Fahrenheit (°F) está dado por la fórmula $C = \frac{5}{9}(F-32)$.

a) ¿a cuántos grados Fahrenheit es equivalente cero grados centígrados?
b) Si el intervalo de temperatura para Lima durante los meses de Enero y Febrero es $21 < °C < 29$, determine el intervalo en grados Fahrenheit en Lima para el mismo período.
c) La temperatura para Nueva York durante Junio es $63° < F° < 80°$, indíquela en grados Celsius.

R: a) 32 grados Fahrenheit b) $69.8 < F < 84.2$ c) $\frac{155}{9} < C < \frac{240}{9}$

05 La comisión mensual de un agente de ventas es de 15% de las ventas por arriba de \$ 12 000 . Si su objetivo es lograr una comisión de al menos \$ 1000 por mes, ¿Cuál es el volumen mínimo de ventas que debe alcanzar?
R: \$ 18 666.67 . Planteamiento: $0.15\,(x - 12\,000) \geq 1000$.

06 El margen de ganancia para un auto usado era al menos 30% de su precio actual al por mayor. Si el auto fue vendido en S/. 2800 , ¿Cuál fue el precio máximo al por mayor?
R:

07 La fábrica de cierto artículo ha estimado que su ganancia en miles de dólares está dado por la expresión: $-6x^2 + 30x - 10$ donde x (en miles) es el número de unidades producidas. ¿Qué nivel de producción le permitirá obtener una ganancia de al menos S/. 14 000 ?
R: entre 1000 y 4000 unidades

08 t minutos después de introducir un bactericida experimental en cierto cultivo el número de bacterias está dado por

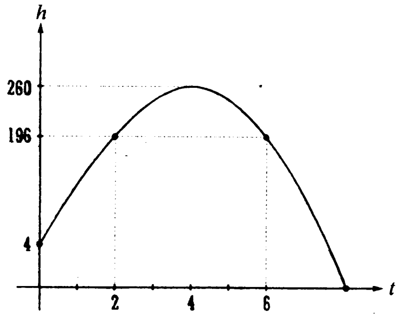
$$\frac{10000}{t^2+1} + 2000$$

Determine el momento en que el número de bacterias está por debajo de 4000.
R: $t > 2$

09 Una pelota se lanza hacia arriba, de modo que su altura después de t segundos es

$$128t - 16t^2 + 4 \text{ pies .}$$

Determine el tiempo durante el cual la pelota estará arriba de una altura de 196 pies,
R: 4 segundos.



$h = -16t^2 + 128t + 4$

Resolver: $h > 196$

$2 < x < 6$

$6 - 2 = 4$

10 Se lanza una pelota y recorre un camino que es la gráfica de la ecuación $h = -\frac{8}{9}t^2 + \frac{16}{3}t + 1$, donde t es el tiempo en segundos y h es la altura en metros.

a) ¿Cuántos segundos debe transcurrir para que la pelota alcance su máxima altura? ¿Cuál es la máxima altura?

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la pelota alcance el suelo.

R: a) $h = 9$ metros en $t = 3$ segundos

b) $t = 6.19$ segundos

Grupo 08 (APLICACIONES A LA ECONOMÍA)

A. COSTO, INGRESO Y GANANCIA

EXPLICACIÓN TEÓRICA: Supongamos que una empresa produce camisas. El costo de producir una camisa es $ c dólares, cuando produce la cantidad de "x" camisas, entonces el COSTO VARIABLE es cx dólares. Además, el empresario paga: alquiler de local, agua, electricidad y teléfono, la suma de todos estos gastos se llama "COSTO FIJO" (F), entonces el costo total será $C(x) = cx + F$.

(COSTO TOTAL ES IGUAL A LA SUMA DEL COSTO VARIABLE MÁS EL COSTO FIJO)

El empresario vende cada camisa a "s" dólares, entonces al vender la cantidad de "x" camisas obtendrá como ingreso $R(x) = sx$ dólares.

La ganancia del empresario es $P(x) = R(x) - C(x)$; "GANANCIA = INGRESO – COSTO TOTAL"

consecuencias: a) Si $P(x) > 0$, la empresa obtiene ganancia

b) Si $P(x) = 0$, la empresa ni pierde ni gana (punto de equilibrio).

c) Si $P(x) < 0$, la empresa tiene pérdida.

PROBLEMAS :

01 La compañía ALFA fabrica camisas para niños con un costo de S/ 4 por unidad y los vende a $ 10 la unidad. Si los costos fijos de la empresa son de S/. 12 000 al mes, determinar el punto de equilibrio de la empresa.

R: $x = 20\,000$

02 Con los datos del problema 1, responder las siguientes preguntas :

a) ¿Cuál es la pérdida de la empresa ALFA si sólo se producen y venden 1500 unidades por semana.

b) ¿Cuál es la ganancia si se produce y venden 3000 unidades por semana?

c) ¿Cuántas unidades debe producir y vender la empresa para obtener una ganancia mensual mínima de S/. 9000?

R: a) $P = -300$, b) $P = 6000$, c) $x = 3500$

03 La gerencia de la compañía de controles ROLEX debe decir entre dos procesos de producción de auriculares modelo A. El costo mensual del primer proceso está dado por : $C_1(x) = 20x + 10000$ dólares, donde x es la cantidad de auriculares producido, y el costo mensual del segundo proceso está dado por $C_2(x) = 10x + 30000$ dólares. Si las ventas proyectadas son de 800 auriculares a un precio unitario de S/. 40, ¿Cuál proceso debe elegir la gerencia para maximizar las ganancia de la compañía.

R: a) Con el primer proceso es $x = 500$ b) Con el segundo proceso $x = 1000$

04 En referencia al problema 3, ¿cuál proceso debe elegir la gerencia de ROLEX si las ventas proyectadas son de a) 1500 unidades y b) 3000 unidades?

R: a) $C_1 = 40\,000$, $C_2 = 45\,000$. La empresa debe elegir el primer proceso.

b) $C_1 = 70\,000$, $C_2 = 60\,000$. En este caso, la gerencia debe elegir el segundo proceso.

05 Un fabricante tiene costos fijos mensuales de $. 60 000 y un costo de producción unitario de $ 10. El producto se vende por $ 15 la unidad.

a) ¿Cuántas unidades, como mínimo, debe vender el fabricante para obtener garantía.

b) ¿Cuántas unidades se debe producir para no perder ni ganar?

c) ¿En qué caso se produce pérdida?

R: a) $x > 12\,000$, como mínimo debe vender 12 001 unidades

b) $x = 12\,000$, c) $x < 12\,000$

06 Un fabricante tiene gastos fijos mensuales de $. 40 000 y un costo unitario de producción de $ 8 . El producto se vende a $ 12 la unidad.

a) ¿En qué caso se produce ganancia? b) ¿Cuándo no existe ganancia ni pérdida?

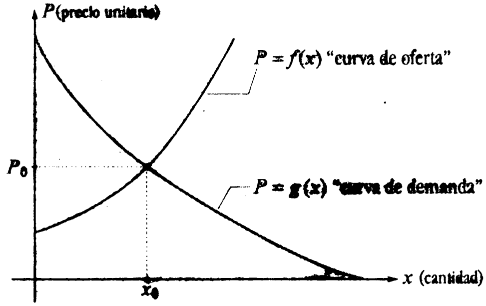
c) ¿En qué caso se produce pérdida?

R: a) $x > 10\,000$ b) $x = 10\,000$ c) $x < 10\,000$

B. CURVAS DE DEMANDA Y OFERTA

EXPLICACIÓN TEÓRICA: En una economía de libre mercado, la demanda de los consumidores por cierto artículo depende del precio unitario del mismo. La ecuación de demanda expresa la relación entre el precio unitario y la cantidad demandada. La gráfica de la ecuación de demanda es una curva de demanda. En general, la cantidad demandada decrece cuando el precio unitario aumenta y viceversa.

En un mercado competitivo, también existe una relación entre el precio unitario de un artículo y su disponibilidad en el mercado. En general, un incremento en el precio, el productor va a aumentar la oferta del mismo. Recíprocamente, un decremento en el precio unitario lleva por lo general a una reducción de la oferta. La ecuación que expresa la relación entre precio unitario y cantidad proporcionada es una ecuación de oferta y su gráfica es una curva de oferta.



P_0 : precio de equilibrio.

x_0 : cantidad de equilibrio.

Consecuencias:

a) En el mercado habrá abundancia si $f(x) > g(x)$ "la oferta es mayor que la demanda"

b) En el mercado habrá equilibrio si $f(x) = g(x)$

c) En el mercado habrá escasez si $f(x) < g(x)$ "La oferta es menor que la demanda".

PROBLEMAS:

07 La función de oferta de cierta marca de corbata está dada por $P = -0.01x^2 - 0.2x + 8$ y la función de demanda correspondiente está dada por: $P = 0.01x^2 + 0.1x + 3$ donde P se expresa en dólares y "x" se mide en unidades de millar.

a) Determine la cantidad y el precio de equilibrio.

b) determinar el valor de "x" para el caso que hay abundancia de corbatas en el mercado.

c) determinar el valor de "x" para el caso que hay escasez de corbatas en el mercado.

R: a) 10 000 corbatas a un precio unitario de S/. 5

b) $x > 10$, c) $0 < x < 10$

08 Para cada par de ecuaciones de oferta y de demanda en los ejercicios a) y b), donde se representa la cantidad demandada en unidades de millar y P el precio unitario en dólares, indique: (i) la cantidad y el precio de equilibrio, (ii) ¿En qué caso hay escasez? (iii) En caso hay abundancia?

a) $p=-2x^2+80$ y $p=15x+30$ b) $11p+3x-66=0$ y $2p^2+p-x=0$

R: a) (i) $x=$ S/. 2500 y $p=$ S/. 67.50 b) i) $x=11{,}000$, $p=$ S/. 3
(ii) $0<x<2.5$, $x>2.5$ ii) $0<x<11$, (iii) $x>11$

09 Una empresa constructora de viviendas, tiene 100 departamentos de dos recámaras. La ganancia mensual obtenida por la renta de x departamentos está dada por
$P(x)=-10x^2+1760x-50000$ dólares. ¿Cuántas unidades deben rentar para maximizar la ganancia mensual? ¿Cuál es la máxima ganancia mensual que se puede obtener?
R: $x=88$, $P=27440$

10 La ganancia mensual estimada obtenida por la empresa KODAK al producir y vender x unidades de cámaras modelo MX es $P(x)=-0.04x^2+240x-10\,000$ dólares. Encuentre cuántas cámaras debe producir cada mes para maximizar sus ganancias.
R: $x=3000$

11 La relación entre las ganancias trimestrales de la empresa ROYAL, $p(x)$, y la cantidad de dinero x invertido en publicidad por trimestre queda descrita mediante la función $P(x)=-\frac{1}{8}x^2+7x+30$, $0\le x\le 50$ donde $P(x)$ y x se miden en miles de dólares. Determine la cantidad de dinero que debe invertir la compañía en publicidad por trimestre para maximizar sus ganancias trimestrales.
R: $x=28$, p = 128

12 El ingreso mensual R (en cientos de dólares) obtenido por la venta de rasuradoras eléctricas GUILLETE se relaciona con el precio unitario p (en dólares) mediante la ecuación

$$R(p)=-\frac{1}{2}p^2+30p$$

¿Cuál precio unitario maximiza el ingreso mensual?
R: $p=30$

13 Las funciones de oferta y demanda semanales de pantalones están dadas por

$$p=-0.1x^2-x+40$$

$$\text{y}\quad p=-0.1x^2+2x+20$$

respectivamente, donde p se mide en dólares y x en unidades de centena.

a) Determine la cantidad y el precio de equilibrio
b) ¿En qué caso hay abundancia?
c) ¿En qué caso hay escasez?

R: a) $x = 500$, $P = \$ 32.50$
b) $x > 500$, $0 < x < 500$

14 La gerencia de la compañía de neumáticos GOOD YEAR ha determinado que las funciones semanales de demanda y oferta de sus neumáticos X2 están dadas por

$$P = 144 - x^2 \qquad \text{y} \qquad P = 48 + \tfrac{1}{2}x^2$$

respectivamente, donde p se mide en dólares y x en unidades de millar.
a) Indique la cantidad y el precio de equilibrio
b) ¿En qué caso se produce abundancia?
c) ¿En qué caso se produce escasez?

R: a) $x = 8$, $p = 80$ b) $x > 8$, $0 \leq x \leq 8$

15 (Ley de Poiseuille) De acuerdo con una ley descubierta por el médico Poiseuille en el siglo XIX, la velocidad (en cm/s) de la sangre a r centímetros del eje central de una arteria está dada por $V(r) = k(R^2 - r^2)$ donde k es una constante y R es el radio de la arteria. Suponga que para cierta arteria, $k = 1000$ y $R = 0.2$ de modo que $V(r) = 1000(0.04 - r^2)$. ¿Para cuál valor de r es máximo $v(r)$? ¿Para cuál es mínimo? Interprete sus resultados.

R: $r = 0$, $V = 0.2$. La velocidad de la sangre es mayor a lo largo de la parte central de la arteria $(r = 0)$ y menor a lo largo de la pared de la arteria $(r = 0.2)$. La velocidad máxima es $V(0) = 40\ cm/s$ y la velocidad mínima es $V(0.2) = 0\ cm/s$.

OTROS PROBLEMAS:

16 Una Compañía fabrica bujías, el costo combinado de mano de obra y material es de \$ 5 por bujía. Los costos fijos (los costos de un período dado sin importar la producción) son de \$ 60000. Si el precio de venta de una bujía es de \$ 7, ¿Cuántos deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

R: $q > 30\,000$, q : cantidad de bujías

17 La fábrica ALFA confecciona corbatas. El costo variable por confeccionar una corbata es de \$ 6 y el costo fijo de \$ 80 000. Cada unidad tiene un precio de venta de \$ 10. Determine el número de unidades que deben venderse para obtener una utilidad mayor de \$ 60 000.

R: $q > 35\,000$, q : Nº de corbatas

18 Un taxista debe decidir si renta o compra un auto. Si renta el auto el pago mensual sería de S/. 600 (con base en un año) y el costo diario (gasolina, aceite y conductor) sería S/. 60 por cada día que sea utilizada. Si la compra, su costo fijo anual sería de S/. 4 000 y los costos por operación y mantenimiento seria de S/. 80 por cada día que el auto trabajase. ¿Cuál es el número mínimo de días al año que tendría que usarse el auto para justificar la renta en lugar de la compra?

R: $d > 160$, d : número de días

19 (RAZÓN DE ACTIVO)

Definición.- La razón de activo de un negocio es el cociente de sus activos circulantes (efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar) a sus pasivos circulantes (préstamos a corto plazo e impuestos).

Problema.- Después de consultar al contador, el presidente de la empresa ACE COMPANY decide pedir un préstamo a corto plazo para comprar mercancía. La compañía tiene un activo de S/. 250 000 y un pasivo de 50 000. ¿Cuánto pueden pedir prestado si quieren que su razón de activo no sea mayor que 1.5? (*Nota*: Los fondos que recibirá son considerados como activo y el préstamo como pasivo).

R: Se trata de resolver $\frac{250\,000 + x}{50\,000 + x} \geq 1.5$, $x \leq 350\,000$ a lo más se podrá prestar \$350 000.

20 Una compañía de publicidad determina que el costo por publicidad por cada cierta revista es de \$ 1.50. El ingreso recibido de los distribuidores es de \$ 1.40 por revista. El ingreso por publicidad es el 10% del ingreso recibido de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por arriba de 10 000. ¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben ser vendidos de modo que la compañía obtenga utilidades?

R: Aplicar INGRESO TOTAL – COSTO TOTAL > 0

Si se venden sólo 10 000, el ingreso es $1.40q$. Pero si se venden más de 10 000, el ingreso total es $1.40q + (0.10)\,[1.40\,(q - 10000)]$

El costo tal es $1.50q$, q : número de revistas.

La solución es $q > 35\,000$. Se garantiza las utilidades si vende 35 001 ejemplares.

Grupo 09 ECUACIONES CON RADICALES

Resolver las siguientes ecuaciones en IR:

01 $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$

02 $\sqrt{x+1}=x-1$

03 $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$

04 $\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$

05 $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{2x+3}$

06 $x^2-\sqrt{x^2-9}=21$

07 $\sqrt{14+25x}-\sqrt{1+4x}=\sqrt{7+9x}$

08 $\sqrt{2x^2+3x-2}+\sqrt{8x^2-2x-1}=\sqrt{18x^2+5x-7}$

09 $\sqrt{x+8}=\sqrt{5x+20}-2$

10 $\sqrt{10-x}-\sqrt{x}=\sqrt{x-5}$

11 $\sqrt{x-10}-\sqrt{4-x}+x=4$

12 $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$

13 $x^2-3=\sqrt{4x^2-4x+1}$

14 $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=3+x^2$

15 $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-1}$

16 $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{1-x}$

17 $\sqrt{9+4x^2-12x}+\sqrt{10x-x^2-21}=2x+3{,}5$

18 $(x+1)\sqrt{10x-21-x^2}=x^2-11x+24$

19 $\sqrt{x}=1-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}$

20 $(1-\sqrt{1+\sqrt{x}})\sqrt{1+\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

21 $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=1-\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$

22 $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$

23 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\sqrt{x-1}+2}=2$

24 $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}$

Soluciones:

01) $\{81, 84\}$; 02) $\{3\}$; 03) $\{1, 5\}$; 04) $\{6\}$;

05) $\{-1\}$; 06) $\{-5, 5\}$; 07) $\{2\}$; 08) $\{2\}$

Grupo 10 ECUACIONES EXPONENCIALES

Resolver en $I\!R$:

01 $\sqrt[4]{512} = 8^{3x} \cdot 2^{1-x}$

02 $125^{2-3x} = \sqrt{\frac{1}{25}}$

03 $\left(\frac{5}{9}\right)^{2x-7} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{9}\right)^{1-3x}}$

04 $\left(\frac{4}{7}\right)^{x}\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$

05 $9^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = \sqrt{27^{x}}\ \sqrt[3]{81^{x+3}}$

06 $3^{x(x-2)-\frac{8x+5}{2}} - 9\sqrt{243} = 0$

07 $\left[(\sqrt{0,11})^{x+3}\right]^{3-x} = 0,001331$

08 $\left(32^{\frac{1}{x-7}}\right)^{x+5} = [\sqrt{0,0625}\,(2\cdot\sqrt{4096})^{x+17}]^{\frac{1}{x-3}}$

09 $3^{2+\log_3 2}\cdot\sqrt{729} = 2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{81}\right)^{x+1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

10 $2(5^{x+2}) - 5^{x+3} = 375$

11 $3(4^{x-2}) = 2(256 - 16^{\frac{x+1}{2}})$

12 $3\sqrt{2^{x-31}} - 5\sqrt{2^{x-35}} - 32 = 0$

13 $3^{\sqrt{x^2}+2} - 3^{\sqrt{x^2}+1} - 3^{\sqrt{x^2}-1} = 68$

14 $3(13^{x}) + 13^{x+1} - 2^{x+2} = 5(2^{x+1})$

15 $2(5^{x+1}) - \frac{1}{5}(4^{x+2}) - \frac{1}{3}(5^{x+2}) = 3(4^{x-1})$

16 $3(10^{x} - 6^{x+2}) + 4(10^{x+1}) = 5(10^{x-1} + 6^{x-1})$

17 $4^{3x^2+x} - 8 = 2(8^{x^2+\frac{x}{3}})$

18 $2^{2x+6} + 4(4^{2x} - 8^{x+1}) = 0$

19 $7^{2x} + 7^{-2x} - 7^{x+1} - 7^{1-x} + 8 = 0$

20. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 1\right] = 2^{x} + 1$

Grupo 11 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

01 $\log_2(x+4) = \log_2(\log_2 7 - \log_2 5)$

02 $\log_7 x = 2\log_7(2^{x} - 15)$

03 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-3) = 1$

04 $2\log_{\pi}(x-1) + \log_{\pi}(x-30)^2 = 4$

05 $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$

06. $\log_3\log_3\log_2(x+5) = \log_3 2 - 1$

07. $\log_8\left[2\log_2(1+\log_2(1+3\log_2 x))\right] = \frac{1}{3}$

08. $1 + \log(1 + x^2 + 2x) - \log(x^2 + 6) = 2\log(x+1)$

09 $\log(2x-3)^2-\log(3x-1)^2=2$

10 $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)=\log_{\frac{1}{2}}2-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

11 $2-\log_2(x^2+3x)=0$

12 $\log_4(x^2-1)-\log_4(x-1)^2=\log_4\sqrt{(2-x)^2}$

13 $\log_9(x^2+2x-3)=\log_9\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$

14 $\log_6(x+1)=\log_6(1-x)+\log_6(2x+3)$

15 $\frac{\log 2+\log(4-5x-6x^2)}{\log(2x-1)}=3$

16 $\log_{\sqrt{2}}\left|\frac{x^2-x-1}{x^2+x-2}\right|=0$

17 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1$

18 $\log\sqrt{1+x}+3\log\sqrt{1-x}=\log\sqrt{1-x^2}+2$

19 $\sqrt{\log_2 x^4}+4\log_2\sqrt[4]{\frac{2}{x}}=2$

20 $\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt{4\log_4 x-2}=4$

21 $\sqrt{\log_9(9x^3)\cdot\log_3(9x)}=\log_3 x^2$

22 $\sqrt{2\left(\log_2\frac{x^2}{64}-1\right)\left(2+\log_4(8x)\right)}=\log_2(2x)$

23 $\frac{1}{5-4\log(x+1)}=3-\frac{1}{1+\log(x+1)}$

24 $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$

25 $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x=6$

26 $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}}2=\log_{\frac{x}{64}}2$

27 $\log_{5x}\frac{5}{x}+\log_x\frac{2}{5}=1$

28 $\log\left[3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right]=2-\sqrt{x+0,25}\log 4+\frac{\log 16}{4}$

29 $\log\sqrt[3]{75+5^{\sqrt{3x-5}}}=\frac{2}{3}$

30 $2\log_2(\log_2 x)+\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(2\sqrt{2}x))=1$

31 $\log_{5x-1}(10x^2-7x+1)^4=2+\log_{5x-1}(25x^2-10x+1)$

32 $\log_{(x-6)^2}(x^2-5x+9)=\frac{1}{2}$

33 $\log_{(x-1)^2}(4-4x+x^2)=2+\log_{(x-1)^2}(x+5)^2$

34 $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$

35 $\log_4\left[(x-1)^{\log_4(x-1)^2}\right]=2$

36 $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3)=6$

37 $x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6$

38 $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$

39 $\left|\log_2|x|\right|=2$

40 $\sqrt{3\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}$

GRUPO 12 INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

01 $4|x+2| < 2x+10$

02 $3|x-1| \leq x+3$

03 $2|x+1| > x+4$

04 $3|x+1| \geq x+5$

05 $|x-2| \leq 2x^2-9x+9$

06 $3x^2-|x-3| > 9x-2$

07 $x^2+4 \geq |3x+2|-7x$

08 $x^2-|5x-3|-x<2$

09 $|x+1|-|3x+7| > 0$

10 $|13-2x| \geq |4x-9|$

11 $|x|+|x-1| \leq 1$

12 $|x+2|-3 < |x-1|$

13 $\left|\dfrac{x^2-5x-4}{x^2-4}\right| < 1$

14 $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| > 1$

15 $\dfrac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1|$

16 $\dfrac{7}{|x-1|-3} > |x+2|$

17 $|x+2|+|x+1|+|x-1| > 10$

18 $|5-x| < |x-2|+|7-2x|$

19 $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1$

20 $\dfrac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} \leq 1$

GRUPO 13 ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Si $b \geq 0$, entonces: $|a| = b \iff a=b \vee a=-b$.

Resolver en $I\!R$:

01 $|x-3| = 2$

02 $|2x+1| = 1$

03 $|3x-1| = 3$

04 $|5x+2| = 8$

05 $|x-5| = 2$

06 $|x-3| = x$

07 $|2x+1| = 1-x$

08 $|x-5| = 2x-1$

09 $|x-5| = 5-x$

10 $|2x-1| = \frac{x}{2}$

11 $|x^2-x| = 2$

12 $|x^2-3x| = x$

13 $|3x^2-2|+5x=0$

14 $|x^2-4| = 4-x^2$

15 $\left|\dfrac{x^2-5}{x}\right| = 4$

16 $\left|\dfrac{x^2-5}{x}\right| = x$

17 $|x^2-4| = 2-x$

18 $|x^2-4| = 5$

19 $|x^2-x| = 6$

20 $|x^2-x| = 2x-2$

21 $|x^2-x| = -x+1$

22 $|x^2-x| = -x$

23 $\left|x-\dfrac{4}{x}\right| = -3x$

24 $|x^3-x| = -3x$

25 Resolver: $|x^2-bx| = ax$, si $a<0<b$ y $|a| > |b|$

Solución:

01) $\{5,1\}$ 02) $\{0,-1\}$ 03) $\left\{\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right\}$ 04) $\left\{\frac{6}{5},-2\right\}$ 05) $\{7,3\}$

06) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ 07) $\{0,-2\}$ 08) $\{2\}$ 09) $]-\infty,5]$ 10) $\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{5}\right\}$

11) $\{2,-1\}$ 12) $\{0,2,4\}$ 13) $\left\{-2,-\frac{1}{3}\right\}$ 14) $[-2,2]$ 15) $\{5,-1,-5,1\}$

16) $\left\{\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}$ 17) $\{-3,-1,2\}$ 18) $\{-3,3\}$ 19) $\{3,-2\}$ 20) $\{1,2\}$

21) $\{-1,1\}$ 22) $\{0\}$ 23) $\{-1\}$ 24) $\{0,-2\}$ 25) $\{b+a,0\}$

GRUPO 14 INECUACIÓN CON VALOR ABSOLUTO

Aplicando: a) Si $b>0$, entonces $|a|<b \iff -b<a<b$

b) Si $b\geq 0$, entonces $|a|\leq b \iff -b\leq a\leq b$

Resolver:

01 $|x-3|<3$ **02** $|x-3|\leq 3$ **03** $|2x-1|<2$ **04** $|2x-1|\leq 2$

05 $|5x-3|<7$ **06** $|5x-3|\leq 7$ **07** $|5x-3|<x$ **08** $|5x-3|\leq x$

09 $|x^2-4|<5$ **10** $|x^2-4|\leq 5$ **11** $|x^2-4|<x+2$ **12** $|x^2-4|\leq x+2$

13 $\left|\frac{x-1}{x}\right|<1$ **14** $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|\leq 2$ **15** $|3-8x|\leq 5$ **16** $|x^2-7|\leq 2$

17 $|x-3|<9-x^2$ **18** $|9-x^2|\leq x-3$ **19** $\left|\frac{x+13}{x+1}\right|\leq x+3$ **20** $|6x^2+x|<2$

21 $|5x^2-4|\leq -x$ **22** $\left|\frac{2x-1}{x-3}\right|\leq 2$ **23** $\left|\frac{5x-2}{x+2}\right|<3$ **24** $\left|\frac{x}{x-2}\right|\leq 1$

25 $\left|\frac{1}{x}\right|\leq x^2$

Solución:

01) $]0,6[$ 02) $[0,6]$ 03) $\left]-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$ 04) $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ 06) $\left]-\frac{4}{5},2\right[$

07) $\left]\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[$ 08) $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ 09) $]-3,3[$ 10) $[-3,3]$ 11) $]-2,-1[\cup]1,3[$

12) $[-2,-1]\cup[1,3]$ 13) $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ 14) $\left]-\infty,\frac{3}{4}\right[$ 15) $\left[-\frac{1}{4},1\right]$

16) $[-3,-\sqrt{5}]\cup[\sqrt{5},3]$ 17) $]-2,3[$ 18) $\{3\}$ 19) $[2,+\infty]$

20) $\left]-1,\frac{2}{3}\right[$ 21) $\left[-1,-\frac{4}{5}\right]$ 22) $\left[\frac{7}{4},3\right[$ 23) $]-2,4[$ 24) $]-\infty,1]$

25) $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

GRUPO 15 Aplicando: $|a| \geq b \iff a \geq b \vee a \leq -b$, resolver:

01 $\|x-2\| > 2$	**02** $\|x-2\| \geq 2$	**03** $\|2x-5\| \geq 1$	**04** $\|2x-5\| > 1$
05 $\|9-3x\| \geq 3$	**06** $\|9-3x\| > 3$	**07** $\|x^2-4\| > 5$	**08** $\|x^2-4\| \geq 5$
09 $\|x^2-4\| > x+2$	**10** $\|x^2-4\| \geq x+2$	**11** $\|x^2-7\| > 2$	**12** $\|x-3\| > 9-x^2$
13 $\|6x^2+x\| > 2$	**14** $1 < \|x+2\| < 3$	**15** $1 \leq \|x+2\| \leq 3$	**16** $3 \leq \|2x-3\| < 7$
17 $2 < \|3x+4\| \leq 7$	**18** $1 < \left\|\frac{1}{x}\right\| < 2$	**19** $1 \leq \left\|\frac{x-1}{x}\right\| \leq 2$	**20** $1 \leq \|x^2-3\| < 6$

Solución:

01) $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ **02)** $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$ **03)** $]-\infty,2] \cup [3,+\infty[$

04) $]-\infty,2[\cup]3,\infty[$ **05)** $]-\infty,2] \cup [4,+\infty[$ **06)** $]-\infty,2[\cup]4,+\infty[$

07) $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$ **08)** $]-\infty,-3] \cup [3,+\infty[$

09) $]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]3,+\infty[$ **10)** $]-\infty,1] \cup [3,+\infty[$

11) $]-\infty,-3[\cup]-\sqrt{5},\sqrt{5}[\cup]3,+\infty[$ **12)** $]-\infty,-4[\cup]-2,3[\cup]3,+\infty[$

13) $]-\infty,-1[\cup \left]\frac{2}{3},+\infty\right[$ **14)** $]-5,-3[\cup]-1,1[$ **15)** $[-5,-3] \cup [-1,1]$

16) $]-2,0] \cup [3,5[$ **17)** $\left[-\frac{11}{2},-2\right[\cup \left]-\frac{2}{3},1\right]$ **18)** $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},1\right[$.

19) $]-\infty,-1] \cup \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ **20)** $]-3,-2] \cup [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \cup [2,3[$

GRUPO 16 Aplicando: $|a| \leq |b| \iff a^2 \leq b^2 \iff (a-b)(a+b) \leq 0$.

Resolver:

01 $\|x-1\| < \|x\|$	**02** $\|x-1\| \leq \|x\|$	**03** $\|2x-1\| - \|x+1\| \leq 0$
04 $\|x-1\| - 2\|x+1\| < 0$	**05** $\|x^2-7\| \leq \|x^2-1\|$	**06** $\left\|\frac{1}{x^2}-1\right\| < \left\|\frac{1}{x}-x\right\|$
07 $\|x^2\| < \|3x+10\|$	**08** $\|x^2\| \leq \|6-5x\|$	**09** $\left\|\frac{x}{x-1}\right\| \leq \|x-1\|$
10 $\left\|\frac{x+1}{x-3}\right\| \geq \left\|\frac{x-1}{x+2}\right\|$	**11** $\|2x+3\| - \|x-1\| > 0$	**12** $\|2x+3\| - \|x-1\| \leq 0$

Aplicando restricciones, resolver:

13 $|x-2| \le \sqrt{x}$ **14** $\sqrt{2x-1} \ge |x-2|$ **15** $\sqrt{2x-4} \ge |x-2|$

16 $\sqrt{2x-1} \le |x-2|$ **17** $\sqrt{2x-4} < |x-2|$ **18** $|\sqrt{x-1}-2| \ge 2$

19 $|2\sqrt{x-1}-3| \le |\sqrt{x-1}-2|$ **20** Si $0<a<b$, resolver: $|a-x| < |2x-3b|$

Solución:

01) $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ **02)** $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ **03)** $[0,2]$ **04)** $\left]-\infty,-\frac{5}{3}\right[\cup \left]-\frac{3}{5},+\infty\right[$

05) $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$ **06)** $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

07) $]-2,5[$ **08)** $[-6,1] \cup [2,3]$ **09)** $\left]-\infty,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$; $x \ne 1$

10) $\left[\frac{1}{7},+\infty\right[$, $x \ne -2$, $x \ne 3$ **11)** $]-\infty,-4[\cup \left]-\frac{2}{3}.+\infty\right[$

12) $\left[-4,\frac{2}{3}\right]$ **13)** $[1,4]$ **14)** $[1,5]$ **15)** $[2,4]$

16) $\left[\frac{1}{2},1\right]$ **17)** $]4,+\infty[$ **18)** $\{1\}\cup[17,+\infty]$ **19)** $]1,2] \cup \left[\frac{34}{9},+\infty\right[$

20) $\left]\frac{a-b}{4},\frac{a+b}{6}\right[$

GRUPO 17 ECUACIONES CON DOS O MÁS VALORES ABSOLUTOS

Resolver en $I\!R$:

01 $5|x-1| - |x+2| = |x-3|$ **02** $3|x-2| - |x+1| - 1=0$

03 $|x^2-4| - 2|x-1|-3=0$ **04** $|x| - |x+2| + 2=0$

05 $|2x-1| -2|5x-2| = -5$ **06** $|x-2| -2|5x-2| +4|x+2| = 0$

07 $2|x-3| - |x+2| = -4$ **08** $3|x^2-1| - 3|x-2| + 3=0$

09 $|x-1| = 2|x+3| - 9$ **10** $|x^2-x-6| - |x-2| - 2=0$

11 $|x-1|^2 - |x-1| - 2=0$ **12** $|x+2|^2 - 8|x+2| + 15=0$

13 $2|3x-1|^2 + 5|3x-1| - 3=0$ **14** $12|2x-1|^2 - 23|2x-1| + 10=0$

15 $|x-2|^2 + 4|x-2| - 12=0$ **16** $|2^x-1| + 2^{|x+1|} - 5 = 0$, $x>-1$

17 $|2x-1| = \frac{12}{|3x-2|}$ **18** $|x^2-1| = |x+1| + 2$

19 $2|x| - 5|x+3| = -21$ **20** $|x||x^2-3| = 2$

Solución:

01) $\{0,2\}$ 02) $\{1,4\}$ 03) $\{1\}$ 04) $[0,+\infty[$ 05) $\left\{-\frac{1}{4},1\right\}$

06) $\{2\}$ 07) $\left\{\frac{8}{3},6\right\}$ 08) $\{1,0,-2\}$ 09) $\{-16,2\}$ 10) $\{\sqrt{6},1+\sqrt{7}\}$

11) $\{3,-1\}$ 12) $\{-7,-5,1,3\}$ 13) $\left\{\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right\}$ 14) $\left\{-\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{9}{8}\right\}$

15) $\{0,4\}$ 16) $\{1\}$ 17) $\{2\}$ 18) $\{-2\}$ 19) $\{2\}$

20) $\{1,-1\}$

GRUPO 18 INECUACIONES CON DOS O MÁS VALORES ABSOLUTOS

Resolver en $I\!R$.

01 $5|x-1| - |x+2| \le |x-3|$ **02** $3|x-2| - |x+1| > 1$ **03** $|x^2-4| \le 2|x-1| + 3$

04 $|x-1| > 2|x+3| - 9$ **05** $|x-1| \le \frac{1}{|x|}$ **06** $|x-1| \le \frac{1}{|x|-1}$

07 $\frac{|x|-2}{2} \le 1-x$ **08** $\frac{|x-2|+|x+1|}{x-2} \le 3$ **09** $\frac{|x|-2}{4-|x|} \ge \frac{3-|x|}{|x|+2}$

10 $\frac{|5-x|+|2x-3|}{|x-1|-2} \le 5$ **11** $3 < \frac{|x-1|-|x|}{2} \le 5$ **12** $\left|\frac{x-1}{x}\right| \ge |x-2|$

13 $\frac{|x|-|3x-1|}{x(x-2)} \ge 0$ **14** $\frac{|x|-|4-x|}{|x|-1} < 0$ **15** $x^2 - |x| - |x-1| > 0$

16 $\frac{|x^2-4|}{x} \le |x+1|$ **17** $\frac{x^2-3x-|x-1|}{|x|-1} > 5$ **18** $\frac{1}{|x-2|-3} < |x|$

19 $\frac{|x-5|}{5-|x|} < 2$ **20** $\frac{|x-1|-1}{x} < 3$ **21** $\frac{2}{|x|-1} < 3$

22 $\big||x-1| - 2\big| - |x-1| < 0$ **23** $\frac{|x-2|}{x-1} < 1$ **24** $\frac{|x-1|-1}{x} \ge 2$

25 $\big||x| - 1\big| - x - 1 \ge 0$ **26** $\frac{|x+2|-x}{x} \ge 1$ **27** $\frac{x}{|x-1|-1} \le 2$

28 $\big||x+2| - 2\big| - |x+2| \le 0$ **29** $\frac{|2x-1|-x}{x} \le 0$ **30** $\frac{|2x-1|-1}{x-1} > 2$

GRUPO 19 Aplicar el Teorema T_5

$$\sqrt{a} \geq b \iff [a \geq 0, \text{si } b < 0] \vee [a \geq b^2, si\, b \geq 0]$$

01 $\sqrt{4-x^2} \geq x-3$

02 $\sqrt{\dfrac{1-|x-3|}{x-1}} > x-8$

03 $\sqrt{\dfrac{x^3-25x}{49-x^2}} > 2x-x^2-1$

04 $\sqrt{4-|x-4|} > |x-2|$

05 $\sqrt{6+x-x^2} > x$

06 $\sqrt{(x-5)(x+2)} + |x+2| \geq 0$

07 $\sqrt{\dfrac{x+3}{5-x}} \geq \dfrac{1}{x}$

08 $\sqrt{\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}} \geq 8x-16-x^2$

09 $\sqrt{4-|x-2|} + |x-5| \geq 0$

10 $\sqrt{7+x} \geq 2x-1$

Respuestas:

01) $[-2,2]$

02) $[2,4]$

03) $]-\infty,-7] \cup [-5,0] \cup [5,7]$

04) $]-1,4[- \{1\}$

05) $[-2,2[$

06) $[-2,5]$

07) $[-3,0[\cup [1,5[$

08) $[-2,0[$

09) $[-2,6]$

10) $\left[-7,\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{3}{4},2\right]$

AXIOMA DEL SUPREMO

1. INTRODUCCIÓN

Entre los axiomas que sustentan la definición axiomática de los números reales, el axioma del supremo es, quizá, el que nos exige un mayor y disciplinado esfuerzo de abstracción para su correcta comprensión y entendimiento.

Antes de entrar, al enunciado del axioma del supremo, daré algunos ejemplos muy ilustrativos que nos conlleve, más adelante, a las definiciones de: cota inferior, cota superior, conjunto acotado inferiormente, conjunto acotado superiormente, conjunto acotado, supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

EJEMPLO 1 El conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 2 < x < 8\}$

$= \{3,4,5,6,7\}$ es un subconjunto de los números reales

En este conjunto podemos observar las siguientes propiedades:

(P$_1$) "Todos los elementos de A son menores o iguales a los números reales: 7,8,9, ...
Es decir, existen números reales k, tales que, todos los elementos de A son menores o iguales que k.

Este enunciado se denota así : "$\exists\, k \in \mathbb{R}:\ x \leq k\ ,\ \forall\, x \in A$"

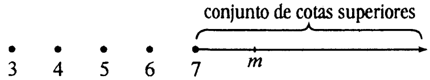
Por ejemplo,

si	$k = 7$	se cumple:	$x \leq 7$,	$\forall\ x \in A$
si	$k = 7.2$	se cumple:	$y \leq 7.2$,	$\forall\ y \in A$
si	$k = 8$	se cumple:	$z \leq 8$,	$\forall\ z \in A$
si	$k = 10$	se cumple:	$m \leq 10$,	$\forall\ m \in A$
	$\vdots$			
	etc.			

(P$_2$) "Los números reales $k = 7$ y los mayores que siete, se llaman **COTAS SUPERIORES**" del conjunto A.

(P₃) "7 es la menor de las cotas superiores" $\equiv \begin{cases} i)\ x \leq 7\ ,\ \forall\, x \in A \\ ii)\ \text{Si }\ x \leq m\ ,\ \forall\, x \in A \\ \quad\ \text{entonces }\ 7 \leq m \end{cases}$

ver la siguiente ilustración gráfica:



(P_4) "Porque el conjunto A goza de la propiedad P_1, decimos que "A es un conjunto acotado superiormente".

(P_5) " 7 es el supremo del conjunto A "
NOTACIÓN: Sup $A = 7$

(P_6) "$7 \in A$ "

EJEMPLO 2 En el conjunto $B = \{x \in I\!N \ / \ x > 2\}$
$= \{3,4,5,6,7,\ldots\}$

Podemos apreciar las siguientes propiedades:

P_1) B es un conjunto infinito discreto de números naturales cuyo primer elemento es 3.
P_2) El conjunto B no está acotado superiormente, porque no es posible encontrar un número real k que cumpla la propiedad $x \leq K \ , \ \forall \ x \in B$

EJEMPLO 3 El conjunto $C = \left\{ x_n = 2 - \frac{1}{n} \Big/ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$
$= \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots \to 2 \right\}$

Significa que los números reales $2 - \frac{1}{n}$ tienden en acercarse a 2, cuando n es cada vez más grande ($n \to +\infty$)

goza de las siguientes propiedades:

P_1) El conjunto C es una sucesión de números reales.
P_2) C es un conjunto infinito numerable.
P_3) Los términos del conjunto C tienen la propiedad:
$1 < \frac{3}{2} < \frac{5}{3} < \frac{7}{4} < \ldots\ldots\ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots\ldots\ldots$
En este caso se dice que C es una sucesión creciente.
P_4) $\forall\, x_n \in C$ es posible encontrar un número real k, tal que cumpla la propiedad:
$x_n \leq k \ , \ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

¿Qué números reales k, satisfacen la propiedad $x_n \leq k \ , \ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$?

Para empezar, intuyamos cómo son los elementos de C para "n" cada vez más grande:

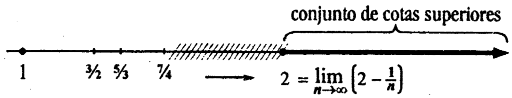
Los números $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ se acercan a 2 cuando n es muy grande

Por ejemplo: si $n = 100 \Rightarrow x_{100} = 2 - \frac{1}{100} \leq 2$

si $n = 3000 \Rightarrow x_{3000} = 2 - \frac{1}{3000} \leq 2$

$\vdots$

Si representamos en la recta real, tendremos:



Las cotas superiores son 2 y los números reales mayores que 2.

Luego: $2 - \frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

$2 - \frac{1}{n} \leq 2.1 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

$2 - \frac{1}{n} \leq 2.5 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

$\vdots$

La menor de las cotas superiores es 2, por tanto $2 = \sup C$

Es decir: $2 = \sup C \iff \begin{cases} i)\ 2 - \frac{1}{n} \leq 2 & , \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \\ ii)\ \text{Si } 2 - \frac{1}{n} \leq m & , \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \text{, entonces } 2 \leq m \end{cases}$

sup C

P$_5$) sup $C = 2$ y 2 no es elemento de C

Dos conceptos muy importantes se desprenden del ejemplo 3

1) El concepto de límite, pues

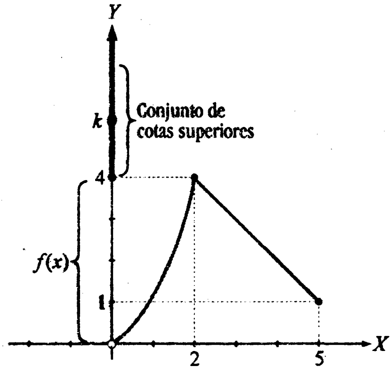
$\underbrace{\text{cuando } n \text{ es muy grande los elementos } 2 - \tfrac{1}{n} \text{ se acercan a 2.}}_{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2}$

2) 2 no es un elemento del conjunto C, sin embargo es el SUPREMO de C.

EJEMPLO 4 Sea la función $f:\langle 0,5] \longrightarrow \langle 0,4]$ definido por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad 0<x<2 \\ 6-x & , \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$$

cuyo gráfico es:



En la función f, podemos notar que:

1) El intervalo $[4,+\infty\rangle$ contenido en el eje Y, es el conjunto de las cotas superiores de la función.

2) La menor de las cotas superiores es $f(2)=4$, luego:

$f(2)=4=\sup f(x)$

Por tanto: $\quad 4=\sup f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} i) \ f(x)\le 4 \ , \ \forall\, x\in\langle 0,5] \\ ii) \ \text{Si } f(x)\le K \ , \forall\, x\in\langle 0,5] \ , \ \text{entonces } \ 4\le K \end{cases}$

3) El supremo pertenece al rango de la función. (Rango $f=\langle 0,4]$)

EJEMPLO 5 a) En el intervalo abierto $\quad A=\,]a,b[\quad , \quad b=\sup A$

b) En el intervalo $\quad B=\,]-\infty,c[\quad , \quad c=\sup B$

Los 5 diversos ejemplos que acabamos de ver, nos pueden servir para tener una idea aproximada de lo que es Supremo de un conjunto.

Antes de enunciar el AXIOMA DEL SUPREMO, daremos a continuación ciertos conceptos básicos.

2. CONJUNTO ACOTADO SUPERIORMENTE

Definición.- Un conjunto $A \subset I\!R$ es **ACOTADO SUPERIORMENTE**, si y sólo si, existe un número real k, tal que $\boxed{a \leq k \quad , \ \forall\, a \in A}$

└ se llama COTA SUPERIOR de A

Esta definición nos dice: que todos los elementos "a" del conjunto A son menores o igual que algún número real k (COTA SUPERIOR).

Ejemplos:

a) En el conjunto $A = \{5,6,7,8\} \subset I\!R$, **COTAS SUPERIORES** son: el número 8 y todos los números reales mayores que 8, porque se cumple:

$$\begin{array}{l} a \leq \ 8 \quad , \quad \forall\ a \in A \\ a \leq \ 8.1 \ , \quad \forall\ a \in A \\ \quad\ \ \vdots \\ \quad\ \ \text{etc.} \end{array}$$

Por tanto, el conjunto A es acotado superiormente.

b) En el conjunto $B = \{5,6,7,8,9,\ldots\ldots\}$ no existen cotas superiores porque no existe algún número real k, tal que $b \leq k \ , \ \forall\, b \in B$.
Luego, el conjunto B no es acotado superiormente.

c) El conjunto $C = \{2^n \,/\, n \in I\!N\}$ no es acotado superiormente.
$= \{1,2,4,8,\ldots\}$

d) El conjunto $D = \{2^{-n} \,/\, n \in I\!N\}$ si es acotado superiormente.
$= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$

Pues, los números reales: 1 , 1.1 , 2 , ... etc. son cotas superiores; porque:

$$2^{-n} = \frac{1}{2^n} \leq 1 \quad , \quad \forall\, n \in I\!N$$

$$\frac{1}{2^n} \leq 1.1 \ , \quad \forall\, n \in I\!N$$

$$\frac{1}{2^n} \leq 2 \quad , \quad \forall\, n \in I\!N$$

e) El conjunto $E = \{x \in I\!R \,/ -2 < x < 5\}$, es acotado superiormente porque existen infinitas cotas superiores, que son $k = 5$ y todos los números reales mayores que 5.

f) El conjunto $F = \{ x \in I\!R \,/\, x > 3 \}$, no es acotado superiormente.

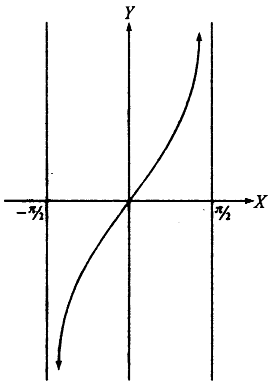
g) La función $f(x) = tg\, x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ no es acotado superiormente (ver gráfico).

h) La función $g(x) = 1 - 2x$, $x \in I\!R$ no es acotado superiormente.

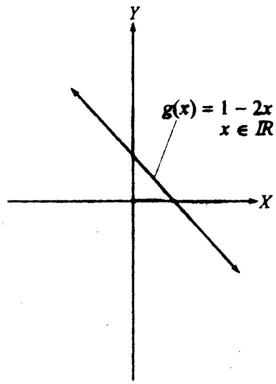
i) La función $h(x) = 1 - 2x$, $x \in \,]-2, +\infty[$ es acotado superiormente

$$\text{y } \operatorname{Sup} h(x) = 5 \iff \begin{cases} i) \; h(x) \le 5 \;,\; \forall\, x \in \,]-2,+\infty[\\ ii) \; \text{Si } h(x) \le K \,,\, \forall\, x \in \,]-2,+\infty[\;,\; \text{entonces } 5 \le K \end{cases}$$

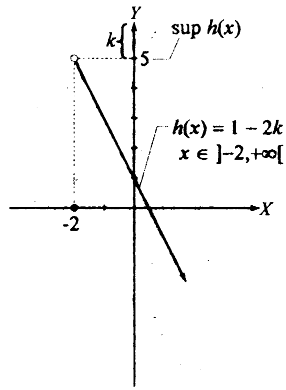
Ver gráficos de f, g, h.



$f(x) = tg\, x$



$g(x) = 1 - 2x$, $x \in I\!R$



$h(x) = 1.2x$, $x > -2$

$h(x) \le 5$, $\forall\, x \in \,]-2, \infty[$

3. CONJUNTO ACOTADO INFERIORMENTE

Definición.- Un conjunto $A \subset I\!R$ es **ACOTADO INFERIORMENTE**, si, y sólo si existe un número real m , tal que $\boxed{m \le a \;,\; \forall\, a \in A}$

se llama cota inferior de A

EJEMPLOS:

(1) En el conjunto $A = \{3, 4, 5, 6\}$ se cumplen las siguientes propiedades:

P_1) El número 3 es menor o igual que todos los elementos del conjunto A.
Simbolizando: $3 \le a$, $\forall\, a \in A$

En cambio 4 no es menor que todos los elementos del conjunto A, por lo tanto 4 no es cota inferior de A.

Simbolizando: " $4 \leq a, \forall\, a \in A$ " es una proposición **FALSA**.

Pero hay infinitos números reales m que cumplen la propiedad:
$m \leq a\ ,\ \forall\, a \in A$. Algunos de ellos son: 2.9 , 2.5 , 2 , ... etc.

Es decir:
$$\left.\begin{array}{rcl} 3 \leq a & , & \forall\, a \in A \\ 2.9 \leq x & , & \forall\, x \in A \\ 2.6 \leq y & , & \forall\, y \in A \\ 2 \leq z & , & \forall\, z \in A \\ \vdots & & \\ \text{etc.} & & \end{array}\right\} \text{Son proposiciones verdaderas}$$

P_2) **Los** números reales: $3, 2.9, 2.5, 2, \ldots\ldots$ etc. se llaman COTAS INFERIORES del conjunto A.

P_3) Porque el conjunto A tiene cotas inferiores, decimos que A es **ACOTADO INFERIORMENTE**.

P_4) La mayor de las cotas inferiores es 3, luego 3 es el ínfimo del conjunto A.
Notación: $\inf A = 3$

P_5) 3 es el ínfimo de A porque cumple dos condiciones $\left\{\begin{array}{l} i)\ 3 \leq a, \forall\, a \in A \\ ii)\ 3 \text{ es la mayor de las cotas inferiores} \end{array}\right.$

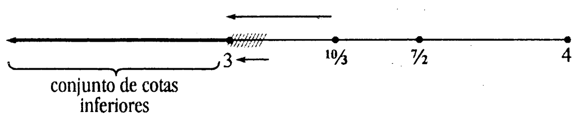
P_6) En este ejemplo, el ínfimo pertenece al conjunto A $\quad (3 \in A)$.

(2) En el conjunto $B = \left\{ x_n = 3 + \frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

$= \left\{ 4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \ldots \right\}$ notamos las siguientes propiedades:

P_1) $4 > \frac{7}{2} > \frac{10}{3} > \ldots\ldots > \ldots\ldots$

esta relación indica que los términos de las sucesión (que son elementos de B), son decrecientes. Pues, cada vez que "n" crece los términos $3 + \frac{1}{n}$ van decreciendo.



P_2) Cuando "n" se hace cada vez más grande ($n \to +\infty$), los términos $3+\frac{1}{n}$ se acercan al número 3, porque $\frac{1}{n}$ se acerca a cero.

Pues: $4 > \frac{7}{2} > \frac{10}{3} > \frac{13}{4} > \ldots\ldots > 3+\frac{1}{10^3} > 3+\frac{1}{10^4} > \ldots\ldots\ldots > \underbrace{3}_{\text{es el límite.}}$

P_3) Las cotas inferiores de B son: 3 y los menores que 3; por lo tanto el conjunto B es acotado inferiormente.

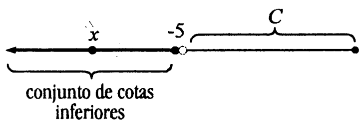
P_4) El número 3 cumple las siguientes condiciones: $\begin{cases} 3 \le 3+\frac{1}{n}\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \\ 3 \text{ es la mayor de las cotas inferiores} \end{cases}$

por lo tanto, 3 es el ínfimo de B.

NOTACIÓN: $3 = \text{ínf } B$.

P_5) En este caso, el ínfimo no pertenece al conjunto B, es decir $3 \notin B$.

(3) En el conjunto $C = \{\, x \in I\!R \,/\, x > -5 \,\}$
cuya representación geométrica, es la semirrecta:



se tiene que: $-5 = \inf C$ porque $\begin{cases} i)\ -5 < x\ ,\ \forall\, x \in C \\ ii)\ -5 \text{ es la mayor de las cotas inferiores} \end{cases}$

En este caso: $-5 \notin C$.

4. CONJUNTO ACOTADO

Definición: Un conjunto $A \subset I\!R$ es **ACOTADO**, si y sólo si, es acotado superior e inferiormente.

Dicho de otra forma:

Un conjunto $A \subset I\!R$ es acotado, si, existen números reales m y k tales que:

$$\boxed{m \le a \le k\ ,\ \forall\, a \in A}$$

<u>Consecuencia</u>:
Dado $A \subset I\!R$, A es acotado, si $\exists\, M > 0 \,/\, |\,a\,| \le M\ ,\forall\, a \in A$

EJEMPLOS:

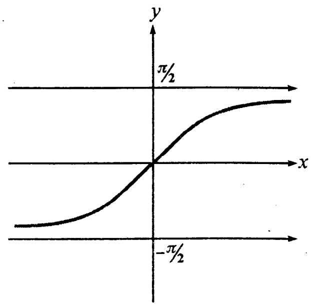
1. El conjunto $B=\{-3,-2,1,0,2\}$ es **ACOTADO**, porque existen los números reales $m=-3$ y $K=2$, tales que: $-3\leq a\leq 2$, $\forall\, a\in A$

2. El conjunto $B=\left\{Y_n=\frac{1}{2^n}\ /\ n\in I\!N\right\}$

$$=\left\{1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{8},\ldots\ldots\to 0\right\}$$

es acotado, porque existen los números reales $m=1\in B$ y $k=0\notin B$, tales que, $0<\frac{1}{2^n}\leq 1$, $\forall\, n\in I\!N$.

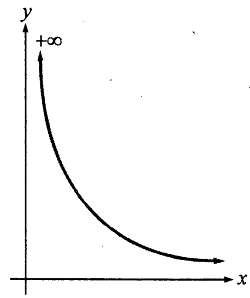
3. La función $f(x)=arctg\ x$, $x\in I\!R$ es acotado, porque: $-\frac{\pi}{2}<arctg\ x<\frac{\pi}{2}$, $\forall\, x\in I\!R$. Ver gráfico:



La función $arctg\ x$, es acotado porque es acotado superior e inferiormente.

4. La función $g(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$ no es acotado.

Ver gráfico:



La función: $\frac{1}{x}$ no es acotado, porque no existe cota superior alguna.

Por tanto, no tiene supremo, pero sí tiene ínfimo, que es "0".

Los conceptos de: conjunto acotado superiormente, acotado inferiormente y acotado; son de gran importancia en las matemáticas y desde ahora el estudiante debe tener en cuenta estas definiciones para no encontrarse con dificultades conceptuales.

El estudiante se planteará la interrogante ¿para qué sirven estos conceptos y en qué se aplican?

La respuesta no será inmediata, pero puedo asegurarles que en tanto el estudiante va avanzando su carrera profesional irá encontrando la respuesta que buscaba.

Algunas aplicaciones son:

1. El límite de una sucesión, que viene a ser el supremo o el ínfimo de la sucesión.
2. Si $y = b$ es asíntota horizontal de una función real de variable real, entonces "b" es el supremo o el ínfimo de una función.

   En el ejemplo 3 las asíntotas horizontales son $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$.

   Aquí: $\frac{\pi}{2}$ el supremo de $f(x) = arctgx$ y $-\frac{\pi}{2}$ es el ínfimo.

   En el ejemplo 4, la asíntota horizontal $y = 0$. Aquí $0 = \inf\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Para hallar el área de un plano (triángulo, cuadrado, círculo, etc.) se aplica el concepto de supremo.
4. En PROGRAMACIÓN LINEAL, se aplica el concepto de conjunto acotado para poder hallar la máxima utilidad, la máxima ganancia, el mínimo costo, etc.

SUPREMO DE UN CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

5. Definición:

Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, se dice que el número real "s" es el supremo de A sí, y sólo si "s" es la menor de las COTAS SUPERIORES.

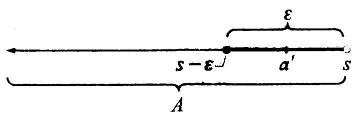
Es decir:

$$s = \sup A \iff \begin{cases} 1) & a \leq s \ , \ \forall a \in A \\ 2) & \underbrace{\text{Si } a \leq k \ , \ \forall a \in A \ , \text{ entonces } s \leq k} \end{cases}$$

indica: si k es otra cota superior de A, entonces s es la "<u>menor</u>" de las cotas superiores.

La condición 2) es equivalente a la siguiente proposición:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists a' \in A \,/\, s - \varepsilon < a' \quad \text{o} \quad s < \varepsilon + a'$$



ACLAREMOS LA CONDICIÓN 2:

1° ε (épsilon) representa un número real positivo muy pequeño que se toma como si fuera el radio de una circunferencia de centro en "s". El intervalo abierto $]s - \varepsilon \, , s + \varepsilon[$ es llamado vecindad de s de radio ε y centro en s.

2º Lo que se trata de hallar es algún elemento a' perteneciente al conjunto A, tal que $s-\varepsilon<a'$, $\forall\,\varepsilon>0$.

3º La verificación de que "s" es el supremo de un conjunto A, no es muy sencillo que digamos, porque el tamaño de ε y la forma peculiar de a', debe construirse de una forma especial que nos permita afirmar que la relación

$$\boxed{s-\varepsilon<a' \text{ se cumpla para algún } a'\in A \text{ y } \forall\,\varepsilon>0}$$

6. AXIOMA DEL SUPREMO

Si A es un subconjunto de $I\!R$ diferente del vacío y acotado superiormente, entonces A tiene supremo.

Ejemplos Aclaratorios:

EJEMPLO 1 Dado el conjunto $A=\{2,3,4,5,6\}$
Demostrar que A tiene supremo (hallarlo y demostrarlo)

Solución:

El conjunto A es un subconjunto de $I\!R$ y es diferente del vacío y está acotado superiormente.

Decimos que A es acotado superiormente porque existen infinidad de números reales k, tal que $a\le k$, $\forall\,a\in A$.

Son cotas superiores: 6 y los mayores que 6.

Como 6 es la menor de las cotas superiores afirmamos que $6=\sup A$.

Probar que $6=\sup A$.

Prueba

1) La 1^{ra} condición se cumple:

Pues: $a\le 6$, $\forall\,a\in A$.

esta relación nos indica que 6 es cota superior de A

2) La 2^{da} condición nos indica que:

"$\forall\,\varepsilon>0$, es posible encontrar un elemento $a'\in A$, tal que; $6-\varepsilon<a'$ " .... (2*)

esta relación nos obliga a encontrar por lo menos un elemento del conjunto A que haga verdadera la desigualdad (2*) para todo ε positivo.

> **OJO:** Nos obliga que (2*) se cumpla para todo $\varepsilon > 0$. No nos dice que $\varepsilon > 1$ o $\varepsilon > 2$. Esto es, que "ε" es un número real positivo muy pequeño.

¿Qué valor tendrá a' para que sea verdadero la proposición:

$$\text{“} \forall\, \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, a' \in A \,/\, 6 - \varepsilon < a' \text{”} \;?$$

Bastará tomar $a' = 6 \in A$ y notaremos que la proposición:

"$\forall\, \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, a' = 6 \in A \,/\, \underbrace{6 - \varepsilon < 6}_{\underbrace{-\varepsilon < 0}_{\varepsilon > 0}}$" es verdadero.

Es decir, hemos encontrado por lo menos, un elemento $a' = 6 \in A$, tal que cumple: $6 - \varepsilon < a'$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Por ejemplo:

si $\varepsilon = 0.001$, notamos que $6 - 0.001 < a'$ es verdadero para $a' = 6 \in A$

si $\varepsilon = 0.5$, entonces $6 - 0.5 < a'$ es verdadero para $a' = 6 \in A$

Para conjuntos similares al EJEMPLO 1, la proposición:

"$\forall\, \varepsilon > 0 : 6 - \varepsilon < a'$" es verdadero cuando se elige $a' = 6 = \sup A$ para ε suficientemente pequeño.

EJEMPLO 2 **(Supremo en un intervalo abierto o cerrado)**

Sea el intervalo abierto $B = \langle a, b \rangle$, $a < b$, $a \in I\!R$, $b \in I\!R$

Probar que b es el supremo de B.

Prueba:

1) La primera condición de supremo, se cumple. Pues: $x \leq b$, $\forall\, x \in B$

2) La segunda condición es:

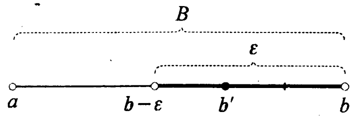
$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, b' \in B$ tal que $\boxed{b - \varepsilon < b'}$ —— (2*)

Ahora, el problema es construir la forma de ε y la forma de b' para que la relación (2*) sea verdadero $\forall\, \varepsilon > 0$ y para algún $b' \in B$.

Veamos:

CASO 1 Consideremos: $0 < \varepsilon < \underbrace{|b-a|}_{\text{longitud del intervalo } \langle a,b \rangle}$

y elegimos $b' = \underbrace{\dfrac{(b-\varepsilon)+b}{2}}_{\text{punto medio del intervalo } \langle b-\varepsilon, b\rangle} = \dfrac{2b-\varepsilon}{2} = b - \frac{\varepsilon}{2} \in B$



Con esta elección se tendrá que la proposición:

$$\boxed{\begin{array}{l} b-\varepsilon < \underbrace{b-\frac{\varepsilon}{2}}_{b'} \ , \ \forall\ \varepsilon \text{ tal que } 0<\varepsilon<b-a \ , \ b' \in B \\ \quad 2>1 \end{array}}$$ es VERDADERO

Dicho de otra manera:

La desigualdad: $b-\varepsilon < b'$ se cumple siempre que $0<\varepsilon<|b-a|$ y $b' = b-\frac{\varepsilon}{2}$ donde $b' \in B$.

En el intervalo $\langle b-\varepsilon \ , \ b\rangle$ habrán infinidad de elementos $b' \in B$.

CASO 2 Consideremos: $\varepsilon > \underbrace{|b-a|}_{\text{longitud del intervalo } \langle a,b \rangle}$

Con esta elección, se tiene que la proposición:

$\boxed{b-\varepsilon < b' \ , \ \forall\ b' \in \langle a,b\rangle \ , \ \forall\ \varepsilon > |b-a|}$ es verdadero.

Lo cual confirma la 2^{da} condición de la definición de supremo.

EJEMPLO PARTICULAR:

Sea el intervalo abierto $B = \langle 2,5 \rangle$

Probemos que $5 = \sup B$

1ª CONDICIÓN $\underbrace{x \le 5 \ , \ \forall\ x \in B}_{\text{esta proposición es verdadera, e indica que 5 es cota superior } B.}$

2ª CONDICIÓN

CASO 1 Considerar: $0 < \varepsilon < |5-2| = 3$ y elegir $b' = \frac{5-\varepsilon+5}{2} = 5 - \frac{\varepsilon}{2}$

Con esta elección se tiene que la desigualdad

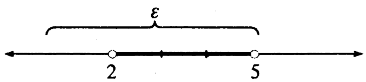
$$\boxed{5-\varepsilon < b' \text{ es verdadero, si } 0<\varepsilon<3 \text{ y } b' = 5-\tfrac{\varepsilon}{2}\ ,\ b' \in B}$$

Lo cual confirma la validez de la 2^{da} condición de la definición de supremo.

CASO 2 Si escogemos $\varepsilon > |5-2| = 3$, la proposición:

$$\boxed{5-\varepsilon < b'\ ,\ \forall\, \varepsilon > 3 \text{ y } \forall\, b' \in \langle 2,5\rangle \text{ es verdadero}}$$

Dicho de otra manera: La proposición $5-\varepsilon < b'$, $\forall\, \varepsilon > 3$ es verdadero $\forall\, b' \in \langle 2,5 \rangle$.



Comprobemos para algunos valores particulares de ε, siendo $\varepsilon > 3$:

Como $\varepsilon > 3$, podemos escoger $\varepsilon = 3.1$ y así tendremos que la proposición $\underbrace{5-3.1}_{1.9} < b'$, $\forall\, b' \in \langle 2,5 \rangle$ que es verdadero.

EJEMPLO 3 Sea el conjunto $C = \{-5, -4, -2, -1\}$

Probar que -1 es el supremo de C.

Prueba :

$$-1 = \sup C \iff \begin{cases} i) & x \le -1\ ,\ \forall\, x \in C \\ ii) & \boxed{\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, c' = -1 \in C / -1-\varepsilon < -1} \end{cases}$$

es una proposición verdadera

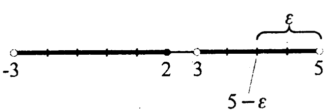
EJEMPLO 4 Dado los intervalos $A = \langle -3, 2]$ y $B = \langle 3, 5 \rangle$

Demostrar que $A \cup B$ tiene supremo (hallarlo y demostrarlo).

Solución:

1) Se tiene $A \cup B = \langle -3, 2] \cup \langle 3, 5 \rangle$

2) El supremo de $A \cup B$ es 5.



Comprobación:

1ª CONDICIÓN $\boxed{x \le 5 \ , \ \forall\, x \in A \cup B}$ es V , $V =$ verdadero

2ª CONDICIÓN $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, x' \in A \cup B \,/\, 5 - \varepsilon < x'}$ — P

El problema consiste en construir ε y escoger x' de formas especiales, que nos permite afirmar que la proposición P sea verdadero.

CASO 1 Escoger: $0 < \varepsilon < |5-3| = 2$ y $x' = \frac{5-\varepsilon+5}{2} = 5 - \frac{\varepsilon}{2}$

Luego: $\boxed{\forall\, 0 < \varepsilon < 2 \ , \ x' = 5 - \frac{\varepsilon}{2} \in A \cup B \,/\, 5 - \varepsilon < x'}$ es V

NOTA: La proposición $x' \in A \cup B \Rightarrow x' \in A \quad \vee \quad x' \in B$

Bastará que $x' \in A$ para afirmar que $x' \in (A \cup B)$.

CASO 2 Escoger: $\varepsilon > |5-3| = 2$

Luego: $\boxed{\forall\, \varepsilon > 2 \,/\, 5 - \varepsilon < x' \ \text{ es verdadero } \ \forall\, x' \in A}$

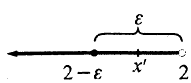
NOTA: Bastará que $x' \in A$ para afirmar que $x' \in (A \cup B)$.

EJEMPLO 5 Sea: $D = \{x \in IR \,/\, x < 2\}$

Probar que 2 es el supremo del conjunto D.

Prueba:

$$2 = \sup D \iff \begin{cases} i)\ x \le 2 \ , \ \forall\, x \in D \\ ii)\ \forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, x' \in D \,/\, 2 - \varepsilon < x' \end{cases}$$



$x' = 2 - \frac{\varepsilon}{2}$

En la segunda condición bastará escoger $x' = \frac{2-\varepsilon+2}{2} = 2 - \frac{\varepsilon}{2}$ para afirmar que la proposición: $2 - \varepsilon < x'$ es verdadero $\forall\, \varepsilon > 0 \ \wedge \ 2 - \frac{\varepsilon}{2} = x' \in D$.

Veamos: $2 - \varepsilon < 2 - \frac{\varepsilon}{2} \iff -\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2} \iff \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \iff 2\varepsilon > \varepsilon \iff 2 > 1$

6.1 SUPREMO EN SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Para demostrar que $s = \lim_{n \to +\infty} x_n$ es el supremo de la sucesión de números reales $(x_n)_{n \geq 1}$, se aplica la **PROPIEDAD ARQUIMEDIANA.**

> **TEOREMA** (PROPIEDAD ARQUIMEDIANA)
>
> Si $a \in I\!R^+ \wedge b \in I\!R^+$, entonces $\exists\, n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $\boxed{b < na}$

> **COROLARIO** $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n \in I\!N \,/\, \frac{1}{n} < \varepsilon$
>
> "**Para todo número real positivo** ε, **existe un** $n \in I\!N$, tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$"

Este **corolario, se** obtiene **cuando** en la **propiedad** Arquimediana se hace: $b = 1$ y $a = \varepsilon$.

Ejemplos relativos a la propiedad Arquimediana:

1) Si $b = \frac{2}{3}$ y $a = \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n \in I\!N \,/\, \frac{2}{3} < n\varepsilon \iff \frac{2}{3n} < \varepsilon$

2) Si $b = 3$ y $a = \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n' = (2n+1) \in I\!N \,/\, 3 < \varepsilon(2n+1) \iff \frac{3}{2n+1} < \varepsilon$

   En este caso, si $\varepsilon = \frac{1}{10} \Rightarrow n > 14.5$

EJEMPLO 6 Sea $S = \left\{ 2 - \frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

Demostrar que: $2 = \sup S$.

Demostración:

1ª CONDICIÓN $2 - \frac{1}{n} \leq 2$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

2ª CONDICIÓN (P) $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, s' \in S \,/\, 2 - \varepsilon < s'}$

¿Qué hacer **para** que se cumpla la 2da. condición?

Aquí se **presentan** dos **problemas:**

1) ¿**Que forma** tendrá s'?

2) ¿**Cómo hacer** que la **desigualdad** $2 - \varepsilon < s'$ se cumpla para $s' \in S$ y $\forall\, \varepsilon > 0$?

En primer lugar, si $s' \in S$, entonces s' tendrá la forma $s' = 2 - \frac{1}{n'}$ siendo $n' \in \mathbb{Z}^+$.

En segundo lugar, la desigualdad $2 - \varepsilon < s'$ se convierte en:

$\boxed{2 - \varepsilon < 2 - \frac{1}{n'}}$ — q , puesto que $s' = 2 - \frac{1}{n'}$

Ahora, surge la interrogante ¿cómo garantizar que la proposición q es verdadero $\forall\ \varepsilon > 0$?

Esto se logra sólo cuando se aplica la propiedad Arquimediana.

Para ello, tomamos como referencia lo que se tiene en q:

$2 - \varepsilon < 2 - \frac{1}{n'}$ que es equivalente a: $\boxed{\varepsilon > \frac{1}{n'}}$

A partir de $\boxed{\frac{1}{n'} < \varepsilon}$ deducir la proposición q.

Veamos:

a) En la propiedad Arquimediana: Si $a \in I\!R^+ \ \wedge \ b \in I\!R^+ \ \Rightarrow \ \exists\, n \in \mathbb{Z}^+ \,/\, b < na$

hacer $b = 1$ y $a = \varepsilon$, entonces $\exists\, n' \in \mathbb{Z}^+ \,/\, \frac{1}{n'} < \varepsilon$

b) A partir de $\frac{1}{n'} < \varepsilon$ formar la desigualdad $2 - \varepsilon < s'$

Empecemos: $\frac{1}{n'} < \varepsilon$ según propiedad Arquimediana.

Multiplicar por -1: $-\frac{1}{n'} > -\varepsilon$

Sumar 2: $2 - \frac{1}{n'} > 2 - \varepsilon \iff 2 - \varepsilon < \underbrace{2 - \frac{1}{n'}}_{s'}$

c) Donde $s' = 2 - \frac{1}{n'}$, es un elemento de S.

Por tanto: $\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, s' = \left(2 - \frac{1}{n'}\right) \in S \,/\, 2 - \varepsilon < s'$

EJEMPLO 7 a) Hallar sup $\left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \Big/ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

b) Si existe el supremo, probar la existencia.

Solución:

1) Sea $A = \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \Big/ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

$A = \left\{ 0\,, \frac{1}{8}\,, \ldots\ldots\ldots \longrightarrow \frac{1}{3} \right\}$

2) $\operatorname{Sup} A = \frac{1}{3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right\}$

Probar que $\frac{1}{3} = \sup A$

$\boxed{\textbf{1}^{\text{a}}\ \textbf{CONDICIÓN}}$ $\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2} \le \frac{1}{3}\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

$\boxed{\textbf{2}^{\text{a}}\ \textbf{CONDICIÓN}}$ $\quad \forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, x' \in A \,\big/\, \frac{1}{3}-\varepsilon < x'$

El problema consiste en hallar x' perteneciente al conjunto A que cumpla $\frac{1}{3}-\varepsilon < x'$, $\forall\, \varepsilon > 0$

Veamos:

De antemano se sabe que x' tendrá la forma: $\frac{1}{3}-\frac{1}{2n'}+\frac{1}{6n'^2}$

Ahora, el problema consiste en comprobar que: $\frac{1}{3}-\varepsilon < \frac{1}{3}-\frac{1}{2n'}+\frac{1}{6n'^2}$

lo que es equivalente a: $-\varepsilon < -\frac{1}{2n'}+\frac{1}{6n'^2} \iff \boxed{\varepsilon > \frac{1}{2n'}-\frac{1}{6n'^2}}$

Para ello apliquemos la propiedad Arquimediana.

a) La desigualdad: $\frac{1}{2n'} < \varepsilon$ es verdadero, si en $b < n'a$ hacemos $\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \varepsilon \end{cases}$

b) Pero: $\frac{1}{2n'}-\frac{1}{6n'^2} < \frac{1}{2n'}$ también es verdadero $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$.

indica que: si al número real positivo $\frac{1}{2n'}$ le restamos el número positivo $\frac{1}{6n'^2}$, entonces $\frac{1}{2n'}-\frac{1}{6n'^2}$ será menor que $\frac{1}{2n'}$.

c) Luego: $\quad \frac{1}{2n'}-\frac{1}{6n'^2} < \frac{1}{2n'} < \varepsilon$ .... (transitividad)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2n'}-\frac{1}{6n'^2} < \varepsilon$

Por -1: $\quad -\frac{1}{2n'}+\frac{1}{6n'^2} > -\varepsilon$

Sumar $\frac{1}{3}$: $\quad \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{2n'}+\frac{1}{6n'^2}}_{x'} > \frac{1}{3}-\varepsilon$

Acabamos de hallar $x' \in A \,\big/\, \frac{1}{3}-\varepsilon < x'\ ,\ \forall\, \varepsilon > 0$

EJEMPLO 8 Hallar el supremo del conjunto $S=\left\{\frac{n}{2n+1}\Big/ n\in\mathbb{Z}^+\right\}$ y comprobar su existencia.

Solución:

1. Expresar por extensión el conjunto $S=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\ldots\ldots\longrightarrow\frac{1}{2}\right\}$

2. Cuando "n" es muy grande, entonces $\frac{n}{2n+1}\underbrace{=}_{\text{al dividir}}\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$ tiende en acercarse al número $\frac{1}{2}$.

3. Los elementos de S son decreciente: $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{3}{7}<\ldots\ldots<\frac{1}{2}$

   Luego: $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2}\quad,\quad\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$

4. Sup $S=\frac{1}{2}$.

Comprobación:

1ª CONDICIÓN $\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2}\quad,\quad\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$

2ª CONDICIÓN $\forall\,\varepsilon>0\quad,\quad\exists\, x'\in S\Big/\frac{1}{2}-\varepsilon<x'$

El problema consiste en hallar x'

De antemano se sabe que x' es de la forma: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n'+1)}$

Debemos probar que: $\frac{1}{2}-\varepsilon<\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n'+1)}$ a partir de la propiedad arquimediana.

Veamos:

¿Cómo empezar la demostración?

Al simplificar $\frac{1}{2}-\varepsilon<\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n'+1)}$ obtenemos: $\boxed{\varepsilon>\frac{1}{2(2n'+1)}}$ — I

La desigualdad I nos servirá como referencia para intuir ¿Cómo empezar la demostración?

a) En primer lugar, se cumple $\forall\, n'\in\mathbb{Z}$ que: $n'<2n'+1<2(2n'+1)$

b) En segundo lugar, invertir: $\frac{1}{n'}>\frac{1}{2n'+1}>\frac{1}{2(2n'+1)}$

c) En tercer lugar, aplicar Prop. **ARQ.**: $\varepsilon>\frac{1}{n'}>\frac{1}{2n'+1}>\frac{1}{2(2n'+1)}$

$$\Rightarrow\qquad \varepsilon>\frac{1}{2(2n'+1)}$$

d) por -1 $\quad\Rightarrow\quad -\varepsilon < -\frac{1}{2(2n'+1)}$

e) Sumar $\frac{1}{2}$: $\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}-\varepsilon < \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n'+1)}}_{x'}$

Conclusión: Acabamos de probar que $\exists\, x' \in S \,/\, \frac{1}{2}-\varepsilon < x'\,,\ \forall\, \varepsilon > 0$

EJEMPLO 9 Hallar el Supremo del conjunto $T = \left\{ \frac{1}{3^n} \,/\, n \in I\!N \right\}$

Solución:

1) Al expresar por extensión el conjunto T, tenemos: $T = \left\{ 1\,, \frac{1}{3}\,, \frac{1}{9}\,, \ldots\ldots \to 0 \right\}$

donde $0 < \frac{1}{3^n} \leq 1 \quad , \quad \forall\, n \in I\!N$.

└── indica que el conjunto T es acotado.

2) El supremo de T es el número real $1 \in T$.

Demostración:

$\boxed{\text{1ª CONDICIÓN}}$ $\quad \frac{1}{3^n} \leq 1 \quad , \quad \forall\, n \in I\!N$

$\boxed{\text{2ª CONDICIÓN}}$ $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists\, x' \in T \,/\, 1-\varepsilon < x'$

El problema consiste en hallar por lo menos un elemento $x' \in T$ que cumpla:

$$1-\varepsilon < x' \quad , \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

Para este problema, bastará escoger $x' = 1 \in T$.

Así tendremos: $\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, x' = 1 \in T \,/\, 1-\varepsilon < 1 \iff \varepsilon > 0$

NOTA: *Cuando en una* ***sucesión de números reales*** *el supremo pertenece al conjunto, se escoge* x' = *supremo y queda probado la* 2^{da} *condición.*

Es la única forma de probar la segunda condición y se hace cuando el supremo no es un límite.

En cambio en el conjunto $T = \left\{ \frac{1}{3^n} \,/\, n \in I\!N \right\}$ *se tiene que* $\inf T = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$, $0 \notin T$.

Para la demostración de la 2^{da} *condición de ínfimo, en este caso, se recurre a la propiedad Arquimediana.*

Esto veremos más adelante.

ÍNFIMO DE UN CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

7. DEFINICIÓN

Dado un conjunto no vacío $A \subset IR$, se dice que el número real "k" es el **ÍNFIMO DE A** si, y sólo si se cumplen:

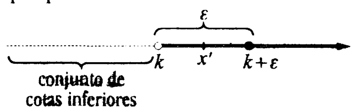
$$\begin{cases} 1)\ k \le a \ , \ \forall\, a \in A \\ 2)\ \text{Si } m \le a \ , \ \forall\, a \in A \ , \text{ entonces } m \le k \end{cases}$$

esta proposición nos dice que K es cota inferior de A.

La condición 2) nos indica que, si m es otra cota inferior de A, entonces el ínfimo K es mayor o igual que m. Es decir, el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores.

La condición 2) es equivalente a la siguiente proposición:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, x' \in A \,/\, x' < k + \varepsilon$$



$$\inf A = K \iff \begin{cases} 1)\ k \le a \ , \ \forall\, a \in A \\ 2)\ \forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, x' \in A \,/\, x' < k + \varepsilon \end{cases}$$

APLICACIONES

EJEMPLO 10 Sea $A = \{2, 5, 8, 11\}$

Probar que 2 es el **ínfimo de A**.

Demostración:

1ª CONDICIÓN $2 \le a \ , \ \forall\, a \in A$

2ª CONDICIÓN $\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, x' \in A \,/\, x' < 2 + \varepsilon$

¿Quién es x' para verificar la 2ª condición?

Basta escoger $x' = 2 \in A$ y se cumple: $2 < 2 + \varepsilon \iff 0 < \varepsilon$.

OBSERVACIONES:

1. Cuando el ínfimo pertenece al conjunto dado, basta escoger $x' = \inf A$ y queda probado la 2ª condición.
2. Cuando el ínfimo o el supremo pertenecen a un conjunto no tiene mayor importancia en el análisis matemático. Pero si ambos, son resultados de un límite, esto sí es importante.

EJEMPLO 11 Sea $B = \langle 3,7 \rangle$

Probar que 3 es el ínfimo de B.

Demostración:

1ª CONDICIÓN $3 \leq b \ , \ \forall\, b \in B$

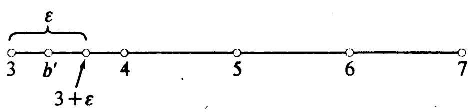
2ª CONDICIÓN $\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, b' \in B \,/\, b' < 3 + \varepsilon$

¿**Cómo construir** ε y qué forma tiene b' para verificar la 2ª condición?

Es **decir**, se **trata** hallar por lo menos un elemento b' que esté en B, tal que cumpla $b' < 3+\varepsilon \ , \ \forall\, \varepsilon > 0$.

Veamos:

CASO 1 Haciendo $0 < \varepsilon < |7-3| = 4$ y escogiendo $b' = \dfrac{3+3+\varepsilon}{2}$



$$b' = \left(3 + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \in B$$

se verifica la proposición: $\left(0 < \varepsilon < 4 \ \wedge \ b' = 3 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ implica $b' < 3+\varepsilon$

Pues $b' < 3+\varepsilon$, para $b' = 3+\frac{\varepsilon}{2}$ se convierte en $3+\frac{\varepsilon}{2} < 3+\varepsilon \iff 1 < 2$,

lo cual es una proposición verdadera.

CASO 2 **Haciendo** $\varepsilon > |7-3| = 4$, es verdadero la proposición:

"$\varepsilon > 4$ implica $b' < 3+\varepsilon \ , \ \underbrace{\forall\, b' \in B}$"

nos dice que hay infinidad de elementos de B que satisfacen $b' < 3+\varepsilon \ , \ \forall\, \varepsilon > 4$.

EJEMPLO 12 Probar que el ínfimo del conjunto

$$C = \left\{ 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} \,\Big/\, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \text{, es } 2.$$

Prueba:

1ª CONDICIÓN $2 \leq 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} \ , \ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

2ª CONDICIÓN $\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, x' \in C \,/\, x' < 2+\varepsilon$

¿Cómo hallar algún $x' \in C$, tal que verifique la 2ª condición?

Veamos:

Por lo pronto, ya sabemos que x' debe tener la forma: $2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}$, en consecuencia, debemos probar que: $2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}<2+\varepsilon \;,\; \forall\, \varepsilon>0$.

o lo que es equivalente a: $\boxed{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}<\varepsilon \;,\; \forall\, \varepsilon>0}$ — P

Para probar la proposición P, apliquemos la Propiedad Arquimediana.

Veamos:

1) La Propiedad Arquimediana nos dice:

$$\text{Si} \quad a\in I\!R^{+} \quad\wedge\quad b\in I\!R^{+} \quad\Rightarrow\quad \exists\, n\in \mathbb{Z}^{+} / b<na$$

2) Un caso particular, será: Si $\quad b=1 \quad\wedge\quad a=\frac{\varepsilon}{2} \quad\Rightarrow\quad \exists\, n\in\mathbb{Z}^{+} \big/ 1<n\frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

3) Por otro lado : $\quad n<2n+1 \quad , \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}^{+}$

invertir : $\quad \frac{1}{n}>\frac{1}{2n+1}$

Pero : $\quad \frac{1}{2n+1}<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2n+1}<\frac{\varepsilon}{2}$

(*)

4) En (*) sumar miembro a miembro, las dos desigualdades: $\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}<\varepsilon$

5) Sumar 2: $\underbrace{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}}_{x'}<2+\varepsilon$

Lo que prueba que existe $x'\in C/x'<2+\varepsilon \quad , \quad \forall\, \varepsilon>0$.

EJEMPLO 13 Sea el conjunto $D=\left\{\frac{2n+1}{3n} \big/ n\in\mathbb{Z}^{+}\right\}$.

a) Probar que $\quad \frac{2}{3}=\inf D$

b) Probar que $\quad 1=\sup D$

Solución:

1) Expresemos por extensión el conjunto $D=\left\{1\,,\frac{5}{6}\,,\frac{7}{9}\,,\ldots\ldots\to\frac{2}{3}\right\}$

2) En D, se cumple: $1\geq\frac{2n+1}{3n}>\frac{2}{3} \;,\; \forall\, n\in\mathbb{Z}^{+}$

a) Ahora, probemos que $\frac{2}{3} = \inf D$:

$\boxed{1^a \text{ CONDICIÓN}}$ $\quad \frac{2}{3} < \frac{2n+1}{3n}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, donde $\frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$

$\boxed{2^a \text{ CONDICIÓN}}$ $\quad \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, d' \in D \,/\, d' < \frac{2}{3} + \varepsilon$

El problema es hallar un elemento d' del conjunto D que cumple: $d' < \frac{2}{3} + \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Veamos:

De antemano, se sabe que d' es de la forma $\frac{2}{3} + \frac{1}{3n}$; por tanto debo probar que:

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3n} < \frac{2}{3} + \varepsilon$ o su equivalente: $\boxed{\frac{1}{3n} < \varepsilon}$ — (*)

Tomando como referencia (*), empecemos en aplicar la propiedad Arquimediana:

i) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, \frac{1}{n} < \varepsilon$

ii) Pero $n < 3n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$, luego $\frac{1}{n} > \frac{1}{3n}$

iii) Por transitividad de desigualdades: si $\frac{1}{3n} < \frac{1}{n} \wedge \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3n} < \varepsilon}$ — (e)

iv) En (e) sumar $\frac{2}{3}$ en ambos miembros: $\underbrace{\frac{2}{3} + \frac{1}{3n}}_{d'} < \frac{2}{3} + \varepsilon$ lo cual prueba la 2^{da} condición.

b) Probemos que $\quad 1 = Sup\ D$.

$\boxed{1^a \text{ CONDICIÓN}}$ $\quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

$\boxed{2^a \text{ CONDICIÓN}}$ $\quad \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x' \in D \,/\, 1 - \varepsilon < x'$

Bastará tomar $x' = 1 \in D \,/\, 1 - \varepsilon < 1 \iff \varepsilon > 0$

> **Nota:** Esto se hace, cuando en una sucesión de números reales, el supremo pertenece al conjunto.

EJEMPLO 14 Dado la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$, donde $a_n = \frac{1}{n^2 + n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Hallar el supremo e ínfimo de la sucesión $(S_n)_{n \geq 1}$, donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_K$, si existen.

Solución:

1) En primer lugar, expresar la sucesión S_n en términos de n, aplicando la propiedad telescópica.

Veamos:

Como $a_n = \frac{1}{n^2+n}$, entonces $a_k = \frac{1}{K^2+K}$ ← todo lo que se ha hecho es sustituirse la "n" por "K"

Pero:

i) $\frac{1}{K^2+K} = \frac{1}{K(K+1)}$ ← Factorizar el denominador

ii) $\frac{1}{K(K+1)} = \frac{A}{K} + \frac{B}{K+1}$ $\begin{cases} A = ? \\ B = ? \end{cases}$ ——— porque hay dos factores en el denominador se separa en dos fracciones parciales.
Cada fracción parcial tiene como denominador un factor y como numerador tendrá una constante A, B que debe hallarse por identidad de polinomios.

$$= \frac{A(K+1)+BK}{K(K+1)}$$

$$= \frac{(A+B)K+A}{K(K+1)}$$

iii) Igualar numeradores:

$$(A+B)K + A = 1$$

$$(A+B)K + A = 0K + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$$

Luego $\quad B = -1$

iv) $a_k = \frac{1}{K(K+1)} = \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}$

v) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_K = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} \right)$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \ldots\ldots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

2) **Por tanto:** $S = (S_n)_{n\geq 1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 1}$

$$= \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \ldots\ldots \to 1\right) \quad , \text{ donde } 1 = \lim_{n\to+\infty}\left\{1-\frac{1}{n+1}\right\}$$

3) Se **tiene**: $\frac{1}{2} = \inf S$, $1 = \sup S$, donde $\frac{1}{2} \in S$, $1 \notin S$

En **este caso tenemos**: **el** ínfimo **pertenece** al **conjunto y el supremo** es un límite que **no pertenece al conjunto**.

4) Probar **que**: $1 = \sup S$
$$\begin{cases} 1^a) \ 1-\frac{1}{n+1} \leq 1 \ , \ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \\ 2^a) \ \forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, x' \in S \,/\, 1-\varepsilon < x' \end{cases}$$

En **este caso, aplicaremos la** Propied**ad Arquimediana**.

i) **Por lo pronto x' debe tener** la **forma** $x' = 1 - \frac{1}{n+1}$

ii) **Entonces se debe** probar: $1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n+1}$ **o su equivalente:**

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon > \frac{1}{n+1}} — (*)$$

iii) **Teniendo como referencia** (*), ya podemos **empezar** la demostración de la 2ª **condición**.

Veamos:

iv) **Se cumple**: $n < n+1$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

invertir : $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

Pero : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$ (**según** la Prop. Arquimediana)

$\Rightarrow$ $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$

Por (-1) : $-\frac{1}{n+1} > -\varepsilon$

Sumar : $\underbrace{1-\frac{1}{n+1}}_{x'} > 1-\varepsilon$

lqqd.

Ahora, hagamos algunas demostraciones teóricas.

8. LA PROPIEDAD ARQUIMEDIANA DEL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

TEOREMA Si a y $b \in IR^+$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $b < na$

Demostración:

Por el absurdo:

1) Suponer que: $\sim[\exists\, n \in \mathbb{Z} \,/\, b < na] \equiv \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, $\boxed{na \le b}$

2) La proposición: $na \le b$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ implica que el conjunto $A = \{a, 2a, 3a, \ldots\ldots\}$ es no vacío y acotado superiormente porque cada elemento de A es menor o igual que b.

3) Como $A \ne \phi$, $A \subset IR$ y es acotado superiormente, entonces A posee supremo (según el axioma del supremo).

4) Sea $s = \sup A$.
Por la 2ª condición de supremo se tiene: $\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, x' \in A \,/\, s - \varepsilon < x'}$ — (P)

La proposición P, se cumple para todo ε positivo, en particular se cumplirá para $\varepsilon = a > 0$.

Si escogemos $x' = n'a \in A$, siendo n' algún número entero positivo, entonces la proposición P se hace:

$$s - a < n'a$$

$\Rightarrow$ $s < (n'+1)\,a$, donde $(n'+1)\,a$ es un elemento de A.

esta desigualdad contradice a la definición de cota superior (1ª condición del Supremo), ya que s es cota superior y no podría ser menor que algún elemento del conjunto A.

Debe ser: $(n'+1)\,a \le s$, $\forall\,(n'+1) \in A$.

5) La contradicción, se presentó porque partimos de $na \le b$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto para que no haya contradicción deberá ser que: $\exists\, n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $b < na$.

8.1 COROLARIO $\forall\, a \in I\!R^+$, $\exists\, n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{n} < a$.

Prueba:

1) Si en la propiedad Arquimediana : $b < na$, $\forall\, a, b \in I\!R^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$
hacemos $b = 1$, se tendrá : $1 < na$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < a \qquad \textit{lqqd.}$$

9. TEOREMA (teorema del mayor entero)

$\forall\, b \in I\!R$, $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ tal que $m - 1 \le b < m$

indica que todo número real "b" está entre dos enteros consecutivos.

***Demostración*:**

Para la demostración de este teorema, se requiere la aplicación de las siguientes proposiciones:

(P_1) Propiedad Arquimediana.

(P_2) Si b es un número real arbitrario, existen enteros p y q tales que $p < b < q$.

(P_3) Principio del buen orden de los números enteros positivos:
Todo conjunto no nulo de enteros positivos posee un elemento mínimo.

Veamos:

En primer lugar debo demostrar P_2.

CASO 1 Si $b > 0$

1) Según la Prop. Arquimediana: si $b \in I\!R^+ \wedge a \in I\!R^+ \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z}^+$ tal que $b < qa$.

2) En particular si $a = 1$, $\exists\, q \in \mathbb{Z}^+$, tal que $b < q$.

CASO 2 Si $b \le 0$, entonces existe $q = 1 \in \mathbb{Z}^+ / b < q$

3) Por lo tanto: $\forall\, b \in I\!R$, $\exists\, q \in \mathbb{Z}^+ / b < q$

4) Con el mismo razonamiento: Para $-b \in I\!R$, $\exists -p \in \mathbb{Z}^+ / -b < -p$
$$\Downarrow$$
$$b > p$$

5) Por (3) y (4), afirmamos que existen enteros p y $q / p < b < q$

6) Los enteros entre p y q son $\{p, p+1, p+2, \ldots\ldots, q=(q-p)+p\}$

7) Sea $S=\{n \in \mathbb{Z}^+ / p+n>b\}$
Tenemos que: $S \neq \phi$, pues por lo menos $(q-p) \in S$.

8) De acuerdo a la proposición (P_3), S tiene un elemento mínimo, digamos n_0.
Haciendo $m=p+n_0$, tenemos: $m-1 \leq b < m$

9.1 NOTACIÓN $m-1 \leq b < m \iff [\![b]\!] = m-1$

se lee "El máximo entero no mayor del número real b es $m-1$.

Ejemplos:

$[\![2.8]\!] = 2$, porque $2 \leq 2.8 < 3$

$[\![5]\!] = 5$, porque $5 \leq 5 < 6$

$[\![-3]\!] = -3$, porque $-3 \leq -3 < -2$

$[\![-5.8]\!] = -6$, porque $-6 \leq -5.8 < -5$

según el Teorema 9, ¿cómo probamos que $[\![-5.8]\!] = 5$?

Veamos:

Existen muchos enteros positivos p y q / $p < 5.8 < q$

Supongamos que sean $p=2$ y $q=9 \Rightarrow 7 < 5.8 < 9$

De 2 al 9 están los enteros $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Sea $S = \{n \in \mathbb{Z}^+ / 2+n > 5.8\}$
$= \{4, 5, 6, 7, \ldots\ldots\}$

El conjunto S tiene mínimo, que es 4.

Hacer $m = mín\, S + 2$
$= 4+2 = 6$

Luego: $m-1 \leq 5.8 < m \iff 5 \leq 5.8 < 6 \iff [\![5.8]\!] = 5$

10. TEOREMA

Si a y b son dos números reales cualesquiera tales que $a < b$, entonces existe un número racional r tal que $a < r < b$.

Demostración:

1) Por hipótesis: $a < b$ de donde: $b - a > 0$

2) Según el corolario 8.1: Para $(b-a) > 0$, $\exists n \in \mathbb{Z}^+ / \frac{1}{n} < b - a$, $n \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n} + a < b} \text{ ---- } (2)$$

3) Por el Teorema 9, para el número real: na, $\exists m \in \mathbb{Z} / m \leq na < m + 1$

4) Pero: $m \leq na < m+1 \iff \frac{m}{n} \leq a \wedge a < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$

$$\iff \left(\frac{m}{n} = a \vee \frac{m}{n} < a\right) \wedge \boxed{a < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}} \text{ ---- } (4)$$

sumar $\frac{1}{n}$

$$\boxed{\frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + \frac{1}{n}} \text{ ---- } (5)$$

5) De (2), (4) y (5) obtenemos: $a < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + \frac{1}{n} < b$

$$\Rightarrow a < \underbrace{\frac{m}{n} + \frac{1}{n}}_{r} < b$$

6) Acabamos de probar que existe el número racional $r = \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ tal que $a < r < b$..

11. APLICACIONES TEÓRICAS

(1) El conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ no es acotado superiormente.

Demostración:

Por el método de reducción al absurdo.

1) Supongamos que $\mathbb{Z}^+$ es acotado superiormente.

2) Se tiene: $\mathbb{Z}^+ \neq \varnothing$, $\mathbb{Z}^+ \subset I\!R$, $\mathbb{Z}^+$ está acotado superiormente, entonces por el axioma del Supremo, el conjunto $\mathbb{Z}^+$ tiene Supremo.

3) Sea $b = \sup \mathbb{Z}^+$.

4) Si b es el supremo de $\mathbb{Z}^+$, entonces b es la menor de las cotas superiores que cumple: $n \leq b$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$.

5) El número real $b-1$, que es menor que b, no puede ser cota superior de $\mathbb{Z}^+$. Por tanto existe un mínimo entero positivo n tal que $b-1 < n \iff \boxed{b < n+1}$, donde $(n+1) \in \mathbb{Z}^+$

esta relación contradice el que b sea una cota superior de $\mathbb{Z}^+$.

6) La contradicción se presentó por haber supuesto que $\mathbb{Z}^+$ es acotado superiormente. En consecuencia $\mathbb{Z}^+$ no es acotado superiormente.

(2) $\forall\, x \in I\!R$, $\exists\, n \in \mathbb{Z} \,/\, x < n$

Demostración:

Por reducción al absurdo:

1) Sea p: $\quad \forall\, x \in I\!R$, $\exists\, n \in \mathbb{Z}^+ / x < n$

y $\sim p$: $\quad \exists\, x \in I\!R$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x$

2) La relación: $n \leq x$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ nos indica que $\mathbb{Z}^+$ es un conjunto acotado superiormente, lo cual es absurdo, puesto que en el problema (1) se ha probado que $\mathbb{Z}^+$ no es acotado superiormente.

3 Si tres números reales a, x, y; satisfacen las desigualdades $a \leq x \leq a+\frac{1}{n}$ para todo entero $n \geq 1$, entonces $x = a$.

Demostración:

Por el método de reducción al absurdo:

1) Se tiene: Si $\underbrace{a \leq x \leq a+\frac{1}{n} \quad \forall\, n \geq 1}_{p} \;\Rightarrow\; \underbrace{x = a}_{q}$

2) Sea $\sim q$: $x \neq a \iff x > a \;\vee\; x < a$

3) Si $x > a$, entonces $x - a > 0$.

4) Por la propiedad Arquimediana:

si $(x-a) \in IR^{+} \;\wedge\; y \in IR^{+} \;\Rightarrow\; \exists\, n \in \mathbb{Z}^{+} / \, y < n(x-a)$

si $y = 1$, tendremos: $1 < n(x-a)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n} + a < x}_{\text{contradice a la hipótesis } p.}$$

5) Debe ser entonces que $x = a$.

4 Sea $A \neq \varnothing$ y $A \subset IR$

$$s = \sup A \iff \begin{cases} 1) \; a \leq s \;, \; \forall\, a \in A \\ 2) \; \text{si } \; a \leq k \;, \; \forall\, a \in A \Rightarrow s \leq k \end{cases}$$

Probar que la condición 2) es equivalente a la proposición :
$\forall\, \varepsilon > 0 \;, \; \exists\, a' \in A / s - \varepsilon < a'$

Demostración:

La demostración se hace por el método de reducción al absurdo

Sean las proposiciones p : si $a \leq k \;, \; \forall\, a \in A \;\Rightarrow\; s \leq k$

q : $\forall\, \varepsilon > 0 \;, \; \exists\, a' \in A / s - \varepsilon < a'$

Probar que $p \iff q$

$\boxed{\textbf{PARTE 1}}$ $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

1) $\sim q : \exists\, \varepsilon > 0 \;, \; \underbrace{\forall\, a' \in A \;, \; s - \varepsilon \geq a'}$

esta relación nos indica que $s - \varepsilon$ es cota superior de A.

2) Si tomamos $k = s - \varepsilon$, entonces en p se tendrá:

$s \leq s - \varepsilon$ que es: $0 \leq -\varepsilon \iff \varepsilon \leq 0$

es un absurdo, ya que en q se afirma $\forall\, \varepsilon > 0$

3) Se ha probado que: $\sim q \Rightarrow \sim p$, por lo tanto $p \Rightarrow q$

PARTE 2 $(q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$

4) Se tiene p: si $\underbrace{a \leq k \;,\; \forall\, a \in A}_{p_1} \Rightarrow \underbrace{s \leq k}_{q_1}$

Donde $\sim p \;:\; p_1 \wedge \sim q_1$

$\sim p \;:\; a \leq k \;,\; \forall\, a \in A \;\wedge\; s > k$

5) Si $s > k$, podemos tomar, en particular, $\varepsilon = s - k > 0$

6) Sustituir en q: $\forall\, \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, a' \in A \,/\, s - \varepsilon < a'$

obteniéndose : $s - (s - k) < a'$

$$\Rightarrow \boxed{k < a' \;,\; a' \in A}$$

contradice a la definición de cota superior (pues k es cota superior).

7) Por lo tanto: $\sim p \Rightarrow \sim q$ que es equivalente: $q \Rightarrow p$

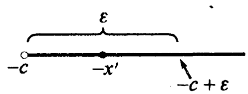
8) Conclusión: Por 3) y 7) afirmamos que $p \iff q$

(5) Si $c = \sup A$, probar que $-c = \inf(-A)$

Demostración:

Debo probar dos condiciones $\begin{cases} i) \;\; -c \leq -x \;,\; \forall\, (-x) \in (-A) \\ ii) \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;,\; \exists -x' \in (-A) \,/\, -x' < -c + \varepsilon \end{cases}$

Veamos:



1) Por hipótesis $c = \sup A$

Luego:

$$c = \sup A \iff \begin{cases} 1) \;\; x \leq c \;,\; \forall\, x \in A \\ 2) \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, x' \in A \,/\, c - \varepsilon < x' \end{cases}$$

2) En la condición 1) si multiplicamos por -1 , se obtiene:

1') $\quad -c \leq -x \ , \ \forall -x \in (-A)$, puesto que $x \in A$.

3) En la condición 2) si multiplicamos por -1, obtenemos:

2') $\quad -c+\varepsilon > -x'$

$\iff -x' < -c+\varepsilon \ , \ \forall \ \varepsilon > 0$, donde $x' \in (-A)$, ya que $x' \in A$.

lqqd.

6) Dadas A y B subconjuntos de IR no vacíos y $a = \sup A$, $b = \sup B$.
Sea $C = \{ x+y \, / \, x \in A \, , y \in B \}$
Demostrar que $\sup C = a+b$

Prueba:

Debo probar dos condiciones:

i) $x+y \leq a+b \ , \ \forall \, (x+y) \in C \ , \ x \in A \ , \ y \in B$

ii) $\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \, c' \in C \, / \, (a+b) - \varepsilon < c'$

Veamos:

1) Por hipótesis: $a = \sup A \iff \begin{cases} i') \ x \leq a & , \ \forall \ a \in A \\ ii') \ \forall \ \varepsilon_1 > 0 & , \ \exists \, a' \in A \, / \, a - \varepsilon_1 < a' \end{cases}$

2) Por hipótesis: $b = \sup B \iff \begin{cases} i'') \ y \leq b & , \ \forall \ b \in B \\ ii'') \ \forall \ \varepsilon_2 > 0 & , \ \exists \, b' \in B \, / \, b - \varepsilon_2 < b' \end{cases}$

3) Sumar (i') con (i''): $x+y \leq a+b \ , \ \forall \, (x+y) \in C \ , \ \forall \ x \in A \ , \ \forall \ y \in B$

Esta prueba que $a+b$ es cota superior de C.

4) Si en (ii') hacemos $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ tendremos: $\quad a - \varepsilon/2 < a'$

Si en (ii'') hacemos $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$ tendremos: $\quad \underline{b - \varepsilon/2 < b'}$

Sumar: $\quad (a+b) - \varepsilon < a' + b'$

Donde: $\quad (a'+b') \in C$ puesto que $a' \in A \ , \ b' \in B$. y debemos elegir $\varepsilon = min \{ \varepsilon_1 \, , \varepsilon_2 \}$.

(7) Si A es un conjunto no vacío de números reales, acotado inferiormente, probar que A tiene ínfimo.

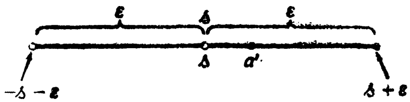
Prueba:

1) Sea $-A$ el conjunto de los números opuestos de los de A.

2) Entonces: $-A \neq \varnothing$ y $-A$ es acotado superiormente, luego $-A$ tiene supremo (según el **Axioma del supremo**).

3) **Sea $-s$ el supremo de $-A$**, entonces:

   i) $-a \leq -s$, $\forall -a \in (-A)$



   ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists -a' \in (-A) \,/\, -s - \varepsilon < -a'$

4) En *i*) multiplicamos por -1, obteniéndose: *i'*) $s \leq a$, $\forall\, a \in A$.

   En *ii*) multiplicar por -1, obtenemos: *ii'*) $a' < s + \varepsilon$, $a' \in A$.

   Lo cual prueba que $s = \inf A$ cuando A es acotado inferiormente.

12. APLICACIONES PRÁCTICAS

12.1 SUPREMO E ÍNFIMO EN PARÁBOLAS

1 Encontrar el menor número M, tal que: $2x - x^2 \leq M \quad \forall\, x \in IR$

Solución:

1° Completar cuadrados en el polinomio

$$2x - x^2 \leq M$$

i) $$-(x^2 - 2x + \ldots) \leq M$$

ii) $$-(x^2 - 2x + 1 - 1) \leq M$$

$$1 - (x^2 - 2x + 1) \leq M$$

$$1 - (x-1)^2 \leq M$$

2° Luego, $M = 1$, porque:

$$(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall\, x \in IR$$

$$-(x-1)^2 \leq 0$$

Sumar 1: $1 - (x-1)^2 \leq 1 = M$

2 Hallar el mayor número m, tal que: $m \leq 3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$, $\forall\, x \in IR - \{0\}$

Solución:

1° Hacer $\frac{1}{x} = y$, entonces $m \leq 3 + 2y^2 - y$

2° Completar cuadrados:

$$m \leq 3 + 2y^2 - y$$

$$m \leq 2\left(y^2 - \tfrac{1}{2}y + \ldots\right) + 3$$

$$m \leq 2\left(y^2 - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{16}\right) + 3$$

$$m \leq 2\left(y - \tfrac{1}{4}\right)^2 - \tfrac{1}{8} + 3$$

$$m \leq 2\left(y - \tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{23}{8}$$

3° Luego $m = \frac{23}{8}$, porque:

i) $2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$, $\forall\, y = \frac{1}{x} \in IR - \{0\}$

ii) $\Rightarrow \quad 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \geq \frac{23}{8}$

12.1.1 TAREA

Hallar el menor número M, tal que:

1) $-19 + 12x - 2x^2 \leq M$, $\forall\, x \in IR$

2) $1 + 6x - x^2 \leq M$, $\forall\, x \in IR$

3) $2 - x^{2/3} - x^{1/3} \leq M$, $\forall\, x \in IR$

4) $2x^{2/3} - x^{4/3} \leq M$, $\forall\, x \in IR$

Respuesta: 1) $M = -1$; 2) $M = 10$,
3) $M = \frac{9}{4}$; 4) $M = 1$

Hallar el mayor número real m, tal que:

5) $m \leq x^2 - 4x + 29$, $\forall\, x \in IR$

6) $m \leq x^2 - 4x + 4$, $\forall\, x \in IR$

7) $m \leq 5 + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}$, $\forall\, x \in IR$, $x \neq 0$

8) $m \leq x^{2/5} - x^{1/5} - 2$, $\forall\, x \in IR$

Respuesta: 1) $m = 25$, 2) $m = 0$
3) $m = \frac{55}{16}$, 4) $m = -\frac{9}{4}$

12.2 EN FUNCIONES RACIONALES

3 Hallar el mayor "m", y el menor "M" tal que para todo $x \in \left]1/2, 1\right[$ se cumpla $m < \frac{x+2}{x+3} < M$.

Solución:

Se pide hallar el supremo M y el ínfimo m.

Veamos:

En primer lugar, dividir $\frac{x+2}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$

En segundo lugar, empezar a acotar a partir de:

$$x \in \left]1/2, 1\right[$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2} < x < 1$$

Sumar 3 $\Rightarrow \quad \frac{1}{2} + 3 < x + 3 < 1 + 3$

$$\tfrac{7}{2} < x + 3 < 4$$

Por -1 $\Rightarrow$ $-\frac{7}{2} > -(x+3) > -4$

invertir $\Rightarrow$ $-\frac{2}{7} < -\frac{1}{x+3} < -\frac{1}{4}$

Sumar 1 $\Rightarrow$ $1-\frac{2}{7} < 1-\frac{1}{x+3} < -\frac{1}{4}+1$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ m}}{\frac{5}{7}} < 1-\frac{1}{x+3} < \underset{\substack{\uparrow\\ M}}{\frac{3}{4}}$$

NOTA: Si no se hace la división $\frac{x+2}{x+3} = 1-\frac{1}{x+3}$, no se puede hallar el supremo ni el ínfimo. Esto ocurre porque la función $\frac{1}{x+3}$ es decreciente en $]1/2\ ,\ 1[$.

13. ECUACIONES E INECUACIONES

13.1 ECUACIONES CON MÁXIMO ENTERO

Definición: Si $x \in I\!R$, $k \in \mathbb{Z}$, definimos:

$$[\![x]\!] = K \iff k \leq x < k+1$$

Para $f(x)$: $[\![f(x)]\!] = K \iff k \leq f(x) < k+1$, $f(x)$ es una función real de variable real.

EJEMPLOS:

$\boxed{1}$ Resolver $\forall\, x \in I\!R$, tal que: $[\![1-2x]\!] = -3$

Solución:

$$[\![1-2x]\!] = -3 \iff -3 \leq 1-2x < -3+1$$
$$-3-1 \leq -2x < -3+1-1$$
$$-4 \leq -2x < -3$$
$$4 \geq 2x > 3$$
$$2 \geq x > \frac{3}{2}$$
$$x \in]3/2\ ,2]$$

$\boxed{2}$ Resolver $\forall\, x \in I\!R$ tal que:

$$[\![x]\!]^2 - [\![x]\!] - 6 = 0$$

Solución:

Factorizar: $([\![x]\!]-3)([\![x]\!]+2) = 0$

$\iff$ $[\![x]\!]-3 = 0 \quad \vee \quad [\![x]\!]+2 = 0$

$[\![x]\!] = 3 \quad \vee \quad [\![x]\!] = -2$

$3 \leq x < 3+1 \quad \vee \quad -2 \leq x < -2+1$

$3 \leq x < 4 \quad \vee \quad -2 \leq x < -1$

$\Rightarrow$ $x \in [-2,-1[\cup [3,4[$

$\boxed{3}$ Resolver $[\![x]\!] - x = 0$

Solución:

$$[\![x]\!] = x$$

Como $[\![x]\!]$ es entero y $[\![x]\!] = x$, entonces x = entero.

Por tanto: el conjunto solución de la ecuación $[\![x]\!] - x = 0$ es $C_S = \mathbb{Z}$.

$\boxed{4}$ Resolver $[\![5x-2]\!] = 3x$

Solución:

$[\![5x-2]\!] = 3x \iff 3x \leq 5x-2 < 3x+1$

$3x = n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ $3x \leq 5x-2 \quad \wedge \quad 5x-2 < 3x+1$, $x = \frac{n}{3}$

$-2x \leq -2 \quad \wedge \quad 2x < -3$

$2x \geq 2 \quad \wedge \quad x < \frac{3}{2}$

$x \geq 1$

$\Leftrightarrow$ $1 \leq x < \frac{3}{2}$, $x = \frac{n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$1 \leq \frac{n}{3} < \frac{3}{2}$$

$$3 \leq n < \frac{9}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$n = 3 \quad , \quad n = 4$$

si $\quad n = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{3} = 1$

si $\quad n = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}$

Luego: $C_S = \{1 \, , \, 4/3\}$

5 Hallar los elementos del conjunto $A = \{[\![2x-1]\!] / \, x \in [0,1]\}$

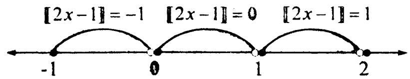
Solución:

Partir de $\quad x \in [0\,,1]$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 1$

por 2 $\quad \Rightarrow \quad 0 \leq 2x \leq 2$

Sumar $-1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq 2x-1 \leq 1$



De -1 hasta 1, $[\![2x-1]\!]$ es $-1\,,0\,,1$

Luego $A = \{-1\,,0\,,1\}$

18.2 INECUACIONES CON MÁXIMO ENTERO

TEOREMAS

T_1 Si n es un número entero, entonces $[\![x]\!] \geq n \iff x \geq n$

$T_{1.1}$ $[\![x]\!] > n \iff x \geq n+1 \;,\; \forall\, n \in \mathbb{Z}$

T_2 Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $[\![x]\!] \leq n \iff x < n+1$

T_3 $\forall\, n \in \mathbb{Z} \;,\; [\![x]\!] < n \iff x < n$

T_4 $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}$ si $x \leq y \Rightarrow [\![x]\!] \leq [\![x]\!]$

T_5 $\forall\, n \in \mathbb{Z} \;,\; x \in \mathbb{R}$,
si $n > x \Rightarrow n \geq [\![x]\!] + 1 > [\![x]\!]$

T_6 $x \in \mathbb{Z} \iff [\![x]\!] = x$

T_7 $\forall\, x \in \mathbb{R}$, se cumple $0 \leq x - [\![x]\!] < 1$

T_8 Si $x \in \mathbb{R}$, tal que, $x = y + \alpha$, con $0 \leq \alpha < 1$, entonces $y = [\![x]\!]$

T_9 $\forall\, x \in \mathbb{R} \;,\; \forall\, n \in \mathbb{Z}^+ : \left[\!\!\left[\frac{[\![x]\!]}{n} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{x}{n} \right]\!\!\right]$

T_{10} $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!] \;,\; \forall\, x \in \mathbb{R}$

T_{11} $\forall\, x \in \mathbb{R}$, se cumple: $x - 1 < [\![x]\!] \leq x$

T_{12} $[\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n \iff n \in \mathbb{Z}$

T_{13} $[\![x]\!] + [\![-x]\!] = \begin{cases} 0 \;, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 \;, & \text{si } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$

NOTA: El símbolo corchete $[\![\ldots]\!]$ expresa un número entero.

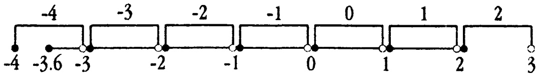
Por ejemplo:

1) $\llbracket 2x-1 \rrbracket \geq 3$ implica $\llbracket 2x-1 \rrbracket = \{3, 4, 5, 6 \ldots\}$

2) $\left\llbracket 5x-\frac{3}{4} \right\rrbracket \leq 2.7$ implica $\left\llbracket 5x-\frac{3}{4} \right\rrbracket = \{2, 1, 0, -1 \ldots\}$

3) $-3.6 \leq \llbracket 1/2-3x \rrbracket \leq 2$ implica $\llbracket 1/2-3x \rrbracket = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

3.1) $-3.6 \leq \left\llbracket \frac{1}{2} - 3x \right\rrbracket \leq 2$ implica $\left\llbracket \frac{1}{2}-3x \right\rrbracket = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$



4) $\llbracket \mu(x) \rrbracket < 2.8$ implica $\llbracket \mu(x) \rrbracket = \{\ldots, -1, 0, 1, 2\}$

5) Según T_{12} *i)* $\left\llbracket 2x-\frac{1}{3}+5 \right\rrbracket = \left\llbracket 2x-\frac{1}{3} \right\rrbracket + 5$

ii)
$$\begin{aligned} y &= \llbracket x-3 \rrbracket + \llbracket -x-2 \rrbracket \\ &= \llbracket x \rrbracket - 3 + (\llbracket -x \rrbracket - 2) \\ &= \llbracket x \rrbracket - \llbracket -x \rrbracket - 5 = \begin{cases} 0-5 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1-5 & \text{si } x \in (I\!R - \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

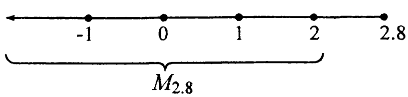
$$\begin{cases} -5 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -6 & \text{si } x \in (I\!R - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

IMPORTANTES DEFINICIONES

1. Sea "x" un número real fijo, definimos:

$$M_x = \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq x\}$$

Ejemplo:
$$\begin{aligned} M_{2.8} &= \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq 2.8\} \\ &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$



2. $\llbracket x \rrbracket = máx\ M_x$

$= máx\ \{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq x\}$

es el mayor entero menor o igual a "x"

Ejemplo:

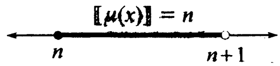
$$\begin{aligned} \llbracket 2.8 \rrbracket = 2 \quad &= máx\{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq 2.8\} \\ &= máx\{\ldots, -1, 0, 1, 2\} \\ \llbracket -1.9 \rrbracket = -2 \quad &= máx\{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq -1.9\} \\ &= máx\{\ldots, -4, -3, -2\} \end{aligned}$$

$\llbracket 5 \rrbracket = 5$

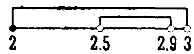
$\llbracket -16 \rrbracket = -16$

3. PROPIEDADES USUALES
$$\begin{cases} P_1 & [\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!] \\ P_2 & [\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n \quad , \quad \forall\, x \in I\!R \ , \ \forall\, n \in \mathbb{Z} \\ P_3 & [\![\mu(x)]\!] = n \ , \iff n \leq \mu(x) < n+1 \ , \ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

El corchete es un entero "n", siempre que, lo que está dentro del corchete $\mu(x)$ esté en el intervalo $[n, n+1[$.



Por ejemplo:
$\forall\ y/2 \leq y < 3 \ \Rightarrow\ [\![y]\!] = 2$
En particular
si $2.5 < y < 2.9 \ \Rightarrow\ [\![y]\!] = 2$



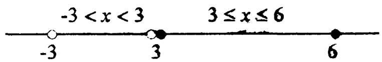
EJERCICIOS

1 Hallar los **elementos del conjunto de** A, si

$$A = \left\{ \left[\!\!\left[\frac{|x-3|-2}{x+4} \right]\!\!\right] \Big/ x \in \left]-3, 6\right] \right\}$$

Solución:

El punto crítico del **valor absoluto** $x = 3$ nos obliga a "partir" el **intervalo** $]-3, 6]$ en **dos sub**-intervalos:



Ahora analicemos **en cada** intervalo:

A_1) En **el** intervalo $-3 < x < 3$ se cumple $|x-3| = -(x-3)$ **y la fracción**:

$$\frac{|x-3|-2}{x+4} = \frac{-x+3-2}{x+4} = -\frac{x-1}{x+4} = -1 + \frac{5}{x+4}$$

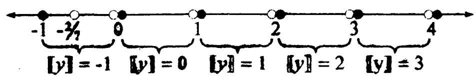
A continuación ACOTAR: $-1 + \frac{5}{x+4}$ a partir de $-3 < x < 3$

Veamos:

En	:	$-3 < x < 3$
Sumar 4	:	$1 < x+4 < 7$
invertir	:	$1 > \frac{1}{x+4} > \frac{1}{7}$
Por 5	:	$5 > \frac{5}{x+4} > \frac{5}{7}$
Sumar -1	:	$4 > -1 + \frac{5}{x+4} > -\frac{2}{7}$

$\Rightarrow$ $\quad \underbrace{\left[\!\!\left[-1 + \frac{5}{x+4} \right]\!\!\right]}_{y} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$[\![y]\!] = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$



Luego: $A_1 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

A_2) **En el intervalo** $3 \leq x \leq 6$ se tiene:

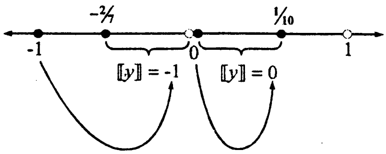
$$\frac{|x-3|-2}{x+4} = \frac{x-3-2}{x+4} = \frac{x-5}{x+4} = 1 - \frac{9}{x+4}$$

Acotemos:

A partir de	:	$3 \leq x \leq 6$
Sumar 4	:	$7 \leq x+4 \leq 10$
Invertir	:	$\frac{1}{7} \geq \frac{1}{x+4} \geq \frac{1}{10}$
Por -9	:	$-\frac{9}{7} \leq \frac{-9}{x+4} \leq \frac{-9}{10}$

Sumar 1 : $-\frac{2}{7} \leq 1-\frac{9}{x+4} \leq \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left[\!\left[1-\frac{9}{x+4} \right]\!\right]}_{[\![y]\!]} = \{-1,0\}$$



Luego: $A_2 = \{-1,0\}$

Conclusión: $A = A_1 \cup A_2 = \{-1,0,1,2,3\}$

2 Resolver para $x \in I\!R$: $\left[\!\left[2x-\frac{4}{x} \right]\!\right] \geq 2$

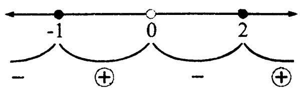
Solución:

$$\left[\!\left[2x-\frac{4}{x} \right]\!\right] \geq 2 \leftrightarrow 2x-\frac{4}{x} \geq 2$$

$$\leftrightarrow 2x-\frac{4}{x}-2 \geq 0$$

$$\leftrightarrow \frac{2x^2-2x-4}{x} \geq 0$$

$$\leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x} \geq 0 \leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x} \geq 0$$



Luego: $C_S = [-1,0[\cup [2,+\infty[$

3 Resolver: $\dfrac{\sqrt{|x-1|-2}}{[\![x^2-x]\!]-6} \leq 0$

Solución:

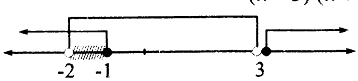
$\Leftrightarrow |x-1|-2 \geq 0 \quad \wedge \quad [\![x^2-x]\!]-6 < 0$

$|x-1| \geq 2 \quad \wedge \quad [\![x^2-x]\!] < 6$

$(x-1 \geq 2 \ \vee \ x-1 \leq -2) \wedge \quad x^2-x < 6$

$(x \geq 3 \quad \vee \quad x \leq -1) \wedge \quad x^2-x-6 < 0$

$(x-3)(x+2) < 0$



$C_S = x \in \,]-2,-1]$

4 Resolver: $\left[\!\left[\frac{|x-1|-3}{4} \right]\!\right] \geq 2$

Solución:

$\Rightarrow \quad \frac{|x-1|-3}{4} \geq 2$

$\Rightarrow \quad |x-1| \geq 11$

$x-1 \geq 11 \quad \vee \quad x-1 \leq -11$

$x \geq 12 \quad \vee \quad x \leq -10$

$C_S = x \in \,]-\infty,-10] \cup [12,+\infty[$

5 Resolver: $\left[\!\left[\frac{\sqrt{x-1}-1}{|x|-1} \right]\!\right] \leq 2$

Solución:

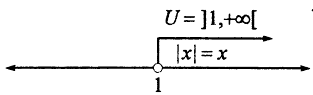
$\frac{\sqrt{x-1}-1}{|x|-1} < 2+1 \qquad$ Según T_2

$\frac{\sqrt{x-1}-1}{|x|-1} < 3 \quad , \quad |x|-1 \neq 0$

$x \neq -1,1$

Universo de la inecuación: $\quad x-1 \geq 0$

$x \geq 1 , x \neq 1$



La inecuación se convierte en:

$$\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-1}-3 < 0 \leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}-3x+2}{x-1} < 0$$

Según el UNIVERSO: $x \in U \leftrightarrow x > 1 \leftrightarrow x-1 > 0$,

Luego el numerador será:

$\sqrt{x-1}-3x+2 < 0 \leftrightarrow \sqrt{x-1} < 3x-2 \leftrightarrow$

$0 \leq \sqrt{x-1} \quad \wedge \quad \sqrt{x-1} < 3x-2$

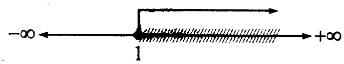
$0 \leq \sqrt{x-1} \quad \wedge \quad x-1 < (3x-2)^2$

$0 \leq x-1 \quad \wedge \quad x-1 < 9x^2-12x+4$

$x \geq 1 \quad \wedge \quad x^2-\frac{13}{9}x+\frac{5}{9} > 0$

$x^2-\frac{13}{9}x+\frac{169}{324} > \frac{169}{324}-\frac{5}{9}$

$$x \geq 1 \quad \wedge \quad \underbrace{\left(x-\frac{13}{18}\right)^2 > -\frac{11}{324}}_{I\!R}$$



$$C_S : x \in [1, +\infty[$$

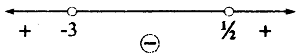
6 Resolver: $[\![2x^2 + 5x - 1]\!] \leq 1$

Solución:

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 5x - 1 < 1 + 1 \text{ .... por } T_2$$

$$2x^2 + 5x - 3 < 0$$

$$(2x - 1)(x + 3) < 0$$



$$C_S = x \in]-3, 1/2[$$

7 Resolver: $[\![2x^2 + 5x - 1]\!] < 1$

Solución:

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 5x - 1 < 1 \text{ .... por } T_3$$

$$2x^2 + 5x - 2 < 0$$

$$x^2 + \tfrac{5}{2}x - 1 < 0$$

$$x^2 + \tfrac{5}{2}x + \tfrac{25}{16} < 1 + \tfrac{25}{16}$$

$$\left(x + \tfrac{5}{4}\right)^2 < \tfrac{41}{16}$$

$$-\tfrac{\sqrt{41}}{4} < x + \tfrac{5}{4} < \tfrac{\sqrt{41}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad -\tfrac{\sqrt{41} + 5}{4} < x < \tfrac{\sqrt{41} - 5}{4}$$

8 Resolver: $[\![2x^2 + 5x - 1]\!] \geq 1$

Solución:

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 5x - 1 \geq 1 \text{ ...... por } T_1$$

$$2x^2 + 5x - 2 \geq 0$$

$$\left(x + \tfrac{5}{4}\right)^2 \geq \tfrac{41}{16}$$

$$x + \tfrac{5}{4} \geq \tfrac{\sqrt{41}}{4} \quad \vee \quad x + \tfrac{5}{4} \leq -\tfrac{\sqrt{41}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x \geq \tfrac{\sqrt{41} - 5}{4} \quad \vee \quad x \leq -\tfrac{\sqrt{41} + 5}{4}$$

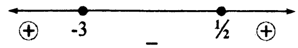
9 Resolver: $[\![2x^2 + 5x - 1]\!] > 1$

Solución:

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 5x - 1 \geq 1 + 1 \text{ .... por } T_{1.1}$$

$$2x^2 + 5x - 3 \geq 0$$

$$(2x - 1)(x + 3) \geq 0$$



Luego: $C_S = \{x \in I\!R \,/\, x \leq -3 \ \vee \ x \geq 1/2\}$

NOTA: Si Ud. se olvida algún teorema, aplique la definición de mayor entero.

10 Hallar los valores de $y = -x^2[\![1 - 2x]\!]$, si $x \in \langle -1, 0\rangle$

Solución:

A partir de $x \in \langle -1, 0\rangle$ acotar para formar el término $1 - 2x$.

Veamos:

Si $x \in \langle -1, 0\rangle \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 0$

por $-2 \quad \Rightarrow \quad 2 > -2x > 0$

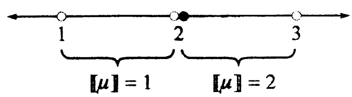
Sumar 1 $\quad \Rightarrow \quad 3 > 1 - 2x > 1$

Aplicar $[\![\ ]\!] \quad \Rightarrow \quad [\![1 - 2x]\!] = \{1, 2\}$

hacer $1 - 2x = \mu \quad \Rightarrow \quad [\![\mu]\!] = \{1, 2\}$

Se tiene que $[\![\mu]\!]$ es un entero.

Analicemos en un gráfico:



Teniendo en cuenta la propiedad básica:

Si $K \leq \mu < K + 1 \Rightarrow [\![\mu]\!] = K \ , \ \forall K \in \mathbb{Z}$

tenemos:

a) Si $1<\underset{\downarrow}{\mu}<2 \Rightarrow [\![\mu]\!]=1 \wedge y=-x^2(1)$

$$1<1-2x<2$$
$$1-1<-2x<2-1$$
$$0<-2x<\ 1$$
$$0>\ 2x>-1$$
$$0>\ \ x>-\tfrac{1}{2}$$

Luego: si $-\frac{1}{2}<x<0 \Rightarrow y=-x^2(1)$

$$=-x^2$$

b) Si $2\le\mu<3 \ \Rightarrow\ [\![\mu]\!]=2 \ \wedge\ y=-x^2(2)$

$$2\le 1-2x<3 \qquad\qquad =-2x^2$$
$$-1<x\le-\tfrac{1}{2}$$

Luego: si $\ -1<x\le-\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ y=-2x^2$

Conclusión: $y=\begin{cases} -x^2 & ,\ \text{si } -\frac{1}{2}<x<0 \\ -2x^2 & ,\ \text{si } -1<x\le-\frac{1}{2} \end{cases}$

Ahora:

1) Si $-\frac{1}{2}<x<0 \Rightarrow \frac{1}{4}>x^2>0$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{4}<\underbrace{-x^2}_{y}<0 \leftrightarrow y\in\left\langle-\tfrac{1}{4},0\right\rangle$$

2) Si $-1<x\le-\frac{1}{2} \ \Rightarrow 1>x^2\ge\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow -2<\underbrace{-2x^2}_{y}\le-\tfrac{1}{2}\rightarrow$$
$$y\in\left\langle-2,-\tfrac{1}{2}\right]$$

Luego: $y\in\left\langle-2,-\frac{1}{2}\right]\cup\left\langle-\frac{1}{4},0\right\rangle$.

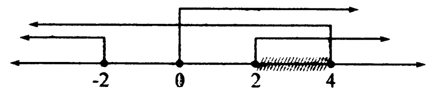
$\boxed{11}$ **Hallar la solución de la in**ecuación:

$$\frac{([\![x]\!]-3)(\sqrt{|x|-2}-1)(\sqrt{4-x}+5)}{|\sqrt{x}-3|}>0$$

Solución:

En primer lugar, **hallar** el UNIVERSO de la solución

$$U:|x|-2\ge0 \ \wedge\ 4-x\ge0 \ \wedge\ x\ge0$$
$$|x|\ge2 \qquad 4\ge x$$
$$(x\ge2 \ \vee\ x\le-2) \ \wedge\ (x\le4) \ \wedge\ (x\ge0)$$



$U=[2,4]$

En segundo lugar, analizar el signo de cada factor:

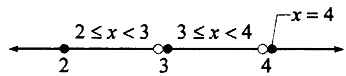
$$(\sqrt{4-x}+5)>0 \quad , \quad \forall\, x\in U$$
$$|\sqrt{x}-3|>0 \quad , \quad \forall\, x\in U \ ;\ |x|=x$$

En tercer lugar, simplificar los factores positivos de la inecuación, reduciéndose en:

$$\frac{([\![x]\!]-3)(\sqrt{|x|-2}-1)(\cancel{\sqrt{4-x}+5})}{\cancel{|\sqrt{x}-3|}}>0$$

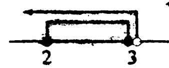
$\Rightarrow\ \ ([\![x]\!]-3)(\sqrt{x-2}-1)>0$ .... A

En cuarto lugar: analizar $[\![x]\!]$ en $U=[2,4]$



A_1) Si $2\le x<3 \Rightarrow [\![x]\!]=2$ y la inecuación A es:

$$(2-3)(\sqrt{x-2}-1)>0$$
$$\Rightarrow \qquad \sqrt{x-2}-1<0$$
$$\sqrt{x-2}<1 \ \Rightarrow\ x-2<1$$



$$\Rightarrow \qquad x<3$$

Luego: $A_1=[2,3[$ **es el conjunto solución**

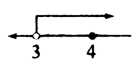
A_2) Si $3\le x<4 \Rightarrow [\![x]\!]=3$ y la inecuación A es:

$$(3-3)(\sqrt{x-2}-1)>0$$
$$0>0$$

es FALSO, por tanto: $A_2=\varnothing$

A_3) Si $x=4 \ \Rightarrow\ [\![x]\!]=4$ y la **inecuación** A es:

$$(4-3)(\sqrt{x-2}-1)>0$$
$$\sqrt{x-2}-1 \quad >0 \Rightarrow \sqrt{x-2}>1$$
$$x-2>1$$
$$x>3$$



$$\Rightarrow\ A_3=\{4\}$$

CONCLUSIÓN: $C_S=A_1\cup A_2\cup A_3=[2,3]\cup\{4\}$

OTRAS PROPIEDADES

(P_1) $[\![-x]\!]=-[\![x]\!] \Leftrightarrow x\in \mathbb{Z}$

(P_2) $[\![-x]\!]=-[\![x]\!]-1 \Leftrightarrow x\in I\!R-\mathbb{Z}$

$$(P_3)\ [\![2x]\!]-2[\![x]\!]=\begin{cases}0,\ \text{si } x\in\left[n,n+\frac{1}{2}\right[\\ 1,\ \text{si } x\in\left[n+\frac{1}{2},n+1\right[\end{cases}$$

$n\in\mathbb{Z}$

(P_4) Si $n\in\mathbb{Z}^+$, entonces:

a) $[\![nx]\!]-n[\![x]\!]\in\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$

b) $[\![nx]\!]-n[\![x]\!]=P \Leftrightarrow x\in\left[K+\frac{P}{n},K+\frac{P+1}{n}\right[$

donde $P=0,1,2,3,\ldots,n-1$, $\forall K\in\mathbb{Z}$

PROBLEMAS

OBSERVACIÓN IMPORTANTE

Si $\mu(x)$ es una expresión en términos de "x" y $[\![\ldots]\!]$ es un entero, tener en cuenta las siguientes diferencias:

① Resolver: $[\![\mu(x)]\!]=\sqrt{5}$

$C_S=\phi$, porque $[\![\mu(x)]\!]$ es entero

y $\sqrt{5}$ no es entero

② Resolver: $[\![\mu(x)]\!]<\sqrt{5}\approx 2.23$

Solución: $[\![\mu(x)]\!]\le 2$

$\Leftrightarrow \quad \mu(x)<2+1$ Por T_2

③ Resolver: $[\![\mu(x)]\!]>\sqrt{5}$

Solución: $[\![\mu(x)]\!]\ge 3$

$\Leftrightarrow \quad \mu(x)\ge 3$ Por T_1

NOTA: De manera similar se procede cuando el segundo miembro es un número que no es entero.

④ Resolver: $2[\![x+2]\!]^2-7[\![x]\!]\le 23$

Solución:

1. Se tiene: $[\![x+2]\!]=[\![x]\!]+2$

2. Luego: $2([\![x]\!]+2)^2-7[\![x]\!]\le 23$

$2([\![x]\!]^2+4[\![x]\!]+4)-7[\![x]\!]\le 23$

$2[\![x]\!]^2+[\![x]\!]-15\le 0$, hacer $[\![x]\!]=y$

$2y^2+y-15\le 0$

$(2y-5)(y+3)\le 0$ $+\ \ -3\ \ \ominus\ \ 5/2\ \ +$

$\Rightarrow\ y\in[-3,5/2]$

3. Analizar:

¿Qué valores toma "x" si $y=[\![x]\!]\in\left[-3,\frac{5}{2}\right]$

Veamos:

Si $\underbrace{[\![x]\!]}_{\text{es entero}}\in\left[-3,\frac{5}{2}\right]$ 3*

entonces $[\![x]\!]=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$

Ahora:

Si $[\![x]\!]=-3 \Leftrightarrow -3\le x<-2$

$[\![x]\!]=-2 \Leftrightarrow -2\le x<-1$

$[\![x]\!]=-1 \Leftrightarrow -1\le x<0$

$[\![x]\!]=0 \Leftrightarrow 0\le x<1$

$[\![x]\!]=1 \Leftrightarrow 1\le x<2$

$[\![x]\!]=2 \Leftrightarrow 2\le x<3$

4) **CONCLUSIÓN:** $C_S=x\in[-3,3[$

Otra forma:

De 3* : $-3\le[\![x]\!]\le\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \quad [\![x]\!]\ge -3 \ \wedge\ [\![x]\!]\le\frac{5}{2}$

$x\ge -3 \ \wedge\ [\![x]\!]\le 2$

$x<2+1=3$

$\Leftrightarrow \quad -3\le x<3$

⑤ Expresar en forma de intervalo el conjunto A, si:

$$A=\left\{x\in I\!R\,/\,\underbrace{(2[\![x-1]\!]-3[\![x+[\![x]\!]]\!]\ge 5)}_{p}\to\underbrace{\left(\frac{x^2-1}{|x-2|}\le\frac{x+2}{3}\right)}_{q}\right\}$$

Solución:

$$P: \quad 2\llbracket x-1\rrbracket - 3\llbracket x+\llbracket x\rrbracket\rrbracket \geq 5$$

$$\Rightarrow \quad 2(\llbracket x\rrbracket - 1) - 3(\llbracket x\rrbracket + \llbracket x\rrbracket) \geq 5$$

$$-4\llbracket x\rrbracket - 2 \geq 5$$

$$4\llbracket x\rrbracket + 2 \leq -5$$

$$\llbracket x\rrbracket \leq -\tfrac{7}{4}$$

$$\llbracket x\rrbracket \leq -2$$

$$x \leq -2+1$$

$$x \leq -1$$

$$q: \quad \frac{x^2-1}{|x-2|} \leq \frac{x+2}{3}$$

$$\text{como } |x-2| = \begin{cases} x-2 \ , & \text{si } x \geq 2 \ , \ x \neq 2 \\ -(x-2) \ , & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Luego:

q_1) Para $x > 2$: $\dfrac{x^2-1}{x-2} \leq \dfrac{x+2}{3}$

Solución: $Q_1 = \varnothing$

q_2) **Para** $x < 2$: $\dfrac{x^2-1}{-(x-2)} \leq \dfrac{x+2}{3}$

Solución: $Q_2 = \left[-\dfrac{\sqrt{7}}{2}, \dfrac{\sqrt{7}}{2} \right]$

CONCLUSIÓN: $p \to q \equiv \sim p \vee q$

$$A = \left\{ x \in IR \Big/ x \geq -\frac{\sqrt{7}}{2} \ , \ x \neq -2 \right\}$$

6 Expresar el conjunto A en términos de intervalos:

$$A = \left\{ y = \left| x^2 \left\llbracket \frac{3-x}{2} \right\rrbracket - 1 \right| \Big/ x \in]-3,-1] \right\}$$

Solución:

1. En primer lugar, hallar el valor entero de: $\left\llbracket \dfrac{3-x}{2} \right\rrbracket$ cuando $x \in]-3,-1]$.

Así:

$$x \in]-3,-1]$$

$$\Updownarrow$$

$$-3 < x \leq -1$$

sumar 3: $\quad 3 > -x \geq 1$

$$3+3 > 3-x \geq 3+1$$

por $\frac{1}{2}$ $\quad 6 > 3-x \geq 4$

$$3 > \frac{3-x}{2} \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \left\llbracket \frac{3-x}{2} \right\rrbracket = 2$$

2. En segundo lugar, el término $y = x^2 \left\llbracket \dfrac{3-x}{2} \right\rrbracket - 1$ toma la forma:

   $y = 2x^2 - 1$, cuando $-3 < x \leq -1$

	-3	$<$ x	$\leq$	-1
por -1 :	3	$>$ $-x$	$\geq$	1
al cuadrado :	9	$>$ x^2	$\geq$	1
por 2 :	18	$>$ $2x^2$	$\geq$	2
sumar -1 :	17	$>$ $2x^2-1$	$\geq$	1
conclusión :		$y \in [\ 1\ ,\ 17\ [$		

7 Expresar el conjunto A como intervalos:

$$A = \{ x^2 - \llbracket\, |x-1| + 2 \rrbracket + \llbracket x \rrbracket \ / \ x \in]0,2] \}$$

Solución:

Hacer:

$$y = x^2 - \llbracket |x-1| + 2 \rrbracket + \llbracket x \rrbracket$$

$$= \begin{cases} x^2 - \llbracket x-1+2 \rrbracket + \llbracket x \rrbracket & , \ 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - \llbracket -x+1+2 \rrbracket + \llbracket x \rrbracket & , \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - \left(\llbracket x+1 \rrbracket \right) + \llbracket x \rrbracket & , \ 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - \left(\llbracket -x+3 \rrbracket \right) + \llbracket x \rrbracket & , \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - \left(\llbracket x \rrbracket + 1 \right) + \llbracket x \rrbracket & , \ 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - \left(\llbracket -x \rrbracket + 3 \right) + \llbracket x \rrbracket & , \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - [\![x]\!] - 1 + [\![x]\!] & , \ 1 \le x \le 2 \\ x^2 - [\![-x]\!] - 3 + [\![x]\!] & , \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & , \ 1 \le x \le 2 \\ x^2 - 3 + \underbrace{[\![x]\!]}_{0} - \underbrace{[\![-x]\!]}_{-1} & , \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

De: $0 < x < 1$ $\to$ $[\![x]\!] = 0$

$\qquad\qquad\quad\;\to$ $0 > -x > -1 \to [\![-x]\!] = -1$

Luego: $y = \begin{cases} x^2 - 1 & , \ 1 \le x \le 2 \\ x^2 - 2 & , \ 0 < x < 1 \end{cases}$

Ahora, hallemos los valores de y :

a) Si $\quad 1 \le x \le 2$

$\Rightarrow \quad 1 \le x^2 \le 4$

$\Rightarrow \quad 1 - 1 \le x^2 - 1 \le 4 - 1$

$\Rightarrow \quad 0 \le \underbrace{x^2 - 1}_{y} \le 3 \iff y \in [0\,,3]$

b) Si $\quad 0 < x < 1$

$\Rightarrow \quad 0 < x^2 < 1$

$\Rightarrow \quad -2 < \underbrace{x^2 - 2}_{y} < -1 \iff y \in]-2\,,-1]$

CONCLUSIÓN: $A =]-2,-1[\cup [0,3]$

(8) Expresar el conjunto A como intervalos

$$A = \{ x^2 - [\![\, |x+1| + 2 \,]\!]\, x + [\![x]\!] \,/\, x \in \langle 0, 2] \}$$

Solución:

Hacer $\quad y = x^2 - [\![\,|x+1|+2\,]\!]\, x + [\![x]\!]$

En: $0 < x < 2$, se cumple $|x+1| = x+1$

Luego: $\quad y = x^2 - [\![\, x+1+2 \,]\!]\, x + [\![x]\!]$

$\qquad\qquad\; = x^2 - [\![\, x+3 \,]\!]\, x + [\![x]\!]$

$\qquad\qquad\; = x^2 - ([\![x]\!] + 3)\, x + [\![x]\!]$

$0 < x < 1$ $\qquad\qquad$ $1 \le x \le 2$

0 $\qquad$ $[\![x]\!] = 0$ $\qquad$ 1 $\qquad$ $[\![x]\!] = 1$ $\qquad$ 2

Ahora, hallemos el entero $[\![x]\!]$:

a) Si $\quad 0 < x < 1 \Rightarrow y = x^2 - (0+3)\,x + 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = x^2 - 3x$

b) Si $\quad 1 \le x < 2 \Rightarrow y = x^2 - (1+3)\,x + 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = x^2 - 4x + 1$

c) Si $\quad x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - (2+3)\,(2) + 2 = -4$

acotar, para obtener "y"

CONCLUSIÓN: $y \in [-3,-2\rangle \cup \{-4\}$

(9) Resolver: $[\![x]\!] < x$

Solución:

Si $\quad x = n \in \mathbb{Z} : [\![n]\!] < n$

$\qquad\qquad n < n$ es FALSO

Si $\quad x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ se cumple: $[\![x]\!] < x$

Pues: $[\![x]\!] = n \iff n \le x < n+1 \quad , \ n \in \mathbb{Z}$

$\qquad\qquad\iff [\![x]\!] \le x < [\![x]\!] + 1 , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

Se cumple : $[\![x]\!] < x < [\![x]\!] + 1 , \ \forall\, x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$

Por tanto : $C_S = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

(10) Resolver: $[\![\, 5x - 2 \,]\!] = 3x - 1$

Solución:

1. Hacer: $\ 3x - 1 = n \quad , \ n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{n+1}{3}$$

2. Luego: $\quad [\![\, 5x - 2 \,]\!] = n$

$\iff \quad n \le 5x - 2 < n + 1$

$\qquad 3x - 1 \le 5x - 2 < 3x - 1 + 1$

$\qquad 3x - 1 \le 5x - 2 < 3x$

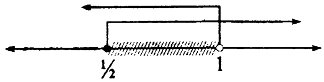
$3x - 1 \le 5x - 2 \quad \wedge \quad 5x - 2 < 3x$

$3x - 5x \le -2 + 1 \quad \wedge \quad 5x - 3x < 2$

$-2x \le -1$

$$2x \geq 1 \quad \wedge \quad 2x < 2$$

$$x \geq \tfrac{1}{2} \quad \wedge \quad x < 1$$



$$\tfrac{1}{2} \leq x < 1$$

$$\tfrac{1}{2} \leq \frac{n+1}{3} < 1$$

$$\tfrac{3}{2} \leq n+1 < 3$$

$$\tfrac{1}{2} \leq \; n \; < 2$$

$$\Rightarrow \qquad n = 1$$

Luego: $x = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$; $C_S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

(11) Resolver: $\dfrac{|x| - [\![x]\!]}{[\![x]\!] - 2} \geq 0$

Solución:

Analizar $|x|$

a) Si $x < 0$ la inecuación es:

$$\frac{-x - [\![x]\!]}{[\![x]\!] - 2} \geq 0$$

$$\frac{x + [\![x]\!]}{[\![x]\!] - 2} \leq 0$$

Aplicando regla de los signos:

$$x + [\![x]\!] \leq 0 \quad \wedge \quad [\![x]\!] - 2 > 0$$
$$x \leq 0 \qquad\qquad x \geq 3$$
$$\vee$$
$$x + [\![x]\!] \geq 0 \quad \wedge \quad [\![x]\!] - 2 < 0$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad x < 2$$

Luego, el conjunto solución es:

$$A = [\,0\,,2\,[$$

como : $x < 0 \;\wedge\; 0 \leq x < 2$

Por tanto : $C_A = \phi$

b) Si $x \geq 0$, obtenemos:

$$\frac{x - [\![x]\!]}{[\![x]\!] - 2} \geq 0$$

Aplicar regla de los signos:

$$x - [\![x]\!] \geq 0 \quad \wedge \quad [\![x]\!] - 2 > 0$$
$$I\!R \qquad\qquad x \geq 3$$
$$\vee$$
$$x - [\![x]\!] \leq 0 \quad \wedge \quad [\![x]\!] - 2 < 0$$
$$\mathbb{Z} \qquad\qquad x < 2$$

El conjunto solución es:

$$C_B = [\,3\,,\infty\,[\; \cup \{\,\ldots,-3\,,-2\,,-1\,,0\,,1\,\}$$

$$\therefore \quad C_S = C_A \cup C_B = C_B$$

(12) Sean los conjuntos:

$$A = \left\{\, y \in I\!R \,\middle/\, y = x\left[\!\!\left[x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x} \right]\!\!\right] \right]\!\!\right] \,,\; x < -1 \right\}$$

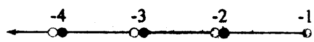
$$B = \{\, y \in I\!R \,/\, y = x - [\![x]\!] \,,\, x \in I\!R \,\}$$

Hallar $B \cap \complement A$.

Solución:

a) Hallar A

Si $x < -1$



Hacer: $k-1 \leq x < k \qquad , \; k = -1, -2, \ldots$

$$-(k-1) \geq -x > -k$$

$$-\frac{1}{k-1} \leq -\frac{1}{x} < -\frac{1}{k} \qquad , \; k = -1, -2, \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x} \right]\!\!\right] = 0$$

por x : $\qquad x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x} \right]\!\!\right] = x\,(0)$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\!\!\left[x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x} \right]\!\!\right] \right]\!\!\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad y = x\left[\!\!\left[x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x} \right]\!\!\right] \right]\!\!\right] = 0$$

Por tanto: $A = \{\,0\,\}$

b) Hallar B

Por propiedad de máximo entero:

$$[\![x]\!]=K \quad \leftrightarrow \quad K\le x<K+1 \quad \forall\, x\in I\!R$$

$$[\![x]\!]\le x<[\![x]\!]+1$$

Sumar $-[\![x]\!]$: $\quad 0\le \underbrace{x-[\![x]\!]}_{y}<1$

$$0\le \; y \; <1$$

Luego: $B=[0\,,1\rangle$

c) Se pide hallar $B\cap \complement A=B-A$

$$=\langle 0\,,1\rangle$$

13 Sean:

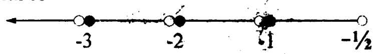
$$A=\left\{\, y\in I\!R \Big/ y=x\left[\!\!\left[\, x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x}\right]\!\!\right]\right]\!\!\right]\,,\; x<-\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$B=\{\, y\in I\!R/ y=[\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]}\,,\,0\le x<1\}$$

Hallar: $B\;-\;A$

Solución:

a) Hallar A



Para $k=-1,-2,-3,\ldots$

$$k-1\le x<k \quad \vee \quad -1\le x<-\tfrac{1}{2}$$

$$-(k-1)\ge -x>-k \quad \vee \quad 1\ge -x>\tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{k-1}\le -\tfrac{1}{x}<-\tfrac{1}{k} \quad \vee \quad 1\le -\tfrac{1}{x}<2$$

$$\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x}\right]\!\!\right]=0 \quad \vee \quad \left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x}\right]\!\!\right]=1$$

$$\downarrow$$

$$x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x}\right]\!\!\right]=x(0)=0 \qquad x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x}\right]\!\!\right]=x\,,\,-1\le x<-\tfrac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\!\!\left[\, x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x}\right]\!\!\right]\right]\!\!\right]=0 \qquad \left[\!\!\left[\, x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x}\right]\!\!\right]\right]\!\!\right]=[\![x]\!]=-1$$

$$y=x\left[\!\!\left[\, x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x}\right]\!\!\right]\right]\!\!\right]=0 \qquad y=x\left[\!\!\left[\, x\left[\!\!\left[-\tfrac{1}{x}\right]\!\!\right]\right]\!\!\right]=-x$$

$$y=-x\,,\,-1\le x<-\tfrac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$1\ge \underbrace{-x}_{y}>\tfrac{1}{2}$$

Luego: $\quad y=0 \quad \vee \quad y\in\left\langle \tfrac{1}{2},1\right]$

$$\Rightarrow \quad A=\{0\}\cup\left\langle \tfrac{1}{2},1\right]$$

b) Hallar B

Si $\;0\le x<1 \;\Rightarrow\; [\![x]\!]=0$

Luego: $\quad y=[\![x]\!]+\sqrt{x-[\![x]\!]}$

se convierte $\quad y=0+\sqrt{x-0}$

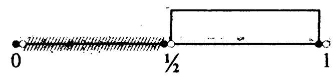
$$=\sqrt{x}\;,\;0\le x<1$$

$$\downarrow$$

$$0\le \underbrace{\sqrt{x}}_{y}<1$$

$\Rightarrow \quad y\in[0\,,1\rangle$

Por tanto: $B-A=\langle 0\,,1/2]$



14 Determinar por extensión el conjunto

$$A=\left\{\left[\!\!\left[\frac{|x-2|-3}{x+4}\right]\!\!\right] \Big/ x\in\langle 0,5]\right\}$$

15 Resolver: $\quad [\![x-2]\!]^2<4$

16 Resolver: $\quad [\![x-1]\!]^2+[\![x-1]\!]-6=0$

17 Resolver: $\quad 5\,[\![x]\!]+2\,[\![x+[\![x]\!]]\!]\ge 2$

18 Resolver: $\quad [\![x+|x-1|]\!]-2[\![2x-3]\!]-5<0$

19 Resolver: $\quad [\![x]\!]^4-5[\![x]\!]^2+4\le 0$

20 Resolver: $\quad [\![|x^2-x|-2]\!]<2$

21 Resolver: $\quad [\![x^2-3x-5]\!]\le -8$

22 $\left[\!\!\left[\dfrac{|x-3|-|2x-1|-3}{3}\right]\!\!\right]=1$

23 $\left[\!\!\left[\dfrac{|x-2|-3}{5-x}\right]\!\!\right]<-\dfrac{13}{3}$

24 $\big|\,[\![x-1]\!]-2[\![x]\!]\,\big|<2$

PROBLEMAS PROPUESTOS

I SUPREMOS E ÍNFIMOS EN INTERVALOS

a) Hallar: el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de los números reales, si existen.

1. $A =]0,1[$
2. $B =]-\infty,3[$
3. $C =]3,+\infty[$
4. $D = [-3,3]$
5. $E = [-3,+\infty[$
6. $F =]-\infty,-3[$
7. $G =]-3,-1[\cup]1,3[$
8. $H = \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$
9. $I = \left]-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right[$
10. $J =]m,n[\quad , \quad m<n$
11. $K =]-2,5[$
12. $L =]-3,4[$

b) Aplicando la definición de supremo y de ínfimo, probar en cada caso, de los ejercicios del 1 al 10, la existencia de tales elementos.

c) Diga cuáles de los conjuntos es acotado. Justifique su respuesta.

II SUPREMOS E ÍNFIMOS EN SUCESIONES

a) Hallar, si existen, el supremo e ínfimo de cada uno de las siguientes sucesiones de números reales.

1. $((-1)^n)_{n\geq 0}$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^n_{n\geq 0}$
3. $\left(-\frac{1}{2}\right)^n_{n\geq 0}$
4. $\left(\frac{2}{3}\right)^n_{n\geq 0}$
5. $\left(-\frac{2}{3}\right)^n_{n\geq 1}$
6. $\left((-1)^n\frac{2n+1}{n}\right)_{n\geq 1}$
7. $\left((-1)^n\frac{1-n}{n}\right)_{n\geq 1}$
8. $\left(\frac{3n-2}{2n+1}\right)_{n\geq 1}$
9. $(n+1)_{n\geq 0}$
10. $\left(\frac{n^2+1}{n-1}\right)_{n\geq 2}$
11. $\left(3+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)_{n\geq 0}$
12. $\left(3+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)_{n\geq 0}$
13. $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$
14. $\left(3+\frac{n+1}{n}\right)_{n\geq 1}$
15. $\left(-2+\frac{2n}{n+1}\right)_{n\geq 1}$
16. $\left(2+\frac{5n+1}{n+1}\right)_{n\geq 1}$
17. $\left(1+\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 0}$
18. $\left(3+\frac{4}{n}\right)_{n\geq 1}$
19. $\left(\frac{3-n}{n+1}\right)_{n\geq 0}$
20. $\left(\frac{5-2n}{n+1}\right)_{n\geq 0}$
21. $\left(-2(-1)^n+\frac{n+1}{n}\right)_{n\geq 1}$

Soluciones de I:

1) $Sup\ A = 1$, $inf\ A = 0$

2) $Sup\ B = 3$, $inf\ B$ no existe, porque B no es acotado inferiormente.

3) $inf\ C = 3$, $Sup\ C$ no existe, porque C no es acotado superiormente.

4) $Sup\ D = máx\ D = 3$, $inf\ D = min\ D = -3$

5) $inf\ E = mín\ E = -3$, $Sup\ E$ no existe, porque E no es acotado superiormente.

6) $Sup\ F = -3$, $inf\ F$ no existe, porque F no es acotado inferiormente.

7) $Sup\ G = 3$, $inf\ G = -3$.

8) $Sup\ H = \frac{1}{2}$; $inf\ H = mín\ H = \frac{1}{3}$.

9) $Sup\ I = -\frac{1}{3}$, $inf\ I = -\frac{1}{2}$.

10) $Sup\ J = n$, $inf\ J = m$.

11) $Sup\ K = 5$, $inf\ K = -2$.

12) $Sup\ L = 4$, $inf\ L = -3$.

Soluciones de II:

1) $Sup = máx = 1$, $inf = mín = -1$

2) $Sup = máx = 1$, $inf = 0$

3) $Sup = máx = 1$, $inf = mín = -\frac{1}{2}$

4) $Sup = máx = \frac{2}{3}$, $inf = 0$

5) $Sup = máx = \frac{4}{9}$, $inf = mín = -\frac{2}{3}$

6) $Sup = máx = \frac{5}{2}$, $inf = mín = -3$

7) $Sup = 1$, $inf = -1$

8) $inf = mín = -2$, $sup = \frac{3}{2}$

9) $inf = mín = 1$, Sup no existe, porque la sucesión no es acotado superiormente.

10) $inf = mín = 5$, Supremo no existe porque la sucesión no es acotado superiormente.

11) $Sup = máx = 4$, $inf = 3$

12) $inf = mín = \frac{7}{3}$, $sup = máx = 4$

13) $Sup = máx = 2$, $inf = 1$

14) $sup = máx = 5$, $inf = 4$

15) $Sup = 0$, $inf = mín = -1$

16) $inf = mín = 5$, $Sup = 7$

17) $inf = mín = 1$, $Sup = 2$

18) $Sup = máx = 7$, $inf = 3$

19) $Sup = máx = 3$, $inf = -1$

20) $inf = -2$, $Sup = máx = 5$

21) $inf = -1$, $Sup = máx = 4$.

III DADAS LAS SIGUIENTES SERIES NUMÉRICAS, HALLAR:

a) La n-ésima suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

b) Hallar, si existen, el supremo e ínfimo de cada una de las series numéricas.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{5}{8}\right)^n$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^n$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

7) $\sum_{n=0}^{\infty} 8\left(\frac{7}{8}\right)^n$

8) $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$

9) $\sum_{n=0}^{\infty} \left[3+\left(\frac{10}{11}\right)^n\right]$

10) $\sum_{n=0}^{\infty} \left[3+\left(\frac{5}{8}\right)^n\right]$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{10}{11}\right)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n$

13) $\sum_{n=}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$

14) $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{7}{10}\right)^n$

15) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{100}{101}\right)^n$

16) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

18) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$

19) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$

21) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$

22) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^{k+1}}$

23) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2+k}$

24) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k}$

25) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3^k}$

26) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}+1}$

27) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k^2-1}$

28) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$

29) $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^2-5k+6}$

30) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+7k+12}$

Solución de III:

1) $Sup = 2$, $inf = 1$
2) $inf = 1$, $Sup = 3$
3) $inf = 3$, $Sup = 8$
4) $Sup = 1$, $inf = \frac{7}{9}$
5) $Sup = 1$, $inf = \frac{4}{7}$
6) $Sup = 5$, $inf = \frac{2}{3}$
7) $inf = 8$, $Sup = 40$
8) $inf = 3$, $Sup = 33$
9) $inf = 4$, Supremo no tiene.
10) $inf = 4$, Supremo no tiene.
11) $Sup = 1$, $inf = \frac{11}{21}$
12) $inf = 1$, $Sup = \frac{7}{2}$
13) $inf = 1$, $Sup = \frac{7}{5}$
14) $inf = 3$, $Sup = 10$
15) $inf = 1$, $Sup = 101$
16) $inf = \frac{1}{3}$, $Sup = \frac{3}{4}$
17) $inf = \frac{1}{24}$, $Sup = \frac{1}{4}$
18) $inf = \frac{1}{3}$, $Sup = \frac{1}{2}$
19) $mín = \frac{1}{6}$, $Sup = \frac{1}{4}$
20) $mín = \frac{4}{3}$, $Sup = 2$
21) $inf = \frac{1}{2}$, $Sup = 1$
22) $inf = 0$, $Sup = \frac{1}{2}$
23) $inf = \frac{5}{2}$, $Sup = 5$
24) $mín = \frac{3}{2}$, $Sup = 3$
25) $inf = \frac{3}{4}$, $Sup = 1$
26) $inf = \frac{1}{2}$, $Sup = \frac{2}{3}$
27) $inf = 1$, $Sup = \frac{9}{4}$
28) $imf = \frac{1}{6}$, $Sup = \frac{1}{2}$
29) $inf = 1$, $Sup = 1$
30) $inf = \frac{1}{20}$, $Sup = \frac{1}{4}$

IV Dadas las siguientes funciones reales de variable real, se pide hallar el supremo y/o el ínfimo, si existen.

1) $f(x) = 3x - 1$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$
2) $f(x) = 4 - 5x$, $x \in \langle 0, 3 \rangle$
3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in I\!R$
4) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 9}$, $x \in I\!R$
5) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 2}$, $x \in I\!R$
6) $f(x) = 2^{-x}$
7) $f(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$
8) $f(x) = 3 + e^{-2x}$
9) $f(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$
10) $f(x) = 5^{-x}$, $x \in \langle 0, +\infty \rangle$
11) $f(x) = 2 + e^{-x}$, $x \in I\!R$
12) $f(x) = \frac{1}{3} + e^{-2x}$, $x \in I\!R$
13) $f(x) = 4 + 5e^{-x}$, $x \in I\!R$
14) $f(x) = 2 + 3e^{-x} + 4e^{-2x}$, $x \in I\!R$
15) $f(x) = 5 + 2e^{-3x} + 5e^{-5x}$, $x \in I\!R$
16) $f(x) = 4 + 2e^{-2x}$, $x \in I\!R$
17) $f(x) = 2 + e^{-x^2}$, $x \in I\!R$
18) $f(x) = 5 + e^{-x} + 2e^{-2x}$, $x \in I\!R$
19) $f(x) = 2 + 3^{-x} + 2^{-x}$, $x \in I\!R$
20) $g(x) = 5 + e^{-2x} + 3e^{-3x}$, $x \in I\!R$

Solución de IV:

1) $Sup\ f = 2$, $inf = -4$
2) $Sup\ f = 4$, $inf(f) = -11$
3) $Sup\ f = máx\ f = 1$, $inf\,(f) = 0$
4) $inf\,(f) = 0$, $máx\ f = Sup\ f = \frac{4}{9}$
5) $Sup\ f = máx\ f = \frac{3}{2}$, $inf\,(f) = 0$
6) $inf\,(f) = 0$, $Sup(f)$ no existe, porque f no es acotado superiormente.
7) $inf\,(f) = \frac{1}{2}$, $Sup\,(f)$ no tiene, porque f no esta acotada superiormente.
8) $inf\,(f) = 3$, $Sup\,(f)$ no existe porque f no está acotado superiormente.
9) $inf\,(f) = 4$, $Sup\,(f)$ no existe porque f no está acotado superiormente.
10) $Sup(f) = 1$, $inf\,(f) = 0$
11) $inf\,(f) = 2$, $Sup\,(f)$ no existe.
12) $inf(f) = \frac{1}{3}$, $Sup\,(f)$ no existe.
13) $inf\,(f) = 4$, $Sup\,(f)$ no existe.
14) $inf\,(f) = 2$, $Sup\,(f)$ no existe.
15) $inf\,(f) = 5$, $Sup\,(f)$ no existe.
16) $inf\,(f) = 4$, $Sup\,(f)$ no existe.
17) $inf\,(f) = 2$, $Sup\,(f) = máx\ f = 3$
18) $inf\,(f) = 5$, $Sup\,(f)$ no existe.
19) $inf\,(f) = 2$, $Sup\,(f)$ no existe.
20) $inf\,(f) = 5$, $Sup\,(f)$ no existe.

V A partir de algunas desigualdades, hallar el supremo e ínfimo para $y = f(x)$.

1) Si $-2 < x < 2$, hallar el supremo e ínfimo para $y = 3 - 2x$.

2) Si $-1 < 3 - 5x < 3$, hallar el supremo e ínfimo para $y = 8 - 3x$.

3) Si $17 < x < 26$, hallar el supremo e ínfimo para $y = \sqrt{x-1}$.

4) Si $-15 < -3 - 2x < 13$, hallar el supremo e ínfimo para $y = x + 8$.

5) Si $-2 < x < 2$, hallar el supremo de $y = \frac{4}{x^2 - 4}$. **R:** -1

6) Si $4 < \frac{2}{x-1} < 6$, hallar el supremo e ínfimo para $y = 6x - 1$. **R:** 8, 7

7) Si $3 < x < 7$, hallar el supremo e ínfimo para $y = \frac{x^2 - 5}{x - 1}$. **R:** $\frac{22}{3}$, 2

8) Si $|x - 6| < 2$, hallar el supremo e ínfimo para $y = \frac{x-2}{x-3}$. **R:** 6 , $\frac{2}{5}$

9) Si $|x + 3| < 1$, hallar el supremo e ínfimo para $y = 4 - 3x$.

10) Si $\frac{3}{4} < \frac{2}{x-1} < 5$, hallar el supremo e ínfimo para $y = 5 - 2x$.

11) Si $\frac{2}{5} < \frac{x-2}{x-3} < 6$, hallar el supremo e ínfimo para $y = x - 6$, si existen.

CAPITULO 6

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

1. INTRODUCCIÓN

Teniendo como referencia el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ o los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,4,\ldots\}$, se construyen proposiciones $P(n)$, válidos $\forall\, n \in \mathbb{N}$, o $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, o válidos a partir de un n_0 con $n \geq n_0$.

Por ejemplo:

1) $P(n)$: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ es válido $\forall\, n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $P(n)$: $\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 1$ es válida $\forall\, n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $P(n)$: $S_n = 2R(n-2)$, es válida $\forall\, n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $R = 90°$

   S_n *es la suma de la medida de los ángulos interiores de un polígono de "n" lados.*

4) $|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|$ **es válida** $\forall\, n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$.

5) $(1+p)^n \geq 1 + np$, con $p \geq -1$, $p \in \mathbb{R}$, es válida $\forall\, n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

6) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ es válida $\forall\, n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

En el ejemplo (1) ¿como saber que la suma

$$P(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

es válida para todo $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$?

Habríamos que empezar verificando para $n = 1$, para $n = 2$, para $n = 3$ y así sucesivamente.

Pero, hasta qué valor de "n" estaremos verificando para afirmar que la proposición $P(n)$ es válida $\forall\, n \geq 1$, $n \in I\!N$.

Para afirmar que una proposición "$P(n)$ es válida $\forall\, n \geq 1$, $n \in I\!N$" existe un método conocido con el nombre de **INDUCCIÓN MATEMÁTICA**. En términos lógicos éste método consiste en verificar la siguiente inferencia lógica:

$$\{P(1) \wedge [P(h) \Rightarrow P(h+1)]\} \Rightarrow P(n)$$

"Si $P(1)$ es verdadero y $[P(h) \Rightarrow P(h+1)]$ es verdadero, implica que $P(n)$ es verdadera"

Pero, antes de entrar en detalles para su respectiva aplicación del método de demostración por inducción matemática, haremos la correspondiente exposición teórica que garantiza la validez del principio de **INDUCCIÓN MATEMÁTICA**.

2. POSTULADO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Sea $I\!N$ el conjunto de los números naturales y A un subconjunto de $I\!N$. Supongamos, que sean verdaderos las dos siguientes proposiciones:

P_1 : $0 \in A$

P_2 : $h \in A$ implica $(h+1) \in A$.

Entonces $P_n : n \in A$ es verdadero.

En términos de inferencia lógica es: $\{\underbrace{0 \in A}_{P_1} \wedge [\underbrace{h \in A}_{P_h} \Rightarrow \underbrace{(h+1) \in A}_{P_{h+1}}]\} \Rightarrow \underbrace{n \in A}_{P_n}$

$$\{P_1 \wedge [P_h \Rightarrow P_{h+1}]\} \Rightarrow P_n$$

Este postulado nos dice: si un conjunto A goza de las propiedades

$\left\{\begin{array}{l} 0 \in A \\ h \in A \Rightarrow h+1 \in A \end{array}\right.$, entonces $n \in A$, $\forall\, n \in I\!N$. Por tanto $A \subset I\!N$ o $A = I\!N$.

3. TEOREMA (PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA)

Sea A un conjunto de números naturales y n_0 un número natural fijo, supongamos que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1) $n_0 \in A$
2) Si al suponer que $[h\in A \ , \ \forall\ h \geq n_0]$ implica $[(h+1)\in A]$

   Entonces $[n\in A \ , \ \forall\ n\geq n_0]$. Es decir $\{n\in \mathbb{N}/n\geq n_0\}\subset A$

<u>Demostración</u>:

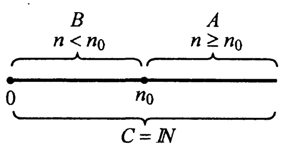
Si pruebo que $(h+1)\in A$ es verdadero, suponiendo que $[h\in A \ , \ \forall\ h\geq n_0]$ es verdadero, entonces estaré probando que la **CONDICIONAL**:

$[h\in A \ , \ \forall\ h\geq n_0] \Rightarrow [(h+1)\in A]$ es **VERDADERO**.

Por tanto, si $\{\underset{V}{(n_0\in A)} \wedge [\underset{V}{h\in A} \Rightarrow \underset{V}{(h+1)\in A} \ , \ \forall\ h\geq n_0]\}$ implica $[(h+1)\in A]$

Veamos la demostración:

Paso 1: Sea $B=\{n\in \mathbb{N}\ /n<n_0\}$



Paso 2: Sea $C=B\cup A$

Paso 3: El conjunto C definido como la unión de B y A, goza de las siguientes propiedades.

1) $0\in C$ porque $\begin{cases} \text{En } B \text{ se cumple } n<n_0 \ \ \forall\ n\in \mathbb{N}\text{, en particular si } n=0\text{, se} \\ \text{cumplirá que } 0<n_0\text{. Luego } 0\in B\subset B\cup A=C \Rightarrow \underline{\underline{0\in C}} \\ \text{y si } n_0=0\text{, entonces por la hipótesis (1), se cumple} \\ n_0=0\in A\subset B\cup A=C \Rightarrow \underline{\underline{0\in C}}. \end{cases}$

2) Debo probar que $(h+1)\in C$, siempre que $h\in C$.

Veamos:

a) Supongamos que $h\in B \Rightarrow h<n_0$, de donde $h+1\leq n_0 \Longleftrightarrow h+1<n_0 \ \vee \ h+1=n_0$

   i) si $h+1<n_0$, entonces es el caso $(h+1)\in B\subset B\cup A=C \Rightarrow \underline{\underline{(h+1)\in C}}$

   ii) si $h+1=n_0$, entonces $h+1=n_0\in A\subset B\cup A=C \Rightarrow \underline{\underline{(h+1)\in C}}$

b) En la hipótesis (2) tenemos: si $h\in A$ implica que $(h+1)\in A\subset B\cup A=C$
   $\Rightarrow (h+1)\in C \ , \ \forall\ h\geq n_0$.

3) En *a*) y *b*) hemos probado que a partir del supuesto $h \in A$ implica que $(h+1) \in C$.

El supuesto $h \in C$ es porque $\begin{cases} h \in B \subset B \cup A = C \;\Rightarrow\; h \in C \\ h \in A \subset B \cup A = C \;\Rightarrow\; h \in C \end{cases}$

4) En consecuencia, según el Postulado de Inducción:

si $[0 \in C \;\wedge\; (h \in C \;\Rightarrow\; h+1 \in C)] \;\Rightarrow\; C = B \cup A = I\!N$

5) ***Conclusión***: Dado un número natural "n" cualquiera tal que $n \geq n_0$, implica que $n \in A$, ya que si $n < n_0$ implica que $n \in B$.

RESUMEN

POSTULADO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA:

Sea $A \subset I\!N$

Si $\{[0 \in A] \;\wedge\; [h \in A \Rightarrow h+1 \in A]\} \Rightarrow n \in A = I\!N$

TEOREMA (PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA)

Sea A un conjunto de números naturales y n_0 un número natural fijo.

Si $\{[n_0 \in A] \;\wedge\; [h \in A \Rightarrow h+1 \in A \;,\; \forall\, h \geq n_0]\} \Rightarrow [n \in A \;,\; \forall\, n \geq n_0]$

4. A partir del **TEOREMA** del Principio de **INDUCCIÓN MATEMÁTICA**, se deducen dos corolarios muy importantes de uso práctico.

COROLARIO 1 (DEFINICIÓN RECURSIVA)

Sea n_0 un número natural fijo y supongamos que:

1) Se ha definido el elemento $a_{n_0} \in A$.

2) Si se supone que ha sido definido el elemento $a_h \in A$, para $h \geq n_0$ entonces queda definida también el elemento $a_{h+1} \in A$.

Por tanto, para todo número natural $n \geq n_0$ queda definido el elemento $a_n \in A$.

Prueba:

Debo probar que $(h+1) \in A$.

Veamos:

Paso 1 : Sea $A = \{ n \in I\!N \,/\, a_n$ está definido$\}$, de modo que:

$$\boxed{n \in A \text{ sii } a_n \text{ está definido}}$$

Paso 2: Si $\underline{\underline{n_0 \in A}} \Rightarrow a_{n_0}$ está definido, según la hipótesis (1) y por el PASO 1.

Paso 3: Supongamos que $h \geq n_0 \wedge \underline{\underline{h \in A}}$, entonces a_h está definido y en virtud de la hipótesis (2) se tendrá que a_{h+1} está definido y por tanto $(h+1) \in A$.

Paso 4: Aplicando el teorema (principio de inducción matemática) se cumplirá que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $n \in A$ y el elemento a_n está definido para todo $n \geq n_0$.

La **DEFINICIÓN RECURSIVA** o **DEFINICIÓN POR INDUCCIÓN** consiste en lo siguiente:

Deseamos definir, por inducción, un elemento cualquiera del conjunto $A = \{ a_n / n \geq n_0 \;,\; n \in I\!N \}$.

Para ello, se da una proposición definida recursivamente:

$$\begin{cases} i) & \text{En primer lugar, se define el primer elemento } a_{n_0} \\ ii) & \text{Se supone que } a_h \text{ ha sido definido } \forall\, h \geq n_o \\ iii) & \text{Apoyándose que existe } a_h \text{ se define el elemento } a_{h+1} \end{cases}$$

Luego, por el principio de inducción matemática, afirmamos que a_n ha sido definido para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo 1 Dada la siguiente proposición definida recursivamente.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \quad n_0 = 1 \\ a_h = h\,a_{h-1} \;,\; h > 1 \;,\; h \in I\!N \text{ . En este caso } n_0 = 1 \text{ y } a_{n_0} = a_1 = 1 \end{cases}$$

a) Determinar una fórmula para a_n .

b) Probar por inducción matemática que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Solución de a)

1) Haciendo uso de la definición recursiva, obtenemos:

A partir de: $a_h = h\,a_{h-1}$

si $h=2$ $\quad a_2 = 2\cdot a_1$

$\quad = 2\cdot 1$

si $h=3$ $\quad a_3 = 3\cdot a_2$

$\quad = 3\cdot 2\cdot 1$

si $h=4$ $\quad a_4 = 4\,a_3$

$\quad = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$\vdots$

$a_n = n\cdot a_{n-1}$

$\quad = n\cdot(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$

2) **Así, hemos definido** que $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots\ldots(n-1)n = a_n$ conocido con el nombre de "**factorial de n**".

3) **Ahora debemos probar** que $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n-1)n$, $\forall\, n\in \mathbb{Z}^+ = I\!N - \{0\}$

Veamos:

Paso 1: Si $n=1 \Rightarrow a_1 = 1! = 1$, **es verdadero**.

Paso 2: **Supongamos que para** $n=h$, $a_h = h!$ es verdadero.

Paso 3: **Debo probar que para** $n=h+1$, **se** cumpla $a_{h+1} = (h+1)!$

Por **definición de** a_{h+1} **se tiene:** $\quad a_{h+1} = (h+1)\,a_h$

$\quad = (h+1)\,h!$ **por el paso** 2.

$\quad = (h+1)!$

Hemos probado **que**: $[a_1 \wedge a_h] \Rightarrow a_{h+1}$ Por tanto, $\forall\, n>1$, es verdadero **que** $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ldots\cdot(n-1)n$.

El EJEMPLO 1, también se puede definir recursivamente del siguiente modo:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!(n+1)\ ,\ \forall\, n\geq 0 \end{cases}$$

Así tendremos: Para $n=0 \Rightarrow (0+1)!=0!(0+1)$

$$1!=1\cdot 1=1$$

Para $n=1 \Rightarrow (1+1)!=1!(1+1)$

$$2!=1\cdot 2$$

Para $n=2 \Rightarrow (2+1)!=2!(2+1)$

$$3!=1\cdot 2\cdot 3$$

$\vdots$

$n=h \Rightarrow (h+1)!=h!(h+1)$

$$=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\ldots \cdot (h+1)$$

Así, queda definido: $\boxed{n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\ldots \cdot n}$; $\forall\, n\in I\!N$

Ejemplo 2 Dada la siguiente **proposición definida recursivamente.**

$$\begin{cases} a_1=a_1 \\ a_n=a_{n-1}+d \ , \ \forall\, n>1 \ , \ n\in I\!N \end{cases}$$

Hallar una fórmula que nos permita expresar a_n en términos de a_1, n y d.

***Solución*:**

Haciendo uso de la definición de a_n en forma sucesiva $\forall\, n>1$, obtendremos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1+d \\ a_3 &= a_2+d \\ &= (a_1+d)+d \\ &= a_1+2d \\ a_4 &= a_3+3d \\ &= (a_1+2d)+d \\ &= a_1+3d \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$$

Así, ha quedado definido el conjunto $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots,a_n\}$

$$=\{a_n=a_1+(n-1)d/(n\geq 1) \ , \ n\in I\!N\}$$

este conjunto se llama PROGRESIÓN ARITMÉTICA de razón a con n términos.

Ejemplo 3 Dada la siguiente definición recursiva

$$\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_n = r\,a_{n-1} \ , \ \forall\, n > 1 \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Hallar una fórmula que nos permita, definir a_n en términos de a_1, r y n.

Solución:

$$\begin{aligned} a_2 &= r\,a_1 \\ a_3 &= r\,a_2 \\ &= r \cdot r a_1 = r^2 a_1 \\ a_4 &= r \cdot a_3 \\ &= r \cdot r^2 a_1 = r^3 a_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = r^{n-1} a_1}$$

Así, ha quedado definido el conjunto

$$\begin{aligned} A &= \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \} \\ &= \{ a_1, r a_1, r^2 a_1, \ldots, r^{n-1} a_1 \} \\ &= \{ a_n = r^{n-1} a_1 \ / \ n \geq 1 \ , \ n \in \mathbb{N} \ , \ r \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

llamado **PROGRESIÓN GEOMÉTRICA** de razón r con n términos.

Ejemplo 4 Una sucesión (a_n) de números reales cumple:

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1 \ , \ \forall\, n \geq 2 \ .$$

$i)$ Deducir una expresión de a_n en términos de a_1, a_2 y n.

$ii)$ Demostrar, por inducción, que la expresión hallada en (i) es válida $\forall\, n \geq 2$.

Solución de i)

1) De la ecuación dada, despejar a_{n+1} :

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1 \ , \ \forall\, n \geq 2 \ .$$

2) Según la definición dada en (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{si} \quad n = 2 \ \Rightarrow \ a_3 &= 2a_2 - a_1 + 1 \\ \text{si} \quad n = 3 \ \Rightarrow \ a_4 &= 2a_3 - a_2 + 1 \\ &= 2(2a_2 - a_1 + 1) - a_2 + 1 \\ &= 3a_2 - 2a_1 + 3 \\ \text{si} \quad n = 4 \ \Rightarrow \ a_5 &= 2a_4 - a_3 + 1 \\ &= 2(3a_2 - 2a_1 + 3) - (2a_2 - a_1 + 1) + 1 \\ &= 4a_2 - 3a_1 + 6 \end{aligned}$$

$$\text{si } n=5 \Rightarrow a_6 = 2a_5 - a_4 + 1$$
$$= 2(4a_2 - 3a_1 + 6) - (3a_2 - 2a_1 + 3) + 1$$
$$a_6 = 5a_2 - 4a_1 + 10$$
$$\vdots$$

$a_{n+1} = na_2 - (n-1)a_1 + \frac{1}{2}n(n-1)$	$\forall\, n \geq 2$

Solución de ii) Demostrar por inducción.

3) Para $n=2$: $a_3 = 2a_2 - a_1 + 1$ es V.

4) Para $n=h$: $a_{h+1} = ha_2 - (h-1)a_1 + \frac{1}{2}h(h-1)$ es V. (hipótesis inductiva)

5) Para $n=h+1$: $a_{(h+1)+1} = a_{h+1} + (a_2 - a_1 + h)$

$$= ha_2 - (h-1)\,a_1 + \frac{1}{2}h(h-1) + a_2 - a_1 + h$$
$$= (h+1)a_2 - ha_1 + \frac{h(h-1)+2h}{2}$$
$$= (h+1)a_2 - ha_1 + \frac{1}{2}h(h+1)$$

Nota:

1) El término genérico de la sucesión 1, 3, 6, 10 ,...... es $\frac{1}{2}n(n-1)$, $\forall\, n \geq 2$

2) $a_2 - a_1 + h$ es el término constante que resulta de restar $a_{h+1} - a_h$.

COROLARIO 2. Sea n_0 un número natural fijo. A cada número n, con $n \geq n_0$ le asociamos una proposición $P(n)$ que puede ser verdadero o falso y supongamos que:

i) $P(n_0)$ es verdadero. y

ii) Si $P(h)$ es verdadera, implica que $P(h+1)$ es verdadera $\forall\, n \geq n_0$,

entonces $P(n)$ es verdadera, $\forall\, n \geq n_0$

Prueba:

1) **Definamos un conjunto** A del siguiente modo: $A = \{ n \in I\!N \,/\, P(n) \text{ es verdadera} \}$

   Es decir: $\boxed{n \in A \iff P(n) \text{ es verdadera}}$

2) Si $n_0 \in A \Rightarrow P(n_0)$ es **verdadero** según la hipótesis $i)$

3) **Supongamos** que $h \in A$, $\forall\, h \geq n_0$, entonces $P(h)$ es verdadera y en virtud de la hipótesis $ii)$ implica que $P(h+1)$ **es verdadera**.

4) Si $P(h+1)$ es **verdadera, entonces** $h+1 \in A$.

5) Aplicando al **TEOREMA (Principio de Inducción** Matemática), según los pasos 3) y 4) concluimos: $\forall\, n \geq n_0$ **se tiene** $n \in A$ **y por** lo tanto $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \geq n_0$

5. APLICACIONES

Los siguientes **ejemplos, deberán servir** al estudiante para tener una clara idea **cómo se procede la demostración de una proposición** $P(n)$ que es verdadera para todo **número natural** "n" con $n \geq n_0$.

5.1 PARA EL CASO DE SUMAS FINITAS

Ejemplo 5 **Demostrar que** "$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$"

Prueba:

Sea $P(n)$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

1) Si $n = 1 \Rightarrow P(1)$: $1^2 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2+1)$

   $1 = 1$ es VERDADERA.

2) Supongamos que **para** $n = h > 1$, $P(h)$: $1^2 + 2^2 + \ldots + h^2 = \frac{1}{6} h(h+1)(2h+1)$ es VERDADERA (hipótesis **inductiva**).

3) **Para** $n = h+1$ **debo probar que:** $1^2 + 2^2 + \ldots + h^2 + (h+1)^2 = \frac{1}{6} h(h+1)(h+2)(2h+3)$

   La suposición dada en 2) implica que:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+h^2+(h+1)^2=(1^2+2^2+\ldots\ldots+h^2)+(h+1)^2$$
$$=\tfrac{1}{6}h(h+1)(2h+1)+(h+1)^2$$
$$=(h+1)\left[\tfrac{1}{6}h(2h+1)+(h+1)\right]$$
$$=(h+1)\left[\frac{2h^2+7h+6}{6}\right]$$
$$=\frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6}$$

Es decir $P(h+1)$ es verdadero $\forall\, h\geq 1$.

Hemos probado que $[P(1)\ \wedge\ P(h)]\ \Rightarrow\ P(h+1)$

Se lee "$[P(1)\ \wedge\ P(h)]$ **implica** $P(h+1)$"

Lo cual entendemos así: "si fijamos $[P(1)\ \wedge\ P(h)]$ y $[P(1)\wedge P(h)]\rightarrow P(h+1)$ es verdadero, diremos que $[P(1)\ \wedge\ P(h)]$ es condición suficiente para $P(h+1)$.

4) Por el principio de **INDUCCIÓN MATEMÁTICA**, inferimos que:

$1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ es verdadera $\forall\, n\geq 1$.

Ejemplo 6 Probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{K}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$

Demostración:

Sea $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{K}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$

1) Si $n=1$, tenemos $\Rightarrow$ $P(1)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{K}{2^k}=2-\frac{1+2}{2}$

$\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}$, que es una proposición verdadera.

2) Si $n=h$, supongamos que $P(h)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{h}\frac{K}{2^k}=2-\frac{h+2}{2^h}$ es verdadera.

3) Para $n=h+1$, debo probar que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{h+1}\frac{K}{2^k}=2-\frac{h+3}{2^{h+1}}$

Veamos:

La suposición en (2) implica que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{h+1}\frac{k}{2^k}=\underbrace{\sum_{k=1}^{h}\frac{k}{2^k}}+\frac{h+1}{2^{h+1}}$

$$=2-\frac{h+2}{2^h}+\frac{h+1}{2^{h+1}}$$

$$=2+\frac{-2(h+2)+h+1}{2^{h+1}}=2+\frac{-h-3}{2^{h+1}}$$

$$=2-\frac{h+3}{2^{h+1}}$$

Es decir, $P(h+1)$ es verdadera $\forall\ h\geq 1$.

4) Hemos probado que $[P(1)\ \wedge\ P(h)]\Rightarrow P(h+1)$

En consecuencia queda probado que para todo **número natural** $n\geq 1$, se cumple que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{K}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$, $\forall\ n\geq 1$.

Ejemplo 7 Probar que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}Z^k=\frac{1-z^{2n}}{1-z}$, $z\neq 1$, $\forall\ n\geq 1$.

Prueba:

1) Si $n=1$, tenemos P_1 : $\displaystyle\underbrace{\sum_{k=0}^{2(1)-1}Z^k}=\frac{1-Z^{2(1)}}{1-Z}$

$$Z^0+Z=\frac{(1+Z)(1+Z)}{1-Z}$$

$1+Z=1+Z$, es una proposición verdadero.

2) Si $n=h$, suponer que es verdadero P_h: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2h-1}Z^k=\frac{1-Z^{2h}}{1-Z}$

3) Para $n=h+1$, debo probar que P_{h+1}: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2(h+1)-1}Z^k=\frac{1-Z^{2(h+1)}}{1-Z}$

Veamos:

4) El supuesto dado en 2), implica que:

$$\sum_{k=0}^{2(h+1)-1} Z^k = \sum_{k=0}^{2(h-1)+2} Z^k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{2h-1} Z^k} + Z^{(2h-1)+1} + Z^{(2h-1)+2}$$

$$= \frac{1-Z^{2h}}{1-Z} + Z^{2h} + Z^{2h+1}$$

$$= \frac{1-Z^{2h}+(1-Z)(Z^{2h}+Z^{2h+1})}{1-Z} = \frac{1-Z^{2h}+(1-Z)Z^{2h}(1+Z)}{1-Z}$$

$$= \frac{1-Z^{2h}+Z^{2h}(1-Z^2)}{1-Z} = \frac{1-Z^{2h}+Z^{2h}-Z^{2h+2}}{1-Z} = \frac{1-Z^{2(h+1)}}{1-Z}$$

Así, obtenemos que P_{h+1} es verdadera.

Por tanto, se ha probado que para todo número natural $n \geq 1$, se cumple que: $\sum_{k=0}^{2n-1} Z^k = \frac{1-Z^{2n}}{1-Z}$

Nota:
Todas las sumatorias tienen el mismo estilo de demostración: bastará sumar a la fórmula expresado en $P(h)$ el término (o términos) que le suceden inmediatamente.

5.2 PARA EL CASO DE DIVISIBILIDAD

Ejemplo 8 Demostrar que: $11^{2n-1}+13^{2n-1}$ es divisible por 24, $\forall\, n \geq 1$, $n \in I\!N$

Demostración:

Sea $P(n)$: $11^{2n-1}+13^{2n-1}$

1) Si $n=1$ tenemos $P(1)$: $11+13=24$, es divisible por 24.

2) Supongamos que para $n=h$, con $h>1$, " $P(h): 11^{2h-1}+13^{2h-1}$ es divisible por 24", es verdadera. (hipótesis inductiva).

3) Para $n=h+1$, debo probar que $P(h+1)$: $11^{2(h+1)-1}+13^{2(h+1)-1}$ es divisible por 24.

Veamos:

De la suposición dado en 2) implica que:

$$11^{2(h+1)-1}+13^{2(h+1)-1}=11^{2h-1}\cdot\boxed{11^2}+\boxed{13^{2h-1}}\cdot 13^2$$

$$=11^{2h-1}\cdot 11^2+\boxed{13^{2h-1}\cdot 11^2}-\boxed{13^{2h-1}\cdot 11^2}+13^{2h-1}\cdot 13^2$$

$$=11^2(11^{2h-1}+13^{2h-1})+13^{2h-1}(13^2-11^2)$$

$$=\underbrace{\underbrace{11^2\underbrace{(11^{2h-1}+13^{2h-1})}_{\substack{\text{es divisible por 24}\\ \text{(paso 2)}}}}_{\text{es divisible por 24}}+\underbrace{13^{2h-1}\underbrace{(48)}_{\text{es divisible por 24}}}_{\text{es divisible por 24}}}_{\text{es divisible por 24}}$$

Así, obtenemos que $P(h+1)$ es verdadera.

Luego, queda demostrado que: $11^{2n-1}+13^{2n-1}$ es divisible por 24, $\forall\ n\geq 1$, $n\in I\!N$.

Nota:

Todas las proposiciones $P(n)$ que tiene que ver con la divisibilidad, tienen el mismo estilo de demostración: sumar y restar un término adecuado que nos permita aplicar la hipótesis inductiva.

5.3 PARA EL CASO DE NÚMEROS COMBINATORIOS

Ejemplo 9 Demostrar por inducción matemática, que si un conjunto A tiene "n" elementos, entonces el conjunto potencia de A, $\mathcal{P}(A)$, tiene 2^n elementos, $\forall\ n\in I\!N$.

Antes de la demostración, veamos algunos ejemplos:

Si $n=0$, tenemos $A=\varnothing$, entonces $\mathcal{P}(A)=\{\varnothing\}$ tiene $2^0=1$ elemento.

Si $n=1$, tenemos $A=\{a\}$, entonces $\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,A\}$ tiene $2^1=2$ elementos.

2) Si $n=2$, tenemos $A=\{a,b\}\Rightarrow\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,A,\{a\},\{b\}\}$ tiene $2^2=4$ elementos.

3) Si $n=3$, tenemos $A=\{a,b,c\} \Rightarrow \mathcal{P}(A)=\{\varnothing, A,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ tiene $2^3=8$ elementos.

Observando el conjunto potencia, deducimos que: los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son subconjuntos de A y dichos subconjuntos son: $\varnothing$, A, los subconjuntos de un solo elemento, los subconjuntos de 2 elementos, los subconjuntos de 3 elementos, ……, los subconjuntos de $K-1$ elementos, …… Pero ¿cuántos subconjuntos de un solo elemento existen? ¿cuántos subconjuntos de 2 elementos hay?, ¿cuántos subconjuntos de 3 elementos habrán?, ………, ¿cuántos subconjuntos de $K-1$ elementos hay?.

Si el conjunto A tiene "3" elementos se tiene que:

Habrá $\binom{3}{0}=1$ subconjunto que no tiene elementos, que es el $\varnothing$.

Habrán $\binom{3}{1}=3$ subconjuntos que tienen 1 sólo elemento.

Habrán $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\,1!}=3$ subconjuntos de dos elementos.

Habrá $\binom{3}{3}=1$ subconjunto de 3 elementos.

Por tanto, si A tiene 3 elementos, entonces: $\mathcal{P}(A)$ tendrá: $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=2^3$ elementos

Donde $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ son combinaciones de n elementos tomados de k en k, desde $k=0,1,2,\ldots,n$.

Ahora, ya podemos formalizar la demostración:

<u>Paso 1</u>:

1) Si $n=1$, entonces $\mathcal{P}(A)$ tendrá: $\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2^1$ elementos.

2) Si $n=h$, supongamos que $\mathcal{P}(A)$ tenga: $\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+\binom{h}{2}+\ldots+\binom{h}{h}=2^h$ elementos (hipótesis inductiva).

3) Debo probar que para $n=h+1$, $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^{h+1} elementos

Es decir debo **probar** que la suma:

(3*): $\binom{h+1}{0}+\binom{h+1}{1}+\ldots+\binom{h+1}{h+1}$ sea igual a 2^{h+1}

Veamos:

4) En (3*) **aplicar las propiedades**:
$$\begin{cases} \binom{n}{h}=\binom{n-1}{h}+\binom{n-1}{h-1} & \text{del } 2^{\text{do}} \text{ hasta } k-1 \text{ térm .} \\ \binom{n+1}{0}=\binom{n}{0} \longleftarrow & \text{al } 1^{\text{er}} \text{ término} \\ \binom{n+1}{n+1}=\binom{n}{n} \longleftarrow & \text{al último término} \end{cases}$$

Así tendremos:

$$\binom{h+1}{0}+\binom{h+1}{1}+\binom{h+1}{2}+\binom{h+1}{3}+\ldots\ldots+\binom{h+1}{h}+\binom{h+1}{h+1}$$

$$=\binom{h}{0}+\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+\binom{h}{1}+\binom{h}{2}+\binom{h}{2}+\binom{h}{3}+\ldots+\binom{h}{h-1}+\binom{h}{h}+\binom{h}{h}$$

$$=\underbrace{\left[\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+\binom{h}{2}+\ldots+\binom{h}{h}\right]}_{2^h}+\underbrace{\left[\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+\binom{h}{2}+\ldots+\binom{h}{h}\right]}_{2^h}$$

$$=2^h+2^h=2\cdot 2^h=2^{h+1}$$

Por tanto, queda demostrado que el número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ es 2^n, si A tiene n **elementos.**

5.4 SUMATORIAS

Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ un conjunto finito de números reales.

Definimos por inducción recursiva la suma: $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ que denotamos por el **símbolo** $\sum_{k=1}^{n} a_k$ para todo número natural $n\geq 1$, del siguiente modo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} a_1 & , \text{ si } n=1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n & , \text{ si } n>1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$$

Ejemplos:

1) $\sum_{k=1}^{n} 5 = 5+5+5+\ldots\ldots+5 = 5n$

2) $\sum_{k=1}^{n} K = 1+2+3+\ldots\ldots+n$

3) $1.2+2.2^2+3.2^2+\ldots\ldots+n\cdot 2^n = \sum_{k=1}^{n} K\,2^k$

5.4.1 PROPIEDADES DE LA SUMATORIA

P$_1$) $\sum_{k=1}^{n} C = nC$, C es una constante

P$_2$) $\sum_{k=1}^{n} Ca_k = C\sum_{k=1}^{n} a_k$

P$_3$) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

P$_4$) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}$

P$_5$) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ **(Propiedad Telescópica)**

P$_6$) $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_{k-1}) = a_{n+1} + a_n - a_1 - a_0$

5.4.2 FÓRMULAS USUALES

1) $\sum_{k=1}^{n} K = 1+2+3+\ldots\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\sum_{k=1}^{n} K^2 = 1+2^2+3^2+\ldots\ldots+n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} K^3 = 1+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4) $\sum K^4 = \frac{n}{30}(n+1)(6n^3+9n^2+n+1)$

5) PROGRESIÓN ARITMÉTICA

$$\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)d] = a_1+(a_1+2d)+(a_2+3d)+\ldots\ldots+(a_1+(n-1)d) = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

6) PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

$$\sum_{k=1}^{n} a_1 r^{k-1} = a_1+a_1r+a_1r^2+\ldots\ldots\ldots+a_1 r^{n-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad ; \; r \neq 1 \;,\; n \geq 1$$

La fórmula 2, se deduce haciendo $a_k = K^3$ y aplicando la propiedad telescópica y la fórmula (1)

La fórmula 3, se deduce haciendo $a_k = K^4$ y aplicando la propiedad telescópica y las fórmulas (1) y (2).

La fórmula 4, se deduce haciendo $a_k = K^5$ y aplicando la propiedad telescópica y las fórmulas anteriores.

Deducción de la fórmula (5)

Los términos de la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[a+(k-1)d]$ son elementos del conjunto

$A = \{a, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \ldots\ldots, \underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n}\}$ donde el último término es $a_n = a_1+(n-1)d$.

Además, se tiene que el 2$^{\text{do}}$. término es igual al 1$^{\text{ro}}$. más la constante "d", el 3$^{\text{er}}$ término es igual al 2$^{\text{do}}$. más la constante d, ... y así sucesivamente cada término es igual a la anterior más la constante "d".

Lo cual es equivalente a decir que un término es igual a la posterior ***menos*** la constante "d".

De manera que la suma de los elementos del conjunto A se puede escribir de dos formas:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots\ldots + a_1 + (n-1)d$$

o $$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots\ldots + (a_n - (n-1)d)$$

Sumando miembro a miembro: $2S_n = [\underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \ldots\ldots + a_1}_{na_1}] + [\underbrace{a_n + a_n + a_n + \ldots\ldots + a_n}_{na_n}]$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Deducción de la fórmula (6)

Se tiene la suma: $S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1}$

Multiplicar por $(1-r)$: $\quad (1-r)S_n = (1-r)[a_1 + a_1 + a_1 r^2 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1}]$

$$= [a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1}] - [a_1 r + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n]$$

$$= a_1 - a_1 r^n$$

$$(1-r)S_n = a_1(1 - r^n)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

5.4.3 CÁLCULO DE ALGUNAS SUMAS APLICANDO LA PROPIEDAD TELESCÓPICA

Problema 1 Calcular las siguientes sumas:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K(K+1)} = \frac{n}{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{-2}{(2k+1)(3k-1)} = -\frac{2n}{2n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{(3k+2)(3k-1)} = -\frac{15n}{8(3n+2)}$

Método:

Cuando el denominador de una fracción está expresado como el producto de dos factores lineales entonces dicha fracción se puede descomponer como la suma de dos fracciones parciales.

Solución de a)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K(K+1)}$$

PASO 1: Descomponer la fracción $\frac{1}{K(K+1)}$ en dos fracciones parciales.

Así: $\frac{1}{K(K+1)} = \frac{A}{K} + \frac{B}{K+1}$ "Dos factores en el denominador implica formar dos fracciones".

PASO 2: $= \frac{A(K+1)+BK}{K(K+1)}$ "Cada fracción tiene como denominador un factor y como numerador una constante que debe hallarse".

PASO 3: Igualar los numeradores:

$$1 = A(K+1) + BK$$

$$= AK + A + BK$$

$$0K + 1 = (A+B)K + A$$

PASO 4: Igualar coeficientes: $\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

PASO 5: Luego $\frac{1}{K(K+1)} = \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}$

y la suma será: $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K(K+1)} = \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} \right)$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Por tanto: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{K(K+1)} = \frac{n}{n+1}$

Solución de b)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{-2}{(2k+1)(2k-1)}=-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}$$

"Dos factores en el denominador implica formar dos fracciones.

Cada fracción tiene como denominador un factor y como numerador una constante que debe hallarse".

PASO 1: $\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{A}{2k+1}+\frac{B}{2k-1}$

PASO 2: $=\frac{A(2k-1)+B(2k+1)}{(2k+1)(2k-1)}$

PASO 3: **IGUALAR NUMERADORES,** porque los denominadores ya son iguales.

$$1=A(2K-1)+B(2K+1)$$

$$0K+1=(2A+2B)K+(B-A)$$

PASO 4: **IGUALAR COEFICIENTES** $\begin{cases}2A+2B=0\\ B-A=1\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cancel{A}+B=0\\ B-\cancel{A}=1\end{cases}$$

$$2B=1$$

$$\boxed{B=\tfrac{1}{2}}\qquad\boxed{A=-\tfrac{1}{2}}$$

Luego: $\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{-1/2}{2k+1}+\frac{1/2}{2k-1}$

La suma será: $-2\sum\left(\frac{-1/2}{2k+1}+\frac{1/2}{2k-1}\right)=\sum\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)$

$$=\left(\cancel{\frac{1}{3}}-1\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\ldots\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\cancel{\frac{1}{2n-3}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2n+1}-\cancel{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

$$=-1+\frac{1}{2n+1}$$

$$=\frac{-2n-1+1}{2n+1}=\frac{-2n}{2n+1}$$

Problema 2 Calcular $\sum_{k=1}^{n} cos(2k-1)x$

Solución:

1) Sea la suma: $S = cos\,x + cos\,3x + cos\,5x + \ldots + cos(2n-1)x$

2) Multiplicar por $sen\,x$ en ambos miembros.

$$(sen\,x)S = cos\,x\;sen\,x + cos\,3x\;sen\,x + cos\,5x\;sen\,x + \ldots + cos(2n-3)x\;sen\,x$$

$$+\,cos(2n-1)x\;sen\,x$$

$$= \tfrac{1}{2}\cancel{sen\,2x} + \tfrac{1}{2}[\cancel{sen\,4x} - \cancel{sen\,2x}] + \tfrac{1}{2}[\cancel{sen\,6x} - \cancel{sen\,4x}] + \ldots$$

$$\ldots \tfrac{1}{2}[sen(2n-2)x - sen(2n-4)x] + \tfrac{1}{2}[\underline{\underline{sen\,2nx}} - sen(2n-2)x]$$

$$= \tfrac{1}{2}sen\,2nx$$

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{sen\,2nx}{sen\,x}$$

Se ha aplicado la identidad: $cos\,A \cdot sen\,B = \frac{1}{2}[sen(A+B) - sen(A-B)]$

Problema 3 Calcular $\sum_{k=1}^{n} sen(2k-1)x$

Solución:

1) Sea $S = sen\,x + sen\,3x + sen\,5x + \ldots + sen(2n-3)x + sen(2n-1)x$

2) Multiplicar ambos miembros por $sen\,x$:

$$(sen\,x)S = sen^2 x + sen\,3x\;sen\,x + sen\,5x \cdot sen\,x + \ldots + sen(2n-3)x\;sen\,x +$$

$$sen(2n-1)x\;sen\,x$$

$$= \frac{1-cos\,2x}{2} + \tfrac{1}{2}[cos\,2x - cos\,4x] + \tfrac{1}{2}[cos\,4x - cos\,5x] + \ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}[cos(2n-4)x - cos(2n-2)x] + \tfrac{1}{2}[cos(2n-2)x - cos\,2nx]$$

$$S = \frac{1-cos\,2nx}{2\,sen\,x}$$

Se ha aplicado la fórmula: $sen\,A\;\;sen\,B = \frac{1}{2}[cos(A-B) - cos(A+B)]$

Problema 4 Calcular: $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot tg\,\frac{x}{2^k}$

Solución:

1) Para aplicar la propiedad telescópica, usar la identidad: $tg\,x = cotg\,x - cotg\,2x$

2) Sea la suma:

$$S = tg\,x + \tfrac{1}{2} tg\,\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2^2} tg\,\tfrac{x}{2^2} + \ldots + \tfrac{1}{2^{n-1}} tg\,\tfrac{x}{2^{n-1}} + \tfrac{1}{2^n} \cdot tg\,\tfrac{x}{2^n}$$

$$= (cotg\,x - 2cotg\,2x) + \tfrac{1}{2}\left(cotg\,\tfrac{x}{2} - 2tg\,x \right) + \tfrac{1}{2^2}\left(cotg\,\tfrac{x}{2^2} - 2cotg\,\tfrac{x}{2} \right) + \ldots$$

$$\ldots + \tfrac{1}{2^{n-1}}\left(cotg\,\tfrac{x}{2^{n-1}} - 2cotg\,\tfrac{x}{2^{n-2}} \right) + \tfrac{1}{2^n}\left(cotg\,\tfrac{x}{2^n} - 2\,cotg\,\tfrac{x}{2^{n-1}} \right)$$

$$= \tfrac{1}{2^n} \cdot cotg\,\tfrac{x}{2^n} - 2cotg\,2x$$

Problema 5 Probar por inducción que:

$$\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{2^k} tg\,\tfrac{x}{2^k} = \tfrac{1}{2^n} cotg\,\tfrac{x}{2^n} - 2cotg\,2x$$

Prueba:

1) Si $n = 0$.

El 1er. miembro es $tg\,x$

$= S$

El 2do. miembro es $cotg\,x - 2\,cotg\,2x$

Pues: $cotg\,2x = \frac{cotg^2\,x - 1}{2cotg\,x} \Rightarrow 2cotg\,2x = \frac{cotg^2 x - 1}{cotg\,x}$

$$= cotg\,x - tg\,x$$

$$\Rightarrow\ tg\,x = cotg\,x - 2cotg\,2x\ \Rightarrow\ \boxed{2cotg\,2x = cotg\,x - tg\,x}$$

2) Si $n = h$, suponer que se cumple: $\sum\limits_{k=0}^{h} \frac{1}{2^k} \cdot tg\,\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^h} \cdot cotg\,\frac{x}{2^h} - 2cotg\,2x$

3) Para $n = h + 1$

$$\sum_{k=0}^{h+1}\frac{1}{2^k}tg\frac{x}{2^k}=\sum_{k=0}^{h}\frac{1}{2^k}tg\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{h+1}}cotg\frac{x}{2^{h+1}}$$

$$=\frac{1}{2^h}cotg\frac{x}{2^h}-2cotg\,2x+\frac{1}{2^{h+1}}\cdot cotg\frac{x}{2^{h+1}}$$

$$=\frac{1}{2^{h+1}}\left[2cotg\frac{x}{2^h}+tg\frac{x}{2^{h+1}}\right]-cotg\,2x$$

$$=\frac{1}{2^{h+1}}\left[cotg\frac{x/2^h}{2}\underbrace{-tg\frac{x/2^h}{2}+cotg\frac{x}{2^{h+1}}}_{0}\right]-2\,cotg\,2x$$

$$=\frac{1}{2^{h+1}}cotg\frac{x}{2^{h+1}}-2cotg\,2x$$

6. BINOMIO DE NEWTON

Antes de desarrollar el binomio de Newton es necesario conocer las siguientes definiciones:

6.1 FACTORIAL DE n

$n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots\ldots n$ si $n\geq1$, $n\in IN$

6.2 COEFICIENTE BINOMIAL

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $n\geq k$, n , $k\in IN$

combinación de "n" elementos de K en K.

6.3 PROPIEDADES

P$_1$) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ $\forall\ 0\leq k\leq n$ **(Simetría)**

P$_2$) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$ si $0<k<n$

P$_3$) $\binom{0}{0}=\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$ **(Extremos)**

P₄) $\binom{n}{1} = n$

P₅) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \iff k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad \forall\, n \geq 1$

P₆) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

6.4 TEOREMA (BINOMIO DE NEWTON)

Si a y $b \in IR$ y $n \in IN$, con $n \geq 1$; se cumple: $(a+b)^n = \sum\limits_{K=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Demostración:

1) Si $n = 1$, se tiene $(a+b)^1 = a + b$

y $\sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a b^0 + \binom{1}{1} a^0 b$ son = s

$= a + b$

se cumple: $(a+b)^1 = \sum\limits^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$

2) (hipótesis inductiva) Supongamos que para $n = h$, con, con $h \geq 1$, se cumple:

$$(a+b)^h = \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} a^{h-k} b^k$$

$$= \binom{h}{0} a^h + \binom{h}{1} a^{h-1} b + \ldots\ldots + \binom{h}{n-1} a b^{h-1} + \binom{h}{n} b^h$$

3) Para $n = h+1$ debo probar que $(a+b)^{h+1} = \sum\limits_{k=0}^{h+1} \binom{h+1}{k} a^{h+1-k} b^k$

Veamos:

Se tiene: $(a+b)^{h+1} = (a+b)^h (a+b)$

$$=\left[\binom{h}{0}a^h+\binom{h}{1}a^{h-1}b+\binom{h}{2}a^{h-2}b^2+\ldots+\binom{h}{h-1}ab^{h-1}+\binom{h}{h}b^h\right](a+b)$$

$$=\left[\binom{h}{0}a^{h+1}+\underline{\binom{h}{1}a^hb}+\ldots+\binom{h}{h}ab^h\right]+\left[\underline{\binom{h}{0}a^hb}+\binom{h}{1}a^{h-1}b^2+\ldots+\binom{h}{h}b^{h+1}\right]$$

$$=\binom{h}{0}a^{h+1}+\left[\binom{h}{1}+\binom{h}{0}\right]a^hb+\left[\binom{h}{2}+\binom{h}{1}\right]a^{h-1}b^2+\ldots+\left[\binom{h}{h}+\binom{h}{h-1}\right]ab^h+\binom{h}{h}b^{h+1}$$

$$=\binom{h+1}{0}a^{h+1}+\binom{h+1}{1}a^hb\;+\;\binom{h+1}{2}a^{h-1}b^2\;+\;\ldots\ldots\;+\;\binom{h+1}{h}ab^h\;+\;\binom{h+1}{h+1}b^{h+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{h+1}\binom{h+1}{k}a^{h+1-k}b^k$$

Se cumple la fórmula para $n=h+1$. Por tanto $\forall\, n\geq 1$ se cumple

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{h+1}{k}a^{n-k}b^k$$

6.5 ALGUNAS CONSECUENCIAS DEL BINOMIO DE NEWTON

C_1) Si en el binomio de Newton se tiene $a=b=1$, entonces tendremos:

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\,1^{n-k},\quad \text{pues}\quad 1^{n-k}=1\ ,\ 1^{n-k}=1$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$\boxed{2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots\ldots+\binom{n}{n}}$$

C_2) Si $a=1$ y $b=-1$, tendremos:

$$(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}(-1)+\binom{n}{2}(-1)^2+\binom{n}{3}(-1)^3+\ldots+\binom{n}{n}(-1)^n$$

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

C_3) Si a y b son enteros:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^k \\
&= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\
&= \underbrace{\left[a^{n-1} + \binom{n}{1}a^{n-2}b + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1}b^{n-1} \right]}_{\textit{es un entero } p} a + b^n \\
&= \overbrace{pa}^{\overset{\bullet}{a}} + b^n
\end{aligned}
$$

$\boxed{(a+b)^n = \overset{\bullet}{a} + b^n}$ $\quad \overset{\bullet}{a} = pa$, la notación $\overset{\bullet}{a}$ se lee "múltiplo de a"

Por ejemplo: $17(3) = \overset{\bullet}{3}$ .... múltiplo de 3

$5^3(2) = \overset{\bullet}{2}$ .... múltiplo de 2

Observación: Las propiedades: P_1, P_2, ... , P_6 se observan con claridad en el **TRIÁNGULO DE PASCAL**:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\qquad \Bigg| \qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

ES EL MISMO

Por ejemplo:

P_1. La simetría: $\binom{4}{1}=\binom{4}{3}$, $\binom{3}{1}=\binom{3}{2}$, $\binom{3}{0}=\binom{3}{3}$

P_2. $\binom{2}{0}+\binom{2}{1}=\binom{3}{1}$, $\binom{4}{2}=\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$

P_3. $\binom{0}{0}=\binom{3}{0}=\binom{3}{3}=\binom{4}{4}=1$

P_4. $\binom{2}{1}=2$, $\binom{3}{1}=3$, $\binom{4}{1}=4$

P_5. $\binom{4}{2}=\frac{4}{2}\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}=\frac{3}{2}\binom{2}{1}$

P_6. $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4$, $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=2^3$

6.6 CÁLCULO DE UN TÉRMINO QUE OCUPA EL LUGAR (K + 1) DEL DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON

En el desarrollo de:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+\underset{\overset{\uparrow}{T_{k+1}}}{\binom{n}{k}}a^{n-k}b^k+\ldots\ldots+\binom{4}{2}b^n$$

Tenemos:

El coeficiente del 1er. término es $\binom{n}{0}$ donde $k=0$

El coeficiente del 2do. término es $\binom{n}{1}$ donde $k=1$

El coeficiente del 3er. término es $\binom{n}{2}$ donde $k=2$

El coeficiente del $(k+1)$ – ésimo término es $\binom{n}{k}$

Por tanto el término que ocupa el lugar $(k+1)$ es: $\boxed{T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$

si $K=0$ obtenemos el 1^{er} término.
si $K=1$ obtenemos el 2^{do} término.
si $K=2$ obtenemos el 3^{er} término.
$\vdots$
etc.

6.7 DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON CUANDO EL EXPONENTE ES NEGATIVO Y FRACCIONARIO

Teniendo en cuenta el desarrollo del binomio:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k+\ldots+x^n$$

obtenemos el desarrollo de sumas infinitas cuando "n" es fracción o negativo.

Por ejemplo:

a) Si $n=2/3 \Rightarrow (1+x)^{2/3}=1+\frac{2}{3}x+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots\ldots$

b) Si $n=-3 \Rightarrow (1+x)^{-3}=1+(-3)x+\frac{(-3)(-3-1)}{2!}x^2+\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{3!}x^3+\ldots$

c) Si $n=-\frac{2}{3} \Rightarrow (1+2x^2-6x^3)^{-2/3}=1+\left(-\frac{2}{3}\right)(2x^2-6x^3)+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)}{2!}(2x^2-6x^3)^2$

$$+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}-1\right)\left(-\frac{2}{3}-2\right)}{3!}(2x^2-6x^3)^3+\ldots\ldots$$

Problema 6 Hallar el término que no tiene factor en x en el desarrollo de $\left(\frac{1}{x^4}+\frac{x^2}{4}\right)^{12}$

Solución:

1) Sea $T_{k+1}=\binom{12}{k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^{12-k}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k=\binom{12}{k}4^{-k}x^{-4(12-k)}x^{2k}$

$$=\binom{12}{k}4^{-k}x^{-4(12-k)+2k}$$

2) Debe ser: $-4(12-k)+2k=0 \Rightarrow k=8$

3) Luego el término que no tiene factor en x es: $T_{19}=\binom{12}{8}4^{-8}=\frac{495}{4^8}$

Problema 7 En el desarrollo de $\left(x^2+\frac{1}{x}+x\right)^8$; $x\neq 0$

a) Hallar el coeficiente de x^6.
b) Hallar el término independiente.

Solución de A)

En primer lugar, conviene que se tenga el término $(1+x)$ dentro de $\left(x^2+\frac{1}{x}+x\right)$, con el fin de aplicar: $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}\binom{n}{k}x^{n-k}$

Así:

$$\left(x^2+\frac{1}{x}+x\right)^8=\left[x\left(1+x+\frac{1}{x^2}\right)\right]^8=x^8\left[(1+x)+\frac{1}{x^2}\right]^8$$

$$=x^8\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(1+x)^{8-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k$$

$$=x^8\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(1+x)^{8-k}x^{-2k}$$

$$=x^8\left[\binom{8}{0}(1+x)^8+\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{\circ}}}{\binom{8}{1}(1+x)^7x^{-2}}+\underset{\substack{\uparrow\\ 3^{\circ}}}{\binom{8}{2}(1+x)^6x^{-4}}+\underset{\substack{\uparrow\\ 4^{\circ}}}{\binom{8}{3}(1+x)^5x^{-6}}+\ldots+x^{-16}\right]\quad(*)$$

De estos términos, escoger aquellos que tengan x^{-2} para que $x^8x^{-2}=x^6$.

- El 2$^{\text{do.}}$ término contiene a x^{-2}, entonces en $\binom{8}{1}(1+x)^7x^{-2}$ necesitamos:

$$\binom{8}{1}\binom{7}{k}x^{7-k}x^{-2}=\binom{8}{1}\binom{7}{k}x^{5-k}\text{ , tal que , }5-k=-2\Rightarrow k=7$$

Así obtenemos: $\binom{8}{1}\binom{7}{7}x^{-2}=8x^{-2}$

- El 3$^{\text{er.}}$ término debe ser:

$$\binom{8}{2}\binom{6}{k}x^{6-k}x^{-4}=\binom{8}{2}\binom{6}{k}x^{2-k}\text{ , tal que }2-k=-2\Rightarrow k=4$$

Así obtenemos: $\binom{8}{2}\binom{6}{4}x^{-2}=420x^{-2}$

- El 4$^{to.}$ término debe ser:

$$\binom{8}{3}\binom{5}{k}x^{5-k}x^{-6}=\binom{8}{3}\binom{5}{k}x^{-k-1}\text{, tal que , } -k-1=-2 \Rightarrow k=1$$

Así tendremos: $\binom{8}{3}\binom{5}{1}x^{-2}=280x^{-2}$

Conclusión.- El coeficiente de x^6 es: $8+420+280=708$

b) Dentro del corchete, necesitamos el término

$$T_{k,m}=\binom{8}{k}\binom{8-k}{m}x^{8-3k-m} \quad , \quad 0\le k\le 8 \ , \ 0\le m\le 8-k$$

tal que: $8-3k-m=-8 \leftrightarrow 3k+m=16$

Se cumple para:

$$T_{4,4}=\binom{8}{4}\binom{4}{4}x^{-8} \quad \text{y} \quad T_{5,1}=\binom{8}{5}\binom{3}{1}x^{-8}$$
$$=70x^{-8} \quad \text{y} \quad =168x^{-8}$$

Al sumar: $70 + 168 = 238$

Problema 8 En el desarrollo de: $(1+x)^{43}$, los coeficientes de los términos que ocupan los lugares $2m+1$ y $m+2$ son iguales. Calcular el valor de m.

Solución:

1) El término que ocupa el lugar $2m+1$ es $T_{2m+1}=\binom{43}{2m}x^{43-2m}$

2) El término que ocupa el lugar $m+2$ es $T_{m+2}=T_{(m+1)+1}=\binom{43}{m+1}x^{43-m-1}$

$$=\binom{43}{m+1}x^{42-m}$$

3) Como $T_{2m+1}=T_{m+2} \Rightarrow \binom{43}{2m}=\binom{43}{m+1}$

$$\Longleftrightarrow 2m=m+1 \lor 43-2m=m+1\text{, pues } \binom{43}{2m}=\binom{43}{43-2m}$$

$$\Longleftrightarrow m=1 \quad \lor \quad m=14$$

7. PRODUCTORIA

Definición: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k$

Producto de los números a_k desde $k=1$ hasta $k=n$

Ejemplos:

1) Si $a_k = k \Rightarrow \displaystyle\prod_{k=1}^{n} K = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n = n!$

2) Si $a_k = 1 + a^{2^k} \Rightarrow \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1+a^{2k}) = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\cdots\cdots(1+a^{2^n})$

3) Si $a_k = \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \Rightarrow \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = \left(1+\frac{1}{2-1}\right)^{2-1}\left(1+\frac{1}{3-1}\right)^{3-1}\ldots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$

4) Si $a_k = (1+i)^{2k} \Rightarrow \displaystyle\prod_{k=1}^{2n} (1+i)^{2k} = (1+i)^2(1+i)^4(1+i)^6\ldots\ldots(1+i)^{2n}$

5) Si $a_k = b \Rightarrow \displaystyle\prod_{k=1}^{n} b = b \cdot b \cdot b \ldots\ldots b = b^n$, b es una constante.

7.1 PROPIEDADES

P₁) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} C = C^n$ "C" es constante

P₂) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} ca_k = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k$

P₃) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k$

P₄) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k - 1} = \frac{a_n}{a_0}$

PROPIEDAD TELESCÓPICA

P₅) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} [a_k]^C = \left[\prod_{k=1}^{n} a_k\right]^C$

P₆) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} \prod_{k=1}^{n} a_k$

P₇) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{n-k+1}$

$\boxed{\text{Problema 9}}$ Probar que $\underset{k=2}{\overset{2n+1}{\pi}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n+1}$, $\forall\, n \in Z^+$

Demostración: (Por Inducción Matemática)

1) Si $\boxed{n=1}$, entonces se cumple la proposición:

$$P_1 : \quad \underset{k=2}{\overset{2(1)+1}{\pi}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1+1}{2(1)+1}=\frac{2}{3}$$

$$\text{Donde:} \quad \underset{k=2}{\overset{2(1)+1}{\pi}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\underset{k=2}{\overset{3}{\pi}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{3}$$

2) Supongamos que para $\boxed{n=h}$; $h>1$ se cumple la proposición:

$$P_h : \quad \underset{k=2}{\overset{2h+1}{\pi}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{h+1}{2h+1}$$

3) Debo probar que para $\boxed{n=h+1}$ se cumple la proposición:

$$P_{h+1} : \quad \underset{k=2}{\overset{2(h+1)+1}{\pi}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{(h+1)+1}{2(h+1)+1}=\frac{h+2}{2h+3}$$

Veamos:

$$\text{Pero:} \quad \underset{k=2}{\overset{2(h+1)+1}{\pi}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\underset{k=2}{\overset{2h+3}{\pi}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

$$=\underbrace{\underset{k=2}{\overset{2h+1}{\pi}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}\left(1-\frac{1}{(2h+2)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2h+3)^2}\right)$$

$$=\frac{h+1}{2h+1}\left(1-\frac{1}{(2h+2)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2h+3)^2}\right)$$

$$=\frac{h+1}{(2h+1)}\left[\frac{(2h+2)^2-1}{(2h+2)^2}\right]\left[\frac{(2h+3)^2-1}{(2h+3)^2}\right]$$

$$=\frac{(h+1)}{(2h+1)}\,\frac{[2h+2-1][2h+2+1][2h+3-1][2h+3+1]}{4(h+1)^2\,(2h+3)^2}$$

$$=\frac{\cancel{(h+1)}\,\cancel{(2h+1)}\,\cancel{(2h+3)}\,\cancel{2}\,\cancel{(h+1)}\,\cancel{2}(h+2)}{\cancel{(2h+1)}\,\cancel{4}\,\cancel{(h+1)^2}\,(2h+3)\,\cancel{3}}$$

$$=\frac{h+2}{2h+3}$$

Se ha probado que $(P_1 \wedge P_h) \Rightarrow P_{h+1}$, en consecuencia la proposición.

$$P_n:\ \prod_{k=2}^{2n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n+1}\ \text{ es verdadera } \forall\, n\in\mathbb{Z}^+$$

Problema 10 Simplificar $\prod_{k=2}^{2n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Solución:

Aplicaremos, adecuadamente, la propiedad $P_4)$ $\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{a_n}{a_0}$ para simplificar una productora.

Veamos:

$$\prod_{k=2}^{2n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{2n+1}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{2n+1}\frac{(k-1)}{k}\frac{(k+1)}{k}$$

$$=\prod_{k=2}^{2n+1}\frac{k-1}{k}\ \prod_{k=2}^{2n+1}\frac{k+1}{k}$$

$$=\left[\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{4}\cdots\frac{2n-1}{\cancel{2n}}\cdot\frac{\cancel{2n}}{2n+1}\right]\left[\frac{\cancel{3}}{2}\,\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\,\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdots\frac{(2n+1)}{\cancel{2n}}\cdot\frac{2n+2}{\cancel{2n+1}}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2n+1}\right]\left[\frac{1}{2}\,\frac{2n+2}{1}\right]=\frac{n+1}{2n+1}$$

Problema 11 Simplificar $\prod_{k=1}^{n}=(1+sec\,2^k x)$

Solución:

1) Al desarrollar la productoria, obtenemos:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+sec\,2^k x)=(1+sec\,2x)(1+sec\,2^2 x)\,(1+sec\,2^3 x)\ldots\ldots(1+sec\,2^{n-1}x)(1+sec\,2^n x)$$

2) Debemos encontrar una identidad para $1+sec\,2x$ que esté expresado como cociente. Es decir $1+sec\,2x=\frac{a_k}{a_{k-1}}$, donde $a_k \wedge a_{k-1}$ deben ser funciones trigonométricas.

Veamos:

$$1+sec\,2x=1+\frac{1}{cos\,2x}$$

$$=\frac{cos\,2x+1}{cos\,2x}=\frac{(cos\,2x+1)(1-cos\,2x)}{cos\,2x\,(1-cos\,2x)}$$

$$\frac{1-cos^2\,2x}{cos\,2x\,[2sen^2x]}=\frac{sen^2\,2x}{2cos\,2x\,sen^2x}$$

$$=\frac{sen\,2x\cdot sen2x}{2cos\,2x\cdot sen^2\,2x}$$

$$=\frac{sen\,2x\cdot[2sen\,x\,cos\,x]}{2cos2x\cdot sen^2x}$$

$$=\frac{sen\,2x}{cos\,2x}\cdot\frac{cos\,x}{sen\,x}$$

$$=tg\,2x\cdot cotg\,x=\frac{tg\,2x}{tg\,x}$$

Luego: $\boxed{1+sec\,2x=\frac{tg\,2x}{tg\,x}}$ .... **(2*)**

3) Aplicar la identidad (2*) a cada factor que se tiene en (1):

$$\mathop{\pi}_{k=1}^{n}(1+sec\,2^k\,x)=\frac{\cancel{tg\,2x}}{tg\,x}\cdot\frac{\cancel{tg\,2^2x}}{\cancel{tg\,2x}}\cdot\frac{tg\,2^3\,x}{\cancel{tg\,2^2x}}\cdots\cdots\frac{\cancel{tg\,2^{n-1}x}}{\cancel{tg\,2^{n-2}x}}\cdot\frac{tg\,2^n\,x}{\cancel{tg\,2^{n-1}x}}$$

$$=\frac{tg\,2^n\,x}{tg\,x}$$

8. PROBLEMAS

$\boxed{\text{Problema 12}}$ Hallar la suma: $S_n = \sum_{k=1}^{n} csc\, 2^{k-1} x$

Solución:

Debemos encontrar una forma de aplicar la **PROPIEDAD TELESCÓPICA**.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 .$$

Para el caso de funciones trigonométricas, es necesario buscar una identidad trigonométrica para $csc\, 2^{k-1}$ que nos permita expresarlo como la diferencia $a_k - a_{k-1}$.

Teniendo en cuenta la identidad: $\csc x = \text{cotg}\, \frac{x}{2} - \text{cotg}\, x$

podemos hacer $\csc 2^{k-1} x = \text{cotg} 2^{k-2} x - \text{cotg} 2^{k-1} x \;,\; k = 1, 2, \ldots, n$

Así tendremos que:

$$\sum_{k=1}^{n} csc\, 2^{k-1} x = \sum_{k=1}^{n} [cotg\, 2^{k-2} x - cotg\, 2^{k-1} x]$$

$$= \left[cotg \tfrac{x}{2} - \cancel{cotg}\, x\right] + [\cancel{cotg}\, x - \cancel{cotg}\, 2x] + \ldots + [\cancel{cotg}\, 2^{n-1} x - \cancel{cotg}\, 2^{n-2} x]$$

$$+ [\cancel{cotg}\, 2^{n-2} x - cotg\, 2^{n-1} x]$$

$$= cotg \tfrac{x}{2} - cotg\, 2^{n-1} x$$

$\boxed{\text{Problema 13}}$ Hallar la suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k \cos 2^{1-k} x \cdot sen^2 \frac{x}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} 2^k \cos \frac{x}{2^{k-1}} \cdot sen^2 \frac{x}{2^k}$$

Solución:

1) Al desarrollar la suma, obtenemos:

$$S_n = 2\cos x \cdot sen^2 \tfrac{x}{2} + 2^2 \cos \tfrac{x}{2} \cdot sen^2 \tfrac{x}{4} + 2^3 \cos \tfrac{x}{4} \cdot sen^2 \tfrac{x}{8} + \ldots + 2^n \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot sen^2 \frac{x}{2^n}$$

2) Se debe encontrar una identidad apropiada para aplicar la propiedad telescópica: $a_k - a_{k-1}$

Veamos:

$$2\cos x\cdot sen^2\frac{x}{2}=2\cos x\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)$$
$$=\cos x-\cos^2 x$$
$$=\cos x-(1-sen^2 x)$$
$$=\cos x-1+sen^2 x$$
$$=-(1-\cos x)+sen^2 x$$
$$=-2sen^2\frac{x}{2}+sen^2 x$$
$$=sen^2 x-2sen^2\frac{x}{2}$$

Luego:

$$\boxed{\cos x\cdot sen^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left[sen^2 x-2sen^2\frac{x}{2}\right]}\quad 2(*)$$

o $\cos\frac{x}{2^{k-1}}\cdot sen^2\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2}\left[sen^2\frac{x}{2^{k-1}}-2\,sen^2\frac{x}{2^k}\right]$

3) Aplicar la identidad (2∗) a cada término de la suma en (1):

$$S_n=2\cdot\frac{1}{2}\left[sen^2 x-2sen^2\frac{x}{2}\right]+2^2\cdot\frac{1}{2}\left[\text{sen}^2\frac{x}{2}-2\,\text{sen}^2\frac{x}{4}\right]+\ldots\ldots$$
$$+2^{n-1}\frac{1}{2}\left[sen^2\frac{x}{2^{n-2}}-2sen^2\frac{x}{2^{n-1}}\right]+2^n\cdot\frac{1}{2}\left[sen^2\frac{x}{2^{n-1}}-2\,sen^2\frac{x}{2^n}\right]$$
$$=\underline{\underline{sen^2 x}}-2\cancel{sen^2}\frac{x}{2}+2\,\cancel{sen^2\frac{x}{2}}-4\cancel{sen^2}\frac{x}{4}+\ldots+2^{n-2}sen^2\frac{x}{2^{n-2}}-2^{n-1}\cancel{sen^2}\frac{x}{2^{n-1}}$$
$$+2^{n-1}\cancel{sen^2}\frac{x}{2^{n-1}}\underline{\underline{-2^n sen^2\frac{x}{2^n}}}$$
$$=sen^2 x-2^n sen^2\frac{x}{2^n}$$

Problema 14 Hallar la suma: $S_n=\sum_{k=0}^{2n-1}Z^k$

Solución:

1) $S_1=\sum_{k=0}^{1}Z^k=1+Z$

$S_2=\sum_{k=0}^{3}Z^k=1+Z+Z^2+Z^3$

⋮

$S_n=1+Z+Z^2+Z^3+\ldots\ldots+Z^{2n-1}$

2) Multiplicar por $(1-Z)$ a la suma S_n:

$$(1-Z)S_n = 1+Z+Z^2+Z^3+\ldots+Z^{2n-2}+Z^{2n-1}-[Z+Z^2+Z^3+\ldots+Z^{2n-1}+Z^{2n}]$$

$$= 1-Z^{2n}$$

$$\Rightarrow S_n = \boxed{\sum_{k=0}^{2n-1} Z^k = \frac{1-Z^{2n}}{1-Z}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS - GRUPO 1

1. Sabiendo que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ y aplicando la propiedad telescópica, probar que:

   a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

   b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   c) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n}{30}(n+1)(6n^3+9n^2+n+1)$

2. Pruébese que $2^n > n$, donde n es un entero positivo.

3. Pruebe que $\frac{4^n-1}{3}$ es un entero, si n es un entero positivo.

4. Demuéstrese que $\frac{5^n-1}{3}$ es un entero, si n es un entero positivo.

5. Demuéstrese que $x^n \geq x$ si $x \geq 1$, donde n es un entero positivo.

6. Pruébese que $2^n < n!$, si n es un entero y $n \geq 4$.

7. Pruébese que para cualquier número real $p \geq -1$ y cualquier entero positivo n, $(1+p)^n \geq 1+np$.

8. Pruébese que
   $$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

9. Demostrar que $x+y$ es un factor de $x^{2n-1}+y^{2n-1}$, para cualquier entero positivo n.

10. Demostrar que si n es un entero positivo impar, entonces x^n+y^n es divisible por $x+y$.

11. Demostrar que n^2-n es divisible por 2 para cualquier entero positivo n.

12. Determinar una fórmula para $F(n)$ en términos de n.

    a) $\begin{cases} F(1)=1 \\ F(n)=nF(n-1) \quad , \quad n>1 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} F(1)=\frac{5}{2} \\ F(n)=2F(n-1) \quad , \quad n>1 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} F(1)=2 \\ F(n)=\frac{1}{n}F(n-1) \quad , \quad n>1 \end{cases}$

PROBLEMAS PROPUESTOS - GRUPO 2

Hallar el valor de las siguientes sumas y demostrar por inducción la validez de la suma.

a) $S_n = \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ **R:** $\frac{2^{n-1}-1}{n+1}$

b) $T_n = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots\ldots + n\binom{n}{n}$ **R:** $n2^{n-1}$

c) $P_n = \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + \ldots\ldots + (2n+1)\binom{n}{n}$ **R:** $(n+1)2^n$

d) $S_n = \sum_{k=1}^{n} K^2\binom{n}{k}$ **R:** $n(n+1)2^{n-2}$

e) $S_n = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m} + \ldots\ldots + \binom{m}{m}$, si $m < n$, $n \geq 1$ **R:** $\binom{n+1}{m+1}$

f) $S_n = \binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} n\binom{n}{n}$, $n \geq 1$ **R:**

g) $S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \ldots\ldots \; n \geq 1$, $n \geq 1$ **R:**

Sugerencia.- *Aplicar las propiedades:*

1) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

2) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$

PROBLEMAS PROPUESTOS - GRUPO 3

I Demostrar por inducción las siguientes proposiciones:

01. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

02. $\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

03. $\sum_{i=1}^{n}(2i)^3 = 2n^2(n+1)^2$

04. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

05. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

06. $\sum_{i=1}^{n} 2i(2i+2) = \frac{1}{3}n(2n+2)(2n+4)$

07. Si $1+p>0$ y $n>1$, $(1+p)^n > 1+np$ (desigualdad de Bernoulli)

08. Si $a \geq b$ y $n \geq 1$, $n(a-b)b^{n-1} \leq a^n - b^n \leq n(a-b)a^{n-1}$

09. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

10. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

11. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$

12. $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = \frac{3(3^n-1)}{2}$

13. $2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1) \cdot 2^{n+1} = n \cdot 2^n$

14. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$

15. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n-3}{2^n}$

16. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

17. $\frac{1}{1 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 28} + \ldots + \frac{1}{(9n-8)(9n+1)} = \frac{n}{9n+1}$

18. $\frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 23} + \ldots + \frac{1}{(6n-1)(6n+5)} = \frac{n}{5(6n+5)}$

19. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

20. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

21. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

22. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{3}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$

II Demuéstrese (por el método de inducción matemática) que para cualquier n natural se verifican las siguientes desigualdades (23 al 25).

23. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n+1}$

24. $2\sqrt{n+1}>\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$

25. $(n!)>\left(\frac{n}{3}\right)^n$

26. Demuéstrese que para todo $n\geq 5$ (n es un número natural) se verifica la desigualdad $2^n>n^2$.

27. Demuéstrese que para todo n natural $(n\geq 3)$ se verifica la desigualdad $n!>2^{n-1}$.

III Demuéstrese que para cualquier n natural:

28. El número n^3+5n es divisible por 6.

29. El número $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es divisible por 9.

30. El número $4^n+15n-1$ es divisible por 9.

31. El número $3^{2n}-1$ se divide por 2^{n+2} y no se divide por 2^{n+3}.

32. El número n^5-n se divide por 30.

33. El número $4^{2n}-3^{2n}-7$ se divide por 84.

34. El número $6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ se divide por 17.

35. El número $4^{2n+1}+3^{n+2}$ se divide por 13.

36. El número $n^2(n^4-1)$ se divide por 60.

37. El número $6n^5+15n^4+10n^3-n$ se divide por 30.

38. El número $20^{n+1}+16^{n+1}-3^{n+1}-1$ se divide por 323.

39. El número $(2n)^3+20(2n)$ se divide por 48.

40. Demostrar que $x+y$ es un factor de $x^{2n-1}+y^{2n-1}$, para cualquier entero positivo n.

IV Demostrar por inducción matemática:

41. $2+9+16+\ldots+(7n-5)=\frac{n(7n-3)}{2}$, para toda $n\in I\!N^+$.

42. $1^2+3^2+5^5+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$, para toda $n\in I\!N^+$.

43. $2^n>n$, para toda $n\in I\!N^+$.

44. $n^n>n!$, para toda $n\in I\!N^+$.

45. $(1+a)^n\geq 1+na+\frac{n(n-1)\,a^2}{2}$, para toda $n\in I\!N^+$, para toda $a\in I\!R$, $a\geq 0$.

46. $x^{2n}-y^{2n}$ es divisible por $x-y$, para toda $n\in I\!N^+$, para todo $x,y\in I\!R$.

47. $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\ldots+\binom{n+3}{3}=\binom{n+4}{3}$, para toda $n\in I\!N^+$.

48. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n\cdot(n+1)}$, para toda $n\in I\!N^+$.

49. $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es siempre divisible por 9, para toda $n\in I\!N^+$.

PROBLEMAS PROPUESTOS - GRUPO 4

Determinar una expresión simplificada para cada una de las siguientes sumatorias.

01. $\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{5k+1}-\sqrt{5k-4})$

02. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$

03. $\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)$

04. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}-2^{k}}{2^{2k+1}}$

05. $\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k-1}$

06. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$

07. $\sum_{k=1}^{n}(2k-6k^2+1)$

08. $\sum_{k=1}^{n}(k^3-3k^2+3k-1)$

09. $\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{n}k+\left(1-\frac{3}{n}\right)\right]$

10. $\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{n^2}k^2$

11. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e^{\frac{1}{n}k})$

12. $\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{12}{n}k-\frac{27}{n^2}k^2+\frac{27}{n^3}k^3\right]$

13. $\sum_{k=1}^{n}(2n^2-3k)$

14. $\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}k\right)$

15. $\sum_{k=1}^{n}\left[3k-\frac{1}{2n+1}k^2\right]$

16. $\sum_{k=1}^{n}\left[(n+1)-\frac{1}{n}k\right]$

PROBLEMAS PROPUESTOS - GRUPO 5

01. Simplificar y calcular las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{x=1}^{4}3x$ b) $\sum_{x=1}^{4}(x^2+2)$ c) $\sum_{i=1}^{4}(2y_i-5)$

d) $\sum_{i=1}^{4}x_i$ e) $\sum_{y=2}^{5}(y^2-3y+2)$ f) $\sum_{i=1}^{n}(y_i-3)^2$

02. Simplificar y calcular las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{y=1}^{3}y^3$ b) $\sum_{i=1}^{5}(x^2+2i)$ c) $\sum_{x=1}^{4}(x+xy^2)$ d) $\sum_{i=1}^{n}(y_i-a)$

e) $\sum_{y=1}^{3} 6$ f) $\sum_{y=0}^{5} (x^2+y^2)$ g) $\sum_{i=1}^{2} (y_i-i)$ h) $\sum_{i=1}^{n} (y_i-a)^2$

03. Calcular las sumas de los ejercicios desde (a) hasta (*f*) usando las siguientes conjuntos de observaciones:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y_i	3	12	10	−6	0	11	2	−9	−5	8	−7	4	−5

a) $\sum_{i=1}^{13} 2y_i$ b) $\sum_{i=3}^{10} y_i^2$ c) $\sum_{i=1}^{13} (y_i-2)^2$

d) $\sum_{i=1}^{13} (2y_i-5)$ e) $\sum_{i=1}^{10} (y_i^2+y_i)$ f) $\sum y_i^2 - \frac{1}{13}\left(\sum_{i=1}^{13} y_i\right)^2$

04. Sean los conjuntos $A=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ y $B=\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ definimos: $\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$. Verificar las siguientes identidades

a) $$\sum_{i=1}^{n} (y_i-\overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} (x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}$$

c) $$\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i-\overline{y})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]$$

d) $$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\overline{x})^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

BIBLIOGRAFÍA

I. LIBROS

- Allendoerfer & Carley. Fundamentos de Matemática Universitaria
  Ediciones Del Castillo S.A.
- Allen, Douglas. School Mathematics Study Groups (SMGS)
  Mathematics for High School
  Yale University Press.
- Carranza C. & Kong M. Teoría de Conjuntos y Números Reales
  Perú Offset.
- Ferrater Mora José & Hugues Leblan. Lógica Matemática
  Fondo de Cultura Económica - México
- Potapov M. Algebra
  Editorial Mir - Moscú
- P. Suppes & S. Hill. Introducción a la Lógica Matemática
  Editorial Reverté S.A.

II INTERNET

- Glosario de Carlos Von der Becke
  Lógica Dicotómica.
- José Alfredo Jimenez Murillo y María Aeida
  Lógica Matemática.
- Wikipedia, La Enciclopedia Libre
  Teoría de Conjuntos.
- Ejercicios Resueltos de Matemática,
  giamath.sytes.net/ejercicios resueltos
  Axiomas de los Números Reales.